G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
18(3): 329-339 (2005) *18(3):329-339 (2005)*

COMPARING THE EFFICIENCY OF THE ESTIMATORS FOR THE POPULATION MEAN UNDER DIFFERENT DESIGNS OF RANKED SET SAMPLING

Fikri Gökpınar*, Yaprak Arzu Özdemir, A.Alptekin Esin
Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, 06500 Ankara, TÜRKİYE
e-mail: fikri@gazi.edu.tr

ABSTRACT

Ranked set sampling is a cost efficient sampling technique when actually measuring sampling units is difficult but ranking them is relatively easy. The mean of the usual balanced ranked set sample is more efficient as an estimator of the population mean than the mean of a simple random sample. In this study, different ranked set sampling plans are considered for estimating of population mean. These estimators are theoretical compared in terms of relative efficiency under uniform, normal, exponential and weibull distribution.

Key Words**:** Ranked set sampling, Relative Efficiency, Mean Square Error

SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNİN FARKLI TASARIMLARI ALTINDA YIĞIN ORTALAMASINA İLİŞKİN TAHMİN EDİCİLERİN ETKİNLİKLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

Sıralı küme örneklemesi, örnekleme birimlerini ölçmek zor ancak bunları sıralamak daha kolay olduğu durumda maliyet etkili bir örnekleme tekniğidir. Yığın ortalamasının tahmin edicisi olarak, sıralı küme örneğinin ortalaması, basit tesadüfi örneğin ortalamasından daha etkindir. Bu çalışmada, yığın ortalamasının tahmini için farklı sıralı küme örneklemesi tasarımları incelenmiştir. Bu tahmin ediciler tekdüze, normal, üstel ve weibull dağılımları altında göreli etkinlikleri bakımından teorik olarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sıralı Küme örneklemesi, Göreli Etkinlik, Ortalama Hata Kare

1. GİRİŞ

Sıralı Küme Örneklemesi (SKÖ) son yıllarda, çevre, ekoloji ve tarım gibi alanlarda oldukça sık kullanılan bir örnekleme yöntemidir. Bu tür alanlarda, birimlerin ilgilenilen değişken bakımından ölçümlerinin yapılmasının maliyet, zaman veya diğer faktörler bakımından oldukça zor olduğu durumlarla karşılaşılabilir. Bu gibi durumlarda, SKÖ kullanılarak örnek seçim işlemi, basit tesadüfi örneklemeye(BTÖ) göre daha düşük maliyetle ve daha kısa zamanda gerçekleştirilir.

SKÖ ile seçilen örneğin, ilgilenilen değişkenin dağılımı üzerinde iyi bir yayılıma sahip olduğu söylenebilir. Bu durum örnek seçim işleminin iki aşamada yapılmasından kaynaklanmaktadır. Örnek seçiminde öncelikle; ilgili yığından seçilen m^2 çaplı tesadüfi bir örnek, her biri m çaplı m kümeye tamamen tesadüfi olarak paylaştırılır. Böylece birbirinden bağımsız m çaplı m tane tesadüfi örnek(küme) elde edilmiş olur.

1. INTRODUCTION

Ranked set sampling (RSS) is a common sampling technique, that is often used recently in some areas such as; environment, ecology and agriculture. In these areas, the measurements of the units according to variables of interest can be quite difficult in some cases, in terms of cost, time and other factors. In such conditions, by using the ranked set sampling, the sample selection process is done by less cost and in less time, than the simple random sampling (SRS) technique.

It can be said that, the sample that is selected with ranked set sampling, has a better expansion on distribution of the interested variable. This situation is sourced by the sample selection that is based on two stages. While selecting the sample, a random sample that is of size m^2 drawing from the population, is shared randomly into m sets with m units in each set. So, in the end we have m sets with size m that are completely independent from each other.

İlk aşamada; her bir küme ilgilenilen X değişkeni bakımından hassas ölçüm gerektirmeyen bir ölçümle küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bu ölçüm, maliyet gerektirmeyen bir ölçüm olup, birimlerin sıralanması, daha önceki deneyimler, görsel bir ölçüm veya bir yardımcı değişken yardımı ile yapılabilir.

İkinci aşamada; kendi içinde sıralanan kümelerin birincisinden ilk sıradaki birim, ikincisinden ikinci sıradaki birim ve bu şekilde devam edilerek m. kümeden m. sıradaki birim alınarak istenilen hassaslığı sağlayan yüksek düzeyli bir ölçümle X değişkeni bakımından ölçülür.

Böylece m çaplı Sıralı Küme Örneği $Y_{(1:1)}$, $Y_{(2:2)},\ldots,Y_{(m:m)}$ şeklinde oluşur. $Y_{(i:i)}$; m çaplı sıralı küme örneğinde i.nci kümedeki i.nci sıra istatistiğine ilişkin gözlemi ifade eder. Böyle bir SKÖ tasarımına genel olarak dengeli sıralı küme örneklemesi (DSKÖ) denir (6). Dengeli sıralı küme örneğinden elde edilecek olan yığın ortalamasına ilişkin tahmin edici, yığının dağılımı ne olursa olsun sapmasız bir tahmin edicidir. Ancak, yığının dağılımı biliniyor ise, bu tahmin edici yığın ortalamasına ilişkin en küçük varyanslı tahmin edici olmayabilir. Bu durumda, sıralı küme örneklemesinin farklı tasarımları kullanılarak, yığına ilişkin ortalamanın yansız ve en küçük varyanslı tahmin edicisi bulunabilir.

Bu çalışmada m=3 olmak üzere; mümkün tüm farklı SKÖ tasarımları altında normal, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları için yığın ortalamasına ilişkin tahmin ediciler bulunmuştur. Bu tahmin ediciler sapmasızlık ve hata kare ortalamaları bakımından incelenerek, dağılımın şekline göre en iyi SKÖ tasarımı belirlenmeye çalışılmıştır.

İkinci bölümde, DSKÖ altında yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicinin beklenen değeri ve varyans özellikleri teorik olarak incelenmiştir. Farklı SKÖ tasarımlarında yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicileri normal, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları altında incelemek amacıyla, sıra istatistiklerinin momentleri verilmiştir. Ayrıca m=3 olmak üzere, mümkün tüm farklı SKÖ tasarımları oluşturularak, bu tasarımlar altında elde edilecek yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin normal, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları altında beklenen değerleri bulunmuştur. Üçüncü bölümde ise mümkün tüm farklı SKÖ tasarımları normal, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları göz önüne alınarak, bu tasarımlar altında yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin ortalama hata kare (OHK) değerleri bulunarak BTÖ'ye göre göreli etkinlikleri (GE) karşılaştırılmıştır.

SKÖ ilk olarak 1952 yılında McIntyre tarafından ekili bir alandaki ortalama ürün miktarını tahmin etmek amacıyla kullanılmıştır. Ancak matematiksel teoriye dayanmayan bu ilk çalışma, daha sonra Takahasi ve Wokimoto (1968) tarafından tekrar ele alınarak, gerekli matematiksel teori altında incelenmiş ve DSKÖ ile elde edilen $\overline{Y}_{DSKÖ}$ örnek ortalaması istatistiğinin yığın ortalaması μ için sapmasız bir tahmin edici olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu tahmin ediciye ilişkin varyans $Var(\overline{Y}_{DSKÖ})$ 'ın, aynı örnek çapına sahip BTÖ yöntemi ile elde edilen örnek ortalaması $\overline{Y}_{BTÖ}$ 'na ilişkin varyans

In the first stage, each set is ranked according to a measurement that is not so sensitive in terms of the related X variable. This measurement doesn't require a cost, and ranking of the units can be done with the help of the previous experiences, a visual measurement or with an concomitant variable.

In the second stage, from the sets that have ranked among themselves, we take the first unit from the first set, the second unit from the second set, and going on like this we take m.th unit from the m.th set, and measure them by a high capacity measurement which acquits the desired sensitiveness, according to the X variable.

Thus, ranked set sample of size m is: $Y_{(1:1)}$, $Y_{(2:2)},\ldots,Y_{(m:m)}$. $Y_{(i:i)}$; is the observation of the i.th order statistic in i.th set for ranked set sample of size m. The design of such a ranked set sampling is called as balanced ranked set sampling (BRSS) (6). The estimator for the population mean, which is obtained from the balanced ranked set sample is an unbiased estimator in any distribution case. But if the distribution of the population is known, this estimator may not be the minimum variance estimator for the population mean. In such a situation, by using different RSS designs, the unbiased and minimum variance estimator for the population mean could be found.

In this study, for m=3, estimators for the population mean are found for normal, uniform, exponential and weibull distributions, under all possible different RSS designs. These estimators are examined according to the unbiasedness and mean square errors and best possible RSS design is defined for the shape of the distribution.

In the second section, the expected value and variance estimator for the population mean under the BRSS is examined theoretically. For investigating the estimators for the population mean in different RSS designs, under the normal, uniform, exponential and weibull distributions, moments of order statistics are given. Moreover, for m=3, all possible different RSS designs are constituded and then the expected values of the estimators obtained from these designs for the population mean are calculated under the normal, uniform, exponential and weibull distributions. In the third section, all possible different RSS designs considered for the normal, uniform, exponential and weibull distributions. Then mean square error (MSE) values of estimators for the population mean according to these designs is found and compared with SRS in terms of the relative efficiency (RE).

Random set sampling is first used by McIntyre in 1952, in order to estimate of mean a pasture yields. But this first study, that didn't depend on mathematical theory, was improved later by Takahasi and Wokimoto (1968), and examined under necessary mathematical theory and the sample mean $\overline{Y}_{BRSS}$, that is obtained by BRSS, is shown as an unbiased estimator for the population mean μ. Moreover, the variance of this estimator $Var(\overline{Y}_{BRSS})$ is smaller than the variance $Var(\overline{Y}_{SRS})$ of sample mean, which is $\overline{Y}_{SRS}$ obtained from SRS with same sample size. Dell and Clutter (1972) showed that the estimator $\overline{Y}_{BRSS}$ is

$Var(\overline{Y}_{BTÖ})$'dan daha küçük olduğu gösterilmiştir. Dell ve Clutter (1972) sıralamada hata yapılması durumunda da, $\overline{Y}_{DSKÖ}$'in μ'nün sapmasız bir tahmin edicisi olma özelliğini sağladığını göstermişlerdir. Ayrıca sıralama hatası olsa bile, aynı örnek çapıyla DSKÖ tasarımı en az BTÖ kadar etkindir. Dolayısıyla $Var(\overline{Y}_{DSKÖ}) \leq Var(\overline{Y}_{BTÖ})$ olur. SKÖ yöntemi son yıllarda pek çok dağılım parametrelerinin tahmini için etkili bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Ancak bu yöntemin etkinliği, dağılımın şekline göre değişmektedir. Bu nedenle DSKÖ tasarımı yerine dağılımın şekline göre SKÖ'nin farklı tasarımları önerilmiştir. Sinha B.K. ve ark. (1996) normal ve üstel dağılım parametrelerinin tahmini için en iyi sıralı küme örnekleme tasarımını belirlemişlerdir. Al- Saleh (2003) tüm SKÖ tasarımlarını, tekdüze, normal ve üstel dağılımları kullanarak, yığın ortalaması ve varyansı için sapmalı ve sapmasız tahmin edici ayrımı yapmaksızın OHK değerlerine göre karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırmada, tahmin edicilerin beklenen değer ve varyansları nümerik integral yoluyla hesaplanmıştır.

Bu çalışmada, tüm farklı SKÖ tasarımları altında tekdüze, normal, üstel ve weibull dağılımları incelenmiştir. Tekdüze, üstel ve weibull dağılımlarında, tahmin edicilerin beklenen değer ve varyansları, nümerik integral yerine, sıra istatistiklerinin tüm örnek çapları için kullanılabilecek momentlerinden yararlanılarak hesaplanmıştır. Normal dağılım için ise, sıra istatistiklerinin beklenen değer ve varyanslarına ilişkin standart tablolardan faydalanılmıştır (2). Ayrıca karşılaştırma yapılırken tahmin edicilerin sapmasızlık özellikleri göz önünde bulundurulmuştur.

2. SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİNDE YIĞIN ORTALAMASINA İLİŞKİN TAHMİN EDİCİLER VE ÖZELLİKLERİ

Sıralı küme örneğini oluşturmak için yığından seçilen m^2 çaplı tesadüfi örnek, her biri m çaplı m kümeden oluşur. Buradaki m küme birer basit tesadüfi örnek olup, i.nci kümenin elemanları $X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots, X_{i,m}$ (i=1,2,…,m) olmak üzere, her bir küme aynı F(x;θ) dağılım fonksiyonuna ve f(x; θ) yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. i.nci küme için sıra istatistikleri $Y_{(i,1)} \leq Y_{(i,2)} \leq \ldots \leq Y_{(i,m)}$ şeklinde tanımlanır. i.nci kümeden i.nci sıra istatistiğinin görsel olarak veya maliyet gerektirmeyen yöntemler yardımıyla belirlendiği varsayılırsa, m küme için i.nci kümeden i.nci sıra istatistiğinin ölçülmesi ile $Y_{(1:1)}, Y_{(2:2)}, \ldots, Y_{(m:m)}$ sıra istatistikleri dengeli sıralı küme örneğini oluşturur.

DSKÖ altında, herhangi bir dağılıma ilişkin yığın ortalamasının tahmin edicisi sapmasızdır. Bu özellik teorem 2.1 de verilmiştir.

Teorem 2.1:

Yığın ortalaması μ için,

also an unbiased estimator of μ under the presence of ranking error. Even if there are ranking errors, BRSS design is at least as efficient as SRS with the same size. Thus $Var(\overline{Y}_{BRSS}) \leq Var(\overline{Y}_{SRS})$ is observed. RSS technique is also used for estimating distribution parameters in recent years. But the efficiency of this technique changes according to the distribution type. Because of this reason, instead of the BRSS design, different ranked set sampling designs is suggested according to distribution type. Sinha B.K et. al. (1996) defined the best possible RSS design for the estimations of the normal and exponential distribution parameters. Al-Saleh (2003) compared all different RSS designs by using normal, uniform and exponential distributions according to MSE values without separating unbiased or biased estimators for the population mean and the variance. In this comparison, the expected values and the variances of the estimators are calculated by the numeric integrals.

In this study, under all different RSS designs, uniform, normal, exponential and weibull distributions are examined. In the uniform, exponential and weibull distributions, instead of numeric integral, expected value and the variance of estimators are calculated from using by moments of order statistics which can be used for all sample size. For the normal distribution, the standard tables of the expected values and variances of order statistics are used (2). Also, when comparing, unbiasedness properties of the estimators is considered.

2. THE ESTIMATORS FOR THE POPULATION MEAN AND THEIR PROPERTIES IN RANKED SET SAMPLING

The random sample of size m^2 that is chosen to make the ranked set sample consists of m sets of m size each. Those m sets are random samples that are elements of i.th set; $X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots, X_{i,m}$ (i=1,2,…,m), and each set has the same F(x;θ) distribution function and f(x; θ) density function. The order statistics for the i.th set is defined as $Y_{(i,1)} \leq Y_{(i,2)} \leq \ldots \leq Y_{(i,m)}$. If we assume that, the i.th order statistic of the i.th set is defined by the help of visual or costless methods, for m sets we measure the order statistic of i.th from the i.th set, we form a balanced ranked set sample by $Y_{(1:1)}, Y_{(2:2)}, \ldots, Y_{(m:m)}$ order statistics.

Under the BRSS design, the estimator of population mean for any distribution is unbiased. This property is given in the theorem 2.1

Teorem 2.1:

For the population mean μ,

$$\overline{Y}_{BRSS} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{(i:i)} \qquad [2.1]$$

sapmasız bir tahmin edicidir (10).

is an unbiased estimator (10).

İspat:

Proof:

$Y_{i:m}$; m çaplı tesadüfi bir örnekteki i.nci sıra istatistiğini ifade etsin. $Y_{(i:i)}$ ile $Y_{i:m}$ aynı dağılıma sahip olduğundan;

Let $Y_{i:m}$ denotes i.th order statistic for a random sample of size m. Since $Y_{(i:i)}$ and $Y_{i:m}$ have same distribution,

$$E(Y_{(i:i)}) = E(Y_{i:m})$$

dir. i.nci sıra istatistiğinin beklenen değeri;

If the expected value of i.th order statistic as follow,

$$E(Y_{i:m}) = \mu_{:i:m}$$

şeklinde ifade edilirse,

from this equation it can be written as,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i:m} = m\mu \qquad [2.2]$$

yazılabilir((2),(4)). Burada $\mu_{i:m}$; m çaplı tesadüfi bir örnekteki i.nci sıra istatistiğinin beklenen değerini ifade eder. Sıra istatistiklerinin (2.2) eşitliğinde verilen özelliğinden yararlanarak,

((2),(4)). In this equation $\mu_{i:m}$; will be denoted expected value of the i.th order statistic for a random sample of size m. Using by order statistics property, given in equation (2.2), the expected value can be written as follow,

$$E(\overline{Y}_{BRSS}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_{i:m} = \mu \qquad [2.3]$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla, $\overline{Y}_{DSKÖ}$ yığın ortalamasının sapmasız bir tahmin edicisidir (5).

Therefore, $\overline{Y}_{BRSS}$ is an unbiased estimator for the population mean (5).

DSKÖ tasarımı altında elde edilecek yığın ortalamasının tahmin edicisinin varyansının, herhangi bir dağılım için, aynı m örnek çaplı BTÖ'ye ilişkin yığın ortalamasının tahmin edicisinin varyansından daha küçük olduğu, teorem 2.2 yardımıyla gösterilmiştir.

Under the BRSS design, the variance of the estimator for the population mean, for any distribution, is smaller than the variance of the estimator for population mean, which is obtained from SRS for the same sample size m is shown by theorem 2.2.

Teorem 2.2:

Teorem 2.2:

Küme içindeki birimlerin görsel veya maliyet gerektirmeyen yöntemlerle sıralanmasında, herhangi bir hata yapılmadığı varsayımı altında, $\overline{Y}_{DSKÖ}$'ne ilişkin varyans

Under the assumption of ranking of the units in the set without an error, with visual or costless methods, the variance of $\overline{Y}_{BRSS}$ would be;

$$Var(\overline{Y}_{BRSS}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sigma^2_{i:m}}{m} = \frac{1}{m}\left[\sigma^2 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mu_{i:m}-\mu)^2\right] \qquad [2.4]$$

Biçimindedir ((7),(9)). Burada σ^2 ,yığın varyansını ve $\sigma^2_{(i:m)}$,$Y_{i:m}$ sıra istatistiğinin varyansını ifade etmektedir.

((7),(9)). In this equation σ^2 denotes population variance and $\sigma^2_{(i:m)}$, denotes the variance of $Y_{i:m}$ order statistic.

İspat:

Proof:

$Y_{(i:i)}$ ile $Y_{i:m}$ aynı dağılıma sahip olmalarından dolayı;

Since $Y_{(i:i)}$ and $Y_{i:m}$ have the same distribution,

$$Var(Y_{(i:i)}) = Var(Y_{i:m})$$

olacaktır. Buradan,

Then

$$Var(\overline{Y}_{BRSS}) = Var(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{(i:i)})$$

olmak üzere, $Y_{(i:i)}$ sıra istatistikleri birbirinden bağımsız olduklarından; $Var(\overline{Y}_{DSKÖ})$ eşitliği

Since order statistics $Y_{(i:i)}$ are independent from each other, $Var(\overline{Y}_{BRSS})$ can be express as,

$$Var(\overline{Y}_{BRSS}) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} Var(Y_{i:m}) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma^2_{i:m} \qquad [2.5]$$

olarak ifade edilebilir. Eşitlik (2.5)'de $Y_{i:m}$ sıra istatistiğinin varyansı,

In equation (2.5), variance of $Y_{i:m}$ defined as

$$\sigma^2_{i:m} = E(Y_{i:m} - \mu_{i:m})^2 = E(Y^2_{i:m}) - \mu^2_{i:m} \qquad [2.6]$$

şeklinde tanımlanır.Sıra istatistiklerinin

Using the following properties of order statistics,

$$\sum^{m} E(Y_{i:m}^{2}) = mE(X^{2}) \quad [2.7]$$

$$\sum^{m} \sigma_{i:m}^{2} = mE(X^{2}) - \sum^{m} \mu_{i:m}$$

özelliklerinden yararlanarak,

it can be written a,s

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_{i:m}^{2} = m(\sigma^{2} + \mu^{2}) - \sum_{i=1}^{m} \mu_{i:m}^{2} = m\sigma^{2} - \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i:m} - \mu)^{2} \quad [2.8]$$

yazılabilir((3),(5)). Eğer (2.5) eşitliği (2.8) de yerine yazılırsa,

((3),(5)). If equation (2.5) is substituted in equation (2.8), then it can be proved that

$$Var(\overline{Y}_{BRSS}) = \frac{1}{m^{2}} \sum_{i=1}^{m} \sigma_{i:m}^{2} = \frac{1}{m^{2}} (m\sigma^{2} - \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i:m} - \mu)^{2}) \quad [2.9]$$

olduğu ispatlanır.

Eşitlik (2.9)daki $Var(\overline{Y}_{DSKÖ})$ varyans ifadesi, aynı m örnek çaplı BTÖ den elde edilen ortalamaya ilişkin varyans,

If the variance $Var(\overline{Y}_{BRSS})$ in equation (2.9) compared to the variance,

$$Var(\overline{Y}_{SRS}) = \frac{\sigma^{2}}{m}$$

ile karşılaştırıldığında, SKÖ'nün BTÖ'den daha etkin olduğu görülmektedir.. Dolayısıyla GE,

which is obtained from SRS with the same sample size of m, it will be seen that RSS is more efficient than SRS. Thus RE is defined as,

$$RE = \frac{Var(\overline{Y}_{SRS})}{Var(\overline{Y}_{BRSS})} = \frac{1}{1 - \{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i:m} - \mu)^{2} / \sigma^{2}\}} \quad [2.10]$$

şeklinde tanımlanır (10). GE'nin büyüklüğü i.nci sıra istatistiğinin beklenen değerine bağlıdır. Bu durum, Dell ve Clutter (1972) tarafından farklı dağılımlar altında incelenmiştir. GE, 1 ile (m+1)/2 arasında değer alır. En yüksek değeri olan (m+1)/2'yi ise tekdüze dağılım altında almaktadır. GE'nin büyüklüğü, yığının dağılımına, sıralamanın doğruluğuna ve küme çapı m'ye bağlıdır. Dağılımın çarpıklığı ve basıklığı arttıkça, sıralamada hata çoğaldıkça ve m küme çapı azaldıkça, GE'de azalmaktadır.

Genel olarak tüm SKÖ tasarımlarını ortaya çıkarmak üzere, $Y_{(j:i)}$; $\{X_{j,1}, X_{j,2} \ldots, X_{j,m}\}$ kümesindeki (j=1,2,…m} i.nci sıra istatistiğine ilişkin gözlemi ifade eder ve m çaplı tesadüfi bir örnekteki i.nci sıra istatistiği $Y_{i:m}$ ile aynı dağılıma sahiptir. i_j; j.nci kümeden alınacak birimin sıra numarasını göstermek üzere, $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ SKÖ tasarımına karşılık gelen örnek, $Y_{(1:i_1)}, Y_{(2:i_2)}, \ldots, Y_{(m:i_m)}$ şeklinde oluşacaktır. Burada toplam m^m tane SKÖ tasarımı vardır. m=3 için oluşacak 27 tasarımın hepsi birbirinden farklı değildir. Dolayısıyla, bu örnekleme tasarımlarından aynı olanlar ve kullanılacak tasarımlar tablo 1'de verilmiştir. Burada (i,j,k) tasarımı 1.nci kümeden i.nci, 2.nci kümeden j.nci, 3.ncü kümeden k.ncı sıra istatistiğinin sıralı küme örneğini oluşturduğunu gösterir. Örneğin (1,1,2), (1,2,1) ve (2,1,1) tasarımlarından elde edilecek tahmin edicilerin her birinin beklenen değeri, SKÖ'de sıra istatistiklerinin bağımsızlıklarından dolayı, aynı olacağından bu tasarımlardan herhangi birini kullanmak yeterlidir. Aynı

(10). The greatness of RE depends on the expected value of the i.th order statistics. This situation is examined by Dell and Clutter (1972) under various distributions. RE takes a value between 1 and (m+1)/2. It takes the greatest value of (m+1)/2 under the uniform distribution. The greatness of RE depends on the distribution of the population, the accuracy of the ranking and the set size m. If the kurtosis and the skewness of the distribution increases, the errors in ranking increases and m set size is decreases, then RE would also be decreased.

Generally, for identifying all ranked set sampling designs, $Y_{(j:i)}$ denotes the observation of i.th order statistics in the set $\{X_{j,1}, X_{j,2} \ldots, X_{j,m}\}$, (j=1,2,…m}and i.th order statistics in the sample if size m has the same distribution with $Y_{i:m.}$ As i_j would be the rank score the sample of $Y_{(1:i_1)}, Y_{(2:i_2)}, \ldots, Y_{(m:i_m)}$, would be corresponding to $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ RSS design. There are m^m RSS designs. The 27 designs that would occur for m=3 wouldn't be different from each other. Therefore, the same designs and the designs that would be used are represented in table 1. Here, the (i,j,k) design shows that the i.th order statistic from set 1, j.th order statistic from the set 2, and k.th order statistic from set 3 shows a ranked set sample. For example, the expected values of the estimators which are obtained by the designs (1,1,2), (1,2,1) and (2,1,1), that would be same because of the independencies of the order statistics in the RSS, it would be adequate to use any one of those designs. The same property is valid for the özellik varyans için geçerlidir.

variance.

Table 1. Possible designs for m=3
Çizelge 1.m=3 için mümkün tasarımlar

Possible Designs/ Mümkün tasarımlar	Design for use/ Kullanılacak tasarımlar
(1,1,1)	(1,1,1)
(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)	(1,1,2)
(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)	(1,1,3)
(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)	(1,2,2)
(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)	(1,2,3)
(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1)	(1,3,3)
(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2)	(2,2,3)
(2,3,3),(3,3,2),(3,2,3)	(2,3,3)
(2,2,2)	(2,2,2)
(3,3,3)	(3,3,3)

Bu tasarımlar altında elde edilecek yığın ortalamasına ilişkin SKÖ tahmin edicileri genel olarak;

$$\overline{Y}_{RSS(j_1,j_2,\ldots,j_m)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} Y_{(j:i_j)}}{m}$$

şeklinde ifade edilir. Bu tasarımlar, yığın ortalamasını tahmin etmek üzere tekdüze, üstel, normal ve weibull dağılımı altında incelenmiştir. Bu dağılımlar için yığından seçilen m çaplı tesadüfi bir örnekteki i.nci sıra istatistiğine ilişkin k.nci momentler aşağıdaki gibidir. Bu momentlere dayalı olarak, tüm farklı sıralı küme örnekleme tasarımları altında, yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin özellikleri ele alınmıştır.

The RSS estimators for the population mean obtained by these designs are;

These designs are examined under normal, uniform, exponential and weibull distributions to estimate the population mean. For these distributions, the k'th moments for the i'th order statistics in a random sample of size m from the population is as following. According to those moments, under all the different RSS designs, the properties of the estimators for the population mean are considered.

2.1 Tekdüze Dağılım

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ tesadüfi örneği;
$f(x) = 1$ 0<x<1
dağılımına sahip olsun. Bu dağılımın ortalaması E(x)=1/2 varyansı ise Var(x)=1/12 dır. Bu örneğe ilişkin sıra istatistikleri $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$ olmak üzere, $Y_{i:m}$'in k.ncı momenti,

2.1 Uniform Distribution

Let $X_1, X_2, \ldots, X_m$ random sample has the following distribution,
$f(x) = 1$ 0<x<1
Expected value and variance of this variable are E(x)=1/2 and Var(x)=1/12. Order statistics of this sample is $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$. So k.th moment of $Y_{i:m}$ is

$$\mu_{i:m}^{k} = E(Y_{i:m}^{k}) = B(i+k, m-i+1)/B(i, m-i+1) \qquad i=1,2,..m \qquad [2.11]$$

şeklinde tanımlanır (2). Burada B(i,j); beta fonksiyonudur. Dolayısıyla, (2.11) eşitliği,

(2). In this equation B(i,j) is beta function. Therefore equation (2.11) can be written as

$$\mu_{i:m}^{k} = \frac{m!}{(m+k)!}\frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} \qquad [2.12]$$

olarak yazılır. Bu ifade, k=1 için;

In this equation if k=1 then;

$$\mu_{i:m} = E(Y_{i:m}) = i/(m+1) \qquad [2.13]$$

olur. Var($Y_{i:m}$) ise;

Also Var($Y_{i:m}$) is

$$Var(Y_{i:m}) = \mu_{i:m}^{(2)} - \left(\mu_{i:m}\right)^2 = \frac{i(m+1-i)}{(m+1)^2(m+2)}. \qquad [2.14]$$

şeklinde ifade edilir.

2.2 Üstel dağılım

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ tesadüfi örneği;

$f(x) = e^{-x}$ 0<x<∞

dağılımına sahip olsun. Bu dağılımın ortalaması E(x)=1 varyansı ise Var(x)=1dır. Bu örneğe ilişkin sıra istatistikleri $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$ olmak üzere, $Y_{i:m}$'in k.ncı momenti, aşağıda verilen eşitlikler ve integral yardımıyla hesaplanabilir.

2.2 Exponential Distribution

Let $X_1, X_2, \ldots, X_m$ random sample has the following distribution,

$f(x) = e^{-x}$ 0<x<∞

Expected value and variance of this variable are E(x)=1 and Var(x)=1. Order statistics of this sample is $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$. So k.th moment of $Y_{i:m}$ can be calculated by the equation (2.15) and integral.

$$\left.\begin{aligned} \mu_{1:m}^{(k)} &= \frac{k}{m}\mu_{1:m}^{(k-1)} \\ \mu_{i:m}^{(k)} &= \mu_{i-1:m-1}^{(k)} + \frac{k}{m}\mu_{i:m}^{(k-1)} \qquad i=2,3,\ldots,m \end{aligned}\right\} \qquad [2.15]$$

Burada beklenen değer ve varyans ifadeleri

From these equations expected value and variance are,

$$\mu_{i:m} = E(Y_{i:m}) = \sum_{r=1}^{i} \frac{1}{(m-r+1)} \qquad i=1,2,3,\ldots,m \qquad [2.16]$$

$$Var(Y_{i:m}) = \mu_{i:m}^{(2)} - \left(\mu_{i:m}\right)^2 = \sum_{r=1}^{i} \frac{1}{(m-r+1)^2} \qquad i=1,2,3,\ldots,m \qquad [2.17]$$

biçimindedir(2).

(2).

2.3 Normal dağılım

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ tesadüfi örneği;

2.3 Normal Distribution

Let $X_1, X_2, \ldots, X_m$ random sample has the following distribution.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty<x<\infty$$

dağılımına sahip olsun. Bu dağılımın ortalaması E(x)=0 varyansı ise Var(x)=1dır. Bu örneğe ilişkin sıra istatistikleri $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$ olsun. $Y_{i:m}$'in k.ncı momentini hesaplamak oldukça zordur. Fakat i.nci sıra istatistiğine ilişkin beklenen değer ve varyans değerleri farklı m örnek çapları için tablolar geliştirilmiştir (2).

Expected value and variance of this variable are E(x)=1/2 and Var(x)=1/12. Order statistics of this sample is $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$. Calculation of moment of $Y_{i:m}$ is very complex. For expected value and variance of i.th order statistics and different value of m, tables are developed (2).

2.4 Weibull dağılımı

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ tesadüfi örneği;

$f(x) = e^{-x^{\delta}} x^{\delta-1}\delta$ 0<x<∞, δ>0

dağılımına sahip olsun. Bu dağılımın ortalaması $E(x) = \Gamma\left(\frac{1}{\delta}+1\right)$ varyansı ise $Var(x) = \Gamma\left(\frac{2}{\delta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right]^2$ biçiminde tanımlanır. Bu örneğe ilişkin sıra istatistikleri $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$

2.4 Weibull Distribution

Let $X_1, X_2, \ldots, X_m$ random sample has the following distribution,

$f(x) = e^{-x^{\delta}} x^{\delta-1}\delta$ 0<x<∞, δ>0

Expected value and variance of this variable are $E(x) = \Gamma\left(\frac{1}{\delta}+1\right)$ and $Var(x) = \Gamma\left(\frac{2}{\delta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right]^2$.

Order statistics of this sample is $Y_{1:m} \le Y_{2:m} \le \ldots \le Y_{m:m}$.

So k.th moment of $Y_{i:m}$ is

olmak üzere, $Y_{i:m}$ 'in k.ncı momenti,

$$\mu_{i:m}^{k} = E(Y_{i:m}^{k}) = \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}\Gamma\left(1+\frac{k}{\delta}\right)\sum_{r=0}^{i-1}(-1)^{r}\binom{i-1}{r}\Big/(m-i+r+1)^{1+(k/\delta)} \qquad [2.18]$$

şeklindedir. Burada beklenen değer ve varyans ifadeleri (2.18) eşitliğinden yararlanarak elde edilmiştir (2).

Expected value and variance can be calculated from (2.18) (2).

2.5 Yığın Ortalamasına İlişkin Tahmin Edicilerin Beklenen Değerlerinin Karşılaştırılması

m=3 iken, farklı SKÖ tasarımlarına göre yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin beklenen değerleri, dağılımlara ilişkin sıra istatistiklerinin beklenen değerlerinden yararlanarak hesaplanmış ve elde edilen sonuçlar tablo 2'de verilmiştir. Tablo 2'de tahmin edicilerin beklenen değerleri;,

2.5 The Comparison of The Expected Values For The Population Mean

For m=3, the expected values of the estimators for the population mean of RSS designs, are calculated using to expected values of order statistics related with the distributions, and the results which have been obtained are given in table 2. The expected values of the estimators in table 2 obtained as;

$$E\left(\overline{Y}_{RSS(i_1,i_2,\ldots,i_m)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{m} E\left(Y_{(j:i_j)}\right)}{m}$$

şeklinde elde edilir. Örneğin m=3 için tekdüze dağılım altında, (1,1,2) tasarımına ilişkin tahmin edicinin beklenen değeri (2.13) eşitliğinden faydalanarak;

For example; for m=3, under a uniform distribution, by using the equality (2.13), the expected value of the estimator for the (1,1,2) design is found as;

$$E\left(\overline{Y}_{RSS(1,1,2)}\right) = \frac{E\left(Y_{(1:1)}\right)+E\left(Y_{(2:1)}\right)+E\left(Y_{(3:2)}\right)}{3} = \frac{E\left(Y_{1:3}\right)+E\left(Y_{1:3}\right)+E\left(Y_{2:3}\right)}{3} = \frac{0.25+0.25+0.50}{3} = 0.333333$$

şeklinde bulunur.

Table 2. The Expected Values of The Estimators For RSS Designs Under The Normal, Uniform, Exponential And Weibull Distributions

Çizelge 2. Normal, Tekdüze, Üstel ve Weibull dağılımları altında SKÖ tasarımlarının tahmin edicilerinin beklenen değerleri

Possible Different designs/ Mümkün farklı tasarımlar	Normal/ Normal	Uniform/ Tekdüze	Exponential/ Üstel	Weibull (δ=2)/ Weibull (δ=2)
(1,1,1)	-0.846284	0.25	0.333333	0.511648
(1,1,2)	-0.564189	0.333333	0.5	0.626639
(1,1,3)	-0.282094	0.416667	0.833333	0.771209
(1,2,2)	-0.282094	0.416667	0.666667	0.741630
(1,2,3)	0	0.50	1	0.886200
(1,3,3)	0.282094	0.583333	1.333333	1.030769
(2,2,3)	0.282094	0.583333	1,166667	1.001190
(2,3,3)	0.564189	0.666667	1.5	1.145761
(2,2,2)	0	0.50	0.833333	0.856623
(3,3,3)	0.846284	0.75	1.833333	1.290330

Ayrıca yığın ortalamaları normal dağılım için 0; tekdüze dağılım için 0.50; üstel dağılım için 1 ve weibull dağılımı için 0.8862 dir. Buna göre tablo 2 den görüldüğü gibi, simetrik dağılımlarda (tekdüze, normal) yığın ortalamasının sapmasız tahmin edicileri (1,2,3) ve (2,2,2) SKÖ tasarımından elde edilen tahmin edicilerdir. Fakat aynı durum simetrik olmayan dağılımlarda (üstel, weibull) geçerli değildir. Simetrik olmayan dağılımlarda sadece (1,2,3) SKÖ tasarımı yığın ortalamasının sapmasız bir

Furthermore, the population means are; 0 for the normal distributions, 0.5 for uniform distributions, 1 for the exponential distributions, and 0.8862 for weibull distribution. Thus it is seen in table 2, the unbiased estimators of the population means in symmetrical distributions (normal and uniform) are the estimators that are obtained by the (1,2,3) and (2,2,2) RSS designs. But same situation is not valid in nonsymmetrical distributions (exponential and weibull). In nonsymmetrical distributions tahmin edicisini verir.

only (1,2,3) RSS design gives the unbiased estimator for the population mean.

3 YIĞIN ORTALAMASINA İLİŞKİN TAHMİN EDİCİLERİN VARYANSLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde SKÖ altında oluşan 10 farklı tahmin edicinin BTÖ'ye göre GE değerleri teorik olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmayı yapmak için tahmin edicilerin OHK'leri kullanılmıştır. OHK;

3. THE COMPARISON OF THE VARIANCES OF THE ESTIMATORS FOR THE POPULATION MEAN

In this section, the RE values of 10 different estimators which have occurred under RSS, are compared theoretically. To make this comparison, MSE's of the estimators have been used. MSE is defined as ;

$$MSE = E\left(\overline{Y}-\mu\right)^2 = E\left(\overline{Y}-E(\overline{Y})\right)^2 + \left(E(\overline{Y})-\mu\right)^2$$

şeklinde tanımlanmak üzere; BTÖ'ye göre, GE;

and the RE with respect to SRS is written as follow,

$$RE = \frac{V(\overline{Y}_{SRS})}{MSE(\overline{Y}_{RSS})}$$

biçimindedir. Burada

where

$$MSE\left(\overline{Y}_{RSS(i_1,i_2,\ldots,i_m)}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{m} V\left(Y_{(j:i_j)}\right)}{m^2} + \left[E\left(\overline{Y}_{RSS(i_1,i_2,\ldots,i_m)}\right)-\mu\right]^2 \qquad [2.19]$$

şeklindedir.

Normal ve Tekdüze dağılımlar için (1,2,3) ve (2,2,2) tasarımları, Üstel ve Weibull dağılımlar için ise (1,2,3) tasarımı sapmasız tahmin edici vermelerinden dolayı GE'ler varyanslarından hareketle bulunurken, diğer tasarımlar için GE'ler OHK yardımıyla elde edilir.

Örneğin m=3 için tekdüze dağılım altında SKÖ'ne göre (1,1,2) tasarımına ilişkin tahmin edicinin OHK'si (2.19) eşitliğinden faydalanılarak;

Since (1,2,3) and (2,2,2) designs of normal and uniform distributions, and (1,2,3) design of exponential and weibull distributions are given unbiased estimators, for these designs RE's are obtained from variances, but for the other designs, RE's are obtained from mean square errors.

For example; under a uniform distribution, for m=3, the mean square error, the expected value of the estimator related with the (1,1,2) design by using the (2.19) equality, is found as;

$$MSE\left(\overline{Y}_{RSS(1,1,2)}\right) = \frac{V\left(Y_{(1:1)}\right)+V\left(Y_{(2:1)}\right)+V\left(Y_{(3:2)}\right)}{9} + \left[E\left(\overline{Y}_{RSS(1,1,2)}\right)-\mu\right]^2$$

$$= \frac{0.0375+0.0375+0.05}{9} + (0.333333-0.50)^2 = 0.04168$$

şeklinde bulunur. Ayrıca BTÖ'ye göre tahmin edicinin varyansı, $V(\overline{Y}_{BTÖ}) = \frac{1/12}{3} = 0.0277$ olduğundan, GE değeri $GE = \frac{0.0277}{0.0.4168} = 0.67$ olacaktır.

Bu çalışmada ele alınan dağılımlara göre, teorik olarak elde edilen OHK ve varyans değerleri ile bunlara bağlı olarak hesaplanan GE değerleri tablo 3'de verilmiştir.

Moreover, since the variance of the estimator based on SRS is; $V(\overline{Y}_{SRS}) = \frac{1/12}{3} = 0.0277$, the RE would be

$$RE = \frac{0.0277}{0.0.4168} = 0.67$$

For the investigating distributions in this study, RE's which are calculated according to MSE and the variance values are given in the Table 3.

Tablo 3. The RE values of estimators of the RSS design according to normal, uniform, exponential and Weibull distributions

Çizelge 3. Normal, Tekdüze, Üstel ve Weibull dağılımlarına ait SKÖ tasarımlarının tahmin edicilerinin BTÖ'ye göre GE değerleri

Possible Different designs/ Mümkün farklı tasarımlar	Normal/ Normal	Uniform/ Tekdüze	Exponential/ Üstel	Weibull (δ=2)/ Weibull (δ=2)
(1,1,1)	0.37	0.37	0.69	0.44
(1,1,2)	0.68	0.67	1.06	0.76
(1,1,3)	1.25	1.43	1.64	1.50
(1,2,2)	1.38	1.25	1.64	1.40
(1,2,3)	1.91	2.00	1.64	1.90
(1,3,3)	1.25	1.43	0.78	1.05
(2,2,3)	1.38	1.25	1.29	1.32
(2,3,3)	0.68	0.67	0.56	0.62
(2,2,2)	2.23	1.67	2.25	2.1
(3,3,3)	0.37	0.37	0.29	0.33

GE değerlerini hesaplarken, gerekli OHK değerleri, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları için, (2.14), (2.17) ve (2.18) eşitliklerinden, normal dağılım için ise standart tablolardan(2) yararlanılarak bulunmuştur.

Tablo 3'ten de görüldüğü gibi normal üstel ve weibull dağılımları için (2,2,2) tasarımı en yüksek etkinlik değerlerini vermektedir. Ancak (2,2,2) tasarımı sadece normal dağılım için sapmasızlık özelliğini göstermektedir. Tekdüze dağılımda ise, en iyi tasarım (1,2,3) tasarımıdır. Aynı zamanda sapmasızlık özelliğini sağlar. Tablo 3' ten görüleceği gibi, simetrik dağılımlarda (Tekdüze, normal) (i,j,k) tasarımı ile (m+1-i,m+1-j,m+1-k) tasarımları aynı GE değerini vermektedir. Ayrıca bu dört dağılım için ortalamayı tahmin etmede en kötü tasarım (3,3,3)'tür. Dikkat edilecek olursa dağılımın şekline göre GE değerleri farklı tasarımlarda farklı değerler almaktadır.

Bu çalışmada yığın ortalamasını tahmin etmekte kullanılabilecek mümkün farklı SKÖ tasarımlarının tümü, normal, tekdüze, üstel ve weibull dağılımları altında incelenmiştir. Öncelikle, tüm m örnek çapları için yığın ortalamasına ilişkin tahmin edicilerin beklenen değerleri ve GE değerlerinin bulunmasında kullanılabilecek, sıra istatistiklerinin moment formülleri verilmiştir. Tablo 2 ve 3'deki dağılımlardan tekdüze, üstel ve weibull dağılımlarına göre tahmin edicilerin beklenen değerleri ve OHK değerleri bu formüller yardımıyla elde edilmiştir. Böylece, mümkün farklı SKÖ tasarımlarından yığın ortalaması için sapmasız tahmin edicileri verenler ve en etkin tasarımlar belirlenmiştir.

Bu çalışma yığın varyansının tahmini için de genişletilebilir. Ayrıca m>3 durumu için yığın ortalamasını tahmin etmede GE değerleri momentler yardımıyla incelenebilir. Ancak m^m tane farklı tasarım

While calculating the relative efficiencies, the necessary MSE values are found from (2.14),(2.17) and (2.18) equations for the uniform, exponential and weibull distributions, for the normal distributions the standard tables are used (2).

As it is seen in the table 3, for the normal, exponential and weibull distributions, (2,2,2) design is giving the greatest relative efficiencies. But design (2,2,2) is an unbiased only for the normal distribution. The best design for the uniform distribution is (1,2,3). It is also get the property of unbiasedness. As it is seen in the table 3, in the symmetrical distributions (uniform and normal) both (i,j,k) and (m+1-i,m+1-j,m+1-k) designs gives the same RE value. Furthermore, the worst design to estimate the mean is the (3,3,3) design. Note that, according to the distribution type, the RE values take different values in different designs.

In this study, all possible different RSS designs that could be used for estimating the population mean are examined under normal, uniform, exponential and weibull distributions. Firstly, the moment formulas of the order statistics that could be used to find the expected values and RE values of the estimators for the population mean are given for sample size m. For uniform, exponential and weibull distribution in Table 2 and 3 the expected values and MSE values are found by these formulas. So, the unbiased estimators for population means and most efficient designs among the possible different RSS designs are determined.

This work can also be extended for estimating the population variance. Moreover, the RE values would be investigated in order to estimate the population mean by the help of moments for the situation of m>3. Since there olacağından bu tasarımların tümünün incelenmesi oldukça karmaşıktır.

would be m^m different designs, investigating all of them would be quite complicated.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Al-Saleh M.F., "On the totality of ranked set sampling", ***Applied Mathematics and Computation***, Inpress , (2003)

2. Arnold, B., Balakrishnan,N. and Nagaraja,H.N., "A First Course in Order Statistics",***John Wiley***,New York. (1993)

3. Balakrishnan,N. and Cohen,C. "Order Statistics and Inference:Estimation Methods", ***Academic Press*** ,San Diego. (1991)

4. David,H.A. "Order Statistics", ***John Wiley***, New York., (1970)

5. Dell,D.R. and Clutter, J.L. " Ranked set sampling theory with order statistics background".***Biometrics***, 28, 545-555, (1972).

6. McIntyre, G.A. "A method of unbiased selective sampling, using ranked sets."***Australian Journal of Agricaltural Research***, 3, 385-390 (1952).

7. Patil,G.P.,Sinha, A.K. and Taillie,C. " Ranked set sampling. A Handbook of Statistics, vol.12, pp 167-200, (1994).

8. Sinha B.K., Sinha B.K. and Purkayasta , S., "On some aspects of ranked set sampling for estimation of normal and exponential parameters." ***Statistical Desicions***, 14, 223-240, (1996).

9. Stokes, L.S. "Estimation of variance using judgement ordered ranked set samples" ***Biometrics***, 36, 35-42, (1980).

10. Takahasi ,K. And Wakimoto, K. "On Unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering" ***Annals of The Institude of Statistical Mathematics***. 21,249-255 (1968).

Received/ Geliş Tarihi: 19.11.2003 Accepted/Kabul Tarihi: 20.12.2004