G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
18(2): 315-325 (2005) *18(2):315-325 (2005)*

ON SOME PROJECTIVE PLANES OF FINITE ORDER

(Review)

Atilla AKPINAR
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 16059, Bursa, TÜRKİYE
e-mail: aakpinar@uludag.edu.tr

ABSTRACT

In this work, construction methods of projective planes of order 2, 3, 4, 5, 7 and 8 are examined. Informations about the obtaining of known four different planes of order 9 and non-existence of a projective plane of order 10 which is obtained according to computer based calculations are collected.

Key Words: projective plane, finite projective plane, projective plane of order n

SONLU MERTEBELİ BAZI PROJEKTİF DÜZLEMLER ÜZERİNE

(Derleme)

ÖZET

Bu çalışmada 2, 3, 4, 5, 7, ve 8 mertebeli projektif düzlemlerin kuruluş metotları incelenmiş, bunların tekliklerine karşılık 9. mertebeden bilinen 4 farklı düzlemin elde edilişi ve bilgisayar araştırmalarına dayalı olarak 10. mertebeden bir projektif düzlemin yokluğu hakkındaki bilgiler derlenerek bir araya getirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: projektif düzlem, sonlu projektif düzlem, n. mertebeden projektif düzlem

1. GİRİŞ

N ve D elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olarak isimlendirilen ayrık iki cümle ve **o** N den D ye bir üzerinde olma bağıntısı iken (N , D , **o**) sıralı üçlüsüne bir geometrik yapı denir. Aşağıdaki üç aksiyomu sağlayan bir (N , D , **o**) geometrik yapısına bir projektif düzlem denir ve P ile gösterilir. Şayet, N sonlu ise P projektif düzlemine sonlu projektif düzlem adı verilir.

P1. Herhangi farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.
P2. Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.
P3. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

P = (N , D , **o**) projektif düzleminin bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğine P nin mertebesi denir. Sonlu bir projektif düzlemin mertebesi n ise toplam nokta ve doğrularının sayısı eşit ve n^2+n+1 dir. Projektif düzlemin en küçük mertebesi 2 dir ve bu projektif düzlem Fano düzlemidir. $n \geq 2$ özelliğindeki her tamsayı için mertebesi n olan projektif düzlemin varlığı açık değildir. Tarry mertebesi 6 olan 43 noktalı bir projektif düzlemin varolmadığını göstermiştir (1, 2). Bilinen sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri, p bir asal sayı ve r bir pozitif tamsayı olmak üzere p^r biçimindedir. Sonlu projektif düzlemlerin mertebelerinin yalnızca p^r biçimindeki sayılardan mı ibaret olduğu

1. INTRODUCTION

While N and D are two distinct sets whose elements are called as the points and the lines, respectively and **o** is the incidence relation between N and D; then the ordered triple (N , D , **o**) is called as geometrical structure. (N , D , **o**) satisfying the following three axioms is called a projective plane and denoted by P. If N is finite, projective plane P is called as finite projective plane.

P1. Any distinct two points are incident with just one line.
P2. Any two lines are incident with at least one point.
P3. There exists four points of which no three are collinear.

The order of P is defined to be the number of points on any line of projective plane P = (N , D , **o**) minus 1. If the order of a finite projective plane is n , total number of its points and lines is equal and n^2+n+1. The smallest order of projective plane is 2 and this projective plane is called as Fano plane. For any integer $n \geq 2$ the existence of projective plane with order n is not trival. Tarry (1, 2) showed that there is no projective plane of order 6 with 43 points. Orders of known finite projective planes are the form p^r for some prime p and positive integer r . So far, it hasn't been answered that is the orders of finite şimdiye kadar cevaplandırılamamıştır. Tahminler mertebesi p^r biçimde olmayan bir projektif düzlemin varolmayacağı yönündedir. Hangi mertebeden projektif düzlemlerin var olduğu ve varsa bunların geometrik yapısının nasıl olacağı halen cevaplandırılamamış önemli bir problemdir. Bu probleme kısmi olarak bir cevap Bruck-Ryser tarafından verilmiştir: "n, $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ ya da $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ özelliğinde bir tamsayı olsun. Şayet n negatif olmayan iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi n olan bir projektif düzlem yoktur." (3).

Bruck-Ryser teoremine göre 6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, ...gibi sonsuz çokluktaki sayıların hiçbiri bir projektif düzlemin mertebesi olamaz. Ayrıca 10, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 40, ... gibi sonsuz çokluktaki sayıların herhangi biri için mertebesi bu sayı olan projektif düzlemin var olup olmadığı halen bilinmemektedir ve Bruck-Ryser teoremi de bu durumda bir şey vermemektedir.

Bu makalede 10. mertebeye kadar bilinen projektif düzlemleri inceleyeceğiz. Nokta ve doğruları bir F cisminin elemanları ile homojen olarak koordinatlanan projektif düzlemler projektif düzlemlerin iyi bilinen örnekleridir ve bu düzlemler P_2F cisim düzlemleri olarak adlandırılırlar. F ve P_2F nin mertebeleri aynıdır. p bir asal sayı, r bir pozitif tamsayı olmak üzere p^r mertebeli $GF(p^r)$ Galois cisimlerinin varlığı p^r mertebeli cisim düzlemlerinin varlığını garanti etmektedir. Böylece $2,3,2^2=4,5,7,2^3=8,3^2=9$ mertebeli projektif düzlemlerin varolduğunu söylemek mümkündür.

Günümüze kadar yapılan araştırmalar ile 2, 3, 4, 5, 7 ve 8 mertebeli birer tek projektif düzlemin ve 9. mertebeden projektif düzlemin bir tek olmadığı gösterilmiş, hatta 9. mertebeden 4 farklı projektif düzlem bulunmuştur. 8. mertebeden projektif düzlemin tekliği özel bilgisayar programları ile ispatlanabilmiştir. Sonuç olarak, mertebesi 2, 3, 4, 5, 7 ve 8 olan projektif düzlemler cisim düzlemleridir, ayrıca 9. mertebeden projektif düzlemlerden bir tanesi öyledir.

Bu incelemede, çalışmamızı bu düzlemlerin sadece varlıkları ve teklikleri üzerine kısıtlıyoruz.

2. İKİ VE ÜÇ MERTEBELİ PROJEKTİF DÜZLEMLER

2 ve 3 mertebeli projektif düzlemler kuruluşları ve teklikleri diğer projektif düzlemler arasında en kolay olanlarıdır. Bu iki projektif düzlemin tekliğinin ispatı düzlemin elde ediliş yöntemine dayanır. İspatlar için (4) veya (5) e bakılabilir. Örnek olarak nokta ve doğruları aşağıdaki gibi isimlendirilen 2. mertebeden projektif düzlemin tekliğini inceleyelim.

Noktalar cümlesi, N=$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olsun. Bu takdirde 1 noktasından geçen doğrular $\{1,2,3\},\{1,4,5\}$ ve $\{1,6,7\}$ olarak kabul edilebilir. 2

projective planes only in the form p^r. Under the directions of conjectures are no finite projective planes of order n other $n = p^r$. The existence of projective planes for which order and if this projective plane exists, how to found geometrical structure are important problem and these haven't been answered yet. The answer of this problem is given partialy by Bruck-Ryser: "Let n be integer that $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ or $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$. If $n \neq a^2 + b^2$ for some non-negative integers a and b, there is no projective planes of order n." (3).

According to Bruck-Ryser theorem, none of infinitely many numbers such as 6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, ... can be order of projective planes. Besides, for any of finitely many numbers such as 10, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 40, ... it has not even been known that whether projective planes of these orders exist or not and also the Bruck-Ryser theorem doesn't give anything in this case.

In this paper, we examine the known projective planes up to order 10. The projective planes whose the points and the lines are coordinated homogenly by the elements of a field F are the well known examples of the projective planes and these planes are called as field planes IP_2F. The orders of F and IP_2F are equal. Existence of Galois field $GF(p^r)$ of order p^r where p is the prime and r is positive integer guarantees the existence of field plane of order p^r. Thus, the existence of projective planes of order $2,3,2^2=4,5,7,2^3=8,3^2=9$ is trival.

By done researches, so far it has been shown that the projective plane of order 2, 3, 4, 5, 7 and 8 are unique and projective plane of order 9 is not unique, also it has been found four distinct projective plane of order 9. Uniqueness of the projective planes of order 8 is proved by using some special computer programs. Consequently, projective planes of order 2, 3, 4, 5, 7 and 8 are field planes but only one of the projective planes of order 9 is.

In this examine; we restrict our study only the existence and uniqueness of the planes.

2. PROJECTIVE PLANES WITH ORDER 2 AND 3

The constructions and uniqueness of the projective planes of order 2 and 3 are the easiest amoung the other finite projective planes. Proof of the uniqueness of these two projective planes is based on the method of constructing the plane. These proofs can be seen from (4) or (5). For example, let us examine the uniqness of the projective plane of order 2 whose points and lines are called as the following.

Let N=$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ be set of the points. Then the lines passing the point 1 may be supposed as $\{1,2,3\},\{1,4,5\}$ and $\{1,6,7\}$. Let choose the other lines noktasından geçen diğer doğrular $\{2,4,7\},\{2,5,6\}$ olarak seçilsin. 3 ile 5 i birleştiren doğru $\{1,6,7\}$ doğrusunu P2 gereği kesmek zorundadır. P1 aksiyomu gereği bu doğru 1 ile 6 noktalarından geçemez. Bu yüzden doğru $\{3,5,7\}$ olmak zorundadır. 3 ile 4 ü birleştiren doğru $\{1,6,7\}$ doğrusunu 1 ile 7 noktalarında kesemeyeceğinden $\{3,4,6\}$ biçimindedir. Böylece, doğrular kümesi $D = \{ \{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,7\},\{2,5,6\},\{3,4,6\},\{3,5,7\} \}$ de olur.. Elde edilen yapının (Bak. Şekil 1) bir projektif düzlem olduğunu göstermek kolaydır. İnşa metodu gereği bu projektif düzlem bir tektir.

Benzer bir ispat metoduyla 3. mertebeden bir tek projektif düzlemin varolduğu görülür.

passing point 2 as $\{2,4,7\},\{2,5,6\}$. The line joining 3 and 5 has to intersect the lines $\{1,6,7\}$ because of P2. From axiom P1, this line doesn't pass through points 1 and 6. So, this line must be $\{3,5,7\}$. Since the line joining 3 and 4 doesn't intersect the line $\{1,6,7\}$ at points 1 and 7, this line must be $\{3,4,6\}$. Thus, set of the lines is $D = \{ \{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,7\},\{2,5,6\},\{3,4,6\},\{3,5,7\} \}$. It is easy to show that this obtained structure is a projective plane (See. Figure 1). Because of method of construction, this projective plane is a unique.

It is shown that there is a unique projective plane of order 3 by the same method of proof .

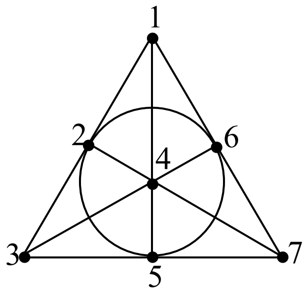

Figure1. Projective plane of order 2
Şekil 1. 2. mertebeden projektif düzlem

3. DÖRT VE BEŞ MERTEBELİ PROJEKTİF DÜZLEMLER

Mertebe büyüdükçe projektif düzlemi kurmak ve tekliğini doğrulamak zorlaşmaktadır. Bu yüzden değişik kavram ve yöntemlerin kullanılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu kavramlardan bazıları 4 ve 5 mertebeli projektif düzlemlerin tekliğinin ispatında kullanılan projektif düzlemlerin oval ve hiperovalleridir.

n. mertebeden bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan $(n+1)$ - nokta cümlesine bir oval, $(n+2)$ - nokta cümlesine bir hiperoval denir. 4. ve 5. mertebeden projektif düzlemlerin tekliğini göstermek için sırasıyla hiperoval ve ovallerden faydalanılmıştır. Dolayısıyla 4 ve 5 mertebelerden projektif düzlemlerin tekliğini göstermede kullandığımız özel nokta kümeleri aynıdır. Yani, herhangi üçü doğrudaş olmayan 6 noktadan oluşmuştur.

π, 4. mertebeden bir projektif düzlem ve N_1, N_2, N_3, N_4 de π de herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. π de P3 aksiyomu gereği bu özellikte 4 nokta vardır. $i \neq j \in \{1,2,3,4\}$ olmak üzere N_i ve N_j den geçen tek doğru $d_{i,j}$ olsun.

$$d_{1,2} \cap d_{3,4} = M_1,\ d_{1,3} \cap d_{2,4} = M_2,\ d_{1,4} \cap d_{2,3} = M_3$$

olarak isimlendirelim. Başlangıçta π nin 6 doğrusu ve 4 ü N, 3 ü ise M tipinde olan 7 noktası vardır. Bu konumda 6 doğrunun her birinin üzerinde 3 nokta bulunduğundan

3. PROJECTIVE PLANES WITH ORDER 4 AND 5

When the order increase, proof of uniqueness and the construction of projective planes get harder. So, it is necessary to use different concepts and methods in the constructions and proofs. Some of these concepts are oval and hyperoval of projective planes which are used the proof of uniquness of projective planes of order 4 and 5.

In a projective plane of order n, a set of $(n+1)$ - points with no three of them collinear is called oval and a set of $(n+2)$ - points with no three of them collinear is called hyperoval. Hyperovals and ovals are using to show the uniqueness of projective planes of order 4 and 5. Thus, sets of special point which are using to show uniqueness of projective planes of order 4 and 5 are same. That is, they consist of six points with no three of them collinear.

Let π be a projective plane of order 4 and N_1, N_2, N_3, N_4 be four points in π, no three of them collinear. There are four points in this property because of axiom P3. Let $d_{i,j}$ be the unique line through N_i and N_j, where $i \neq j \in \{1,2,3,4\}$. It is labelled as:

$$d_{1,2} \cap d_{3,4} = M_1,\ d_{1,3} \cap d_{2,4} = M_2,\ d_{1,4} \cap d_{2,3} = M_3$$

To start with in π, there are six lines and seven points which are 4 N's, 3 M's. Since each of these lines lies on 3 points, in this case, putting two distinct points on them, bunlar üzerinde 2 farklı nokta daha alınarak π ye 6.2 = 12 nokta daha ilave edilir. Böylece düzlemin toplam 19 noktası elde edilmiş olur. Düzlemin toplam nokta sayısı 21 olduğundan, iki noktanın daha belirlenmesi gerekir.

Burada M_1, M_2, M_3 doğrudaş olmak zorundadır. Aksi halde $i \neq j \in \{1,2,3\}$ olmak üzere M_iM_j doğrularının her biri, π nin bu 6 doğru üzerinde olmayan birer noktasını kapsar. Bu ise 3 yeni nokta daha verir. Böylece düzlemin toplam nokta sayısı 19 + 3 = 22 olur. Bu ise düzlemin toplam nokta sayısının 21 olması ile çelişkidir (Bak. Şekil 2).

totally 6.2 = 12 points are added to π . Thus, it is obtained totality of 19 points of the plane. As the plane has a totality of 21 points, it needs to be determined 2 points.

Points M_1, M_2, M_3 must be collinear. Otherwise, each of the lines M_iM_j where $i \neq j \in \{1,2,3\}$ contains a point of π not on the lines. This gives 3 new points. Thus, the plane has a totality of points 19 + 3 = 22. This is a contradiction by being totality of 21 points of the plane (See. Figure 2).

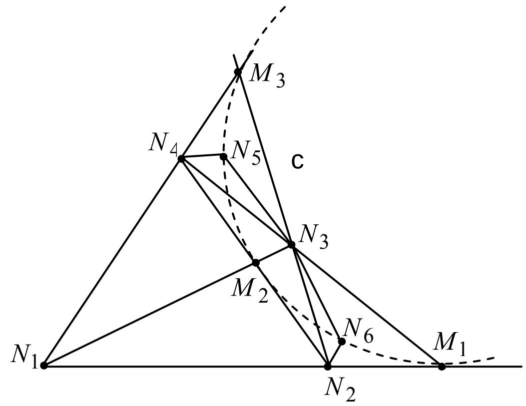

Figure 2. A basis for projective plane of order 4
Şekil 2. 4. mertebeben projektif düzlem için bir baz

M_1, M_2, M_3 den geçen doğru c olsun. c doğrusu; M_1 de N_1N_2 ve N_3N_4, M_2 de N_1N_3 ve N_2N_4, M_3 de N_1N_4 ve N_2N_3 doğrularını kestiğinden c nin geriye kalan N_5 ve N_6 noktaları bu doğruların hiçbiri üzerinde olamaz. Böylece π nin 19 + 2 = 21 noktası bulunmuş olur.

Problemimizi sonlandırmak için geriye kalan doğruları belirlemek yeterlidir. $\mathbf{H} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$ cümlesindeki herhangi üç nokta doğrudaş olmadığından **H** cümlesi π nin bir hiperovalidir. π nin her doğrusu **H** hiperovalini ya iki noktada keser ya da hiçbir noktada kesmez. Çünkü; N_5 veya N_6 dan geçen $N_5\,N_6$ dan farklı bir doğru geri kalan 6 doğruyu N_1, N_2, N_3, N_4 noktalarından farklı bir noktada keserse, bu doğru 7 noktalı bir doğru olur ki bu, π nin her doğrusunun 5 noktalı olması ile çelişir. **H** hiperovalinin geri kalan N_1, N_2, N_3, N_4 noktalarının herhangi birinden geçen bir doğrunun c doğrusunu bir noktada keseceği açıktır. Bu nokta; M_1, M_2 ya da M_3 noktalarından biri olamayacağına göre N_5 ya da N_6 olmak zorundadır. Dolayısıyla **H** hiperovalini tek noktada kesen bir doğru yoktur. Hiperoval tanımı gereğince **H** yi 2 den fazla noktada kesecek bir doğrunun olamayacağı aşikardır. Sonuç olarak π nin her doğrusu **H** hiperovalini ya iki noktada keser ya da hiçbir noktada kesmez.

Let c be the line through M_1, M_2, M_3. Since the line c intersects N_1N_2 and N_3N_4 in M_1 , N_1N_3 and N_2N_4 in M_2 , N_1N_4 and N_2N_3 in M_3 , remaining points N_5 and N_6 of c lie on no these lines. So, it is found 19 + 2 = 21 points of π .

Then it is sufficent to determine remaining lines to conclusing our problem. Since any three points of $H = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$ are not collinear, H is hyperoval of π . Each lines of π meets hyperoval H either 2 points or no points. Because, if a line is different from $N_5\,N_6$ and passing N_5 or N_6 intersects remaining 6 lines a point apart from N_1, N_2, N_3, N_4 . This line contains 7 points, but this is a contradiction with being 5 points on each lines in π . It is clear that a line passing any one of the remaining points of hyperoval H N_1, N_2, N_3, N_4 intersects the line c at one point. Since this point doesn't be M_1 , M_2 or M_3 , it must be N_5 or N_6 . So, there isn't a line which meets hyperoval H at one point. It is clear that no line intersects more than 2 points to H from hyperoval's define. Eventually, each lines of π meets hyperoval H either 2 or no points.

Bu durumda **H** yardımıyla π nin noktaları ve doğruları belirlenebilir. R, π nin **H** de olmayan bir noktası olsun. R üzerinde **H** ile kesişen üç doğru vardır. Bu doğrular 3 ikiliyle **H** nin bir parçalanışını (parçalanış, 6 elemanlı bir kümenin üç ikiliye ayrılmasıdır.) belirtir. Bu 3 ikiliyle **H** nin 6 noktasının 15 parçalanışlı 15 R noktası tanımlanabilir. Böylece düzlemin 6 + 15 = 21 noktası bulunmuş olur ki bu toplam nokta sayısıdır. Dolayısıyla noktalar cümlesi tamamlanmış olur.

Şimdi düzlemin geri kalan doğrularını belirlemek istiyoruz. π nin **H** yi iki noktada kesen $\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!.2!}=\frac{5.6}{2}=15$ tane doğrusu **H** nin içerdiği nokta ikilileriyle de belirtilebilir.

Geriye **H** yi hiçbir noktada kesmeyen 6 doğruyu belirlemek kalır. **H** nin 3 ikili şeklindeki her bir parçalanışı bir R noktası belirtir ve bu şekilde bulunan 5 nokta düzlemin yeni bir doğrusunu verir. Bu tür toplam 6 doğru vardır. Böyle her bir doğru **H** nin bir faktorizasyonu olarak adlandırılan 5 parçalanışın bir kümesi olarak da ifade edilebilir.

H nin tam olarak 6 faktorizasyonunun olduğunu görmek kolaydır. Bu aynı zamanda **H** yi hiçbir noktada kesmeyen 6 doğru ve bunların üzerindeki noktaları verir. **H** yi 2 noktada kesen 15 doğru ve bunların üzerindeki noktalar kolayca belirlenebilir.

Sonuç olarak π nin toplam 21 nokta ve 21 doğrusunu belirlemede her aşama tek türlü tamamlanabilir. O halde π bir tektir.

P, 5.mertebeden bir projektif düzlem olsun. P de $\frac{31.(31-1).(31-6).(31-15).(31-25).(31-30)}{6!}=3100$ oval vardır. Bunlardan bir tanesini O temsil etsin. P nin toplamı 31 olan doğrularının, 6 tanesi O ile birer ortak noktaya sahip olan teğet , 15 tanesi O ile ikişer ortak noktaya sahip olan kesen ve 10 tanesi O ile ortak noktası bulunmayan passant doğrusudur.

i çift olmak şartıyla P nin O da kapsanmayan 25 noktasından i teğet üzerinde olanlarının sayısı $n(i)$ olsun. Bu takdirde i üzerinden toplam alınarak $n(i)\,i=30$ ve $n(i)\frac{(i^2-i)}{2}=15$ olduğu görülür. Buradan $n(2)=15$ ve $\forall i>2$ için $n(i)=0$ dır. Böylece her bir teğet doğru çifti farklı noktalarda kesişir ve bu noktalara teğetsi nokta adı verilir. Bu tip noktalar T harfi ile gösterilsin. P nin geriye kalan $n(0)=25-15=10$ noktası hiçbir teğet üzerinde değildir. Dolayısıyla O nun 3 keseninin arakesitidir ve bir parçalanış tanımlar. Böyle noktaları belirtmek için de S harfi kullanılsın. SYN; S tipli noktalarla belirlenen 10 parçalanışın bir kümesi olsun.

Herhangi bir kesen, O üzerinde 2 teğeti keser ve geriye kalan 6 – 2 = 4 teğeti de 2 T tipli noktada keser. Böylece kesenler üzerinde geriye kalan 6 – 2 – 2 = 2 nokta S tipli noktadır. Buradan her çiftin SYN de iki kez ortaya çıktığı anlaşılır.

In this case, the points and lines of π are determinable with the help of H. Let R be a point of π not in H. There are three lines on R meeting H. These lines determine a partition (partition is a set which has 6 elements divided into three pairs) of H into three pairs. It can be defined the 15 points R with the 15 partition of the 6 points of H into three pairs. So, 6 + 15 = 21 points of the plane is found that these are total of points. Therefore, the set of points is completed.

Now, let we want to found remaining lines of the plane. $\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!.2!}=\frac{5.6}{2}=15$ lines of π which meet two points to H can be identified also the pairs which contaning H.

It remains to identify the 6 lines missing H. All partition of H into 3 pairs determines a point R and 5 point finding in this manner gives a new line of the plane. There are total 6 such lines. So each such line can be also explained as a set of 5 partitions, which is called factorisation of H.

It is easy to see that there is exactly 6 factorisations of H. It gives also six lines missing H and points on them. 15 lines meeting H in two points and all points on them are easily determined.

Finally, all steps for determining total 21 points and total 21 lines of π can be completed uniquely. Then, π is unique.

Let P be a projective plane of order 5. There are $\frac{31.(31-1).(31-6).(31-15).(31-25).(31-30)}{6!}=3100$ ovals in P. Let O represents one of these ovals. Of the 31 lines of P; 6 are tangent which meet O in one point, 15 are secant which meet O in two points and 10 are passant which disjoint from O.

If i is even, 25 points of P not in O, let $n(i)$ be number of the points of P not in O lying on i tangents. Then it is shown that $\sum_i n(i)\,i=30$ and $\sum_i n(i)\frac{(i^2-i)}{2}=15$. It follows that $n(2)=15$ and $n(i)=0$ for $\forall i>2$. Thus each pair of tangents meets in different points and these points are called as a tangential point. These type of points are doneted by T. The remaining $n(0)=25-15=10$ points of P lies on no tangent are the intersection of three secants to O and this is give a syntheme (a partition). Let we denote these points by S. Let SYN be the set of 10 synthemes determined by the S point.

Any secant meets two tangents on O and the remaining 6 – 2 = 4 tangents in two T points. Thus remaining 6 – 2 – 2 = 2 points on the secants are S points. It follows that each pair occurs twice in the SYN.

Her bir T tipli noktadan geçen 6 doğrunun 2 si teğet, 2 si kesen ve kalan 2 si passant doğrusudur.

3 den daha fazla T tipli nokta kapsayan bir passant doğrusu bir teğet doğrusu ile çakışacağından hiçbir passant doğrusu 3 den fazla T tipli nokta kapsamaz. Böylece 10 passant doğrusunun her biri tam olarak 3 T tipli nokta kapsar ve bu yüzden geri kalan 3 noktası S tipindendir.

T tipli noktalar O daki çiftlere karşılık geldiğinden her bir passant doğrusu kendisinin 3 ayrık çifti olan T tipli noktalar ile belirlenir. Burada 15 parçalanış ve her birine karşılık gelen 3 farklı T tipli nokta vardır. Böyle elde edilen 10 parçalanışın cümlesi SYN^I olsun. $SYN=SYN^I$ dir. Gerçektende (AB)(CD)(EF), SYN de olmayan bir parçalanış ise A ve B den geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli nokta, CD ve EF kesenleri üzerinde bulunur. Hesaplamalar yardımıyla bu durumun C ve D içinde geçerli olduğu görülebilir. Böylece A ve B den geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli nokta ile C ve D den geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli noktayı birleştiren doğru E ve F den geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli noktayı kapsamayan EF kesenidir. Bu yüzden (AB)(CD)(EF), SYN^I de değildir. Dolayısıyla SYN^I, SYN de kapsanır ve aynı sayıda elemana sahip olduğundan $SYN=SYN^I$ dir.

Bu ise "AB, CD, EF kesenlerinin bir noktada kesişmesi için gerek ve yeter şart bunlara karşılık gelen T tipli 3 noktanın doğrudaş olmasıdır." sonucunu verir.

P nin yapısını belirlemeyi tamamlamak için passant doğruları üzerindeki noktaları hesaplamak gereklidir. Bir l passant doğrusu üzerindeki bir T tipli nokta iki kesenin arakesiti olduğundan böyle 3 nokta 3.2 = 6 kesen ile l nin arakesitidir. Passant doğrusu, geriye kalan 15–6=9 keseni S tipli 3 noktada keser.

Of the 6 lines through each T point, 2 are tangent, 2 are secant and so the remaining 2 are passant.

No passant line contains more than three T points, because any passant line which has more than three T points lies on a common tangent. Thus each of the 10 passant lines contains exactly three T points and the remaining 3 points are S-type points.

Since the T-type points corespond to the pairs in O, each passant lines is determined by T points which are three distinct pairs of O. In this case, there are 15 synthemes each of them correspond 3 different T-type points. Let SYN^I be set of 10 synthemes obtaining in that way. SYN is equal to SYN^I. If (AB)(CD)(EF) syntheme is not in SYN, T-type point which is the intersection of tangent lines passing A and B lies on the secants CD and EF. By the calculations it can be seen that similar argument is valid for the point C and D. Thus the line joining T-type point which is the intersection of tangent lines passing A and B and T-type point which is the intersection of tangent lines passing C and D is secant EF which doesn't contain T-type point which is the intersection of tangent lines passing E and F. So (AB)(CD)(EF) is not in SYN^I. So, SYN^I is contained in SYN. Since they have same element, SYN is equal to SYN^I.

It gives to the corollary "AB, CD, EF secants are concurrent if and only if 3 T-type points coresponding them are collinear."

For the completing to determining of structure of P, It needs to calculate the total number of the points on passant lines. Since a T point on passant l is intersection of two secants, such 3 points lies on 3.2 = 6 secants and l. Passant line intersects remaining 15–6=9 secant in 3 S points.

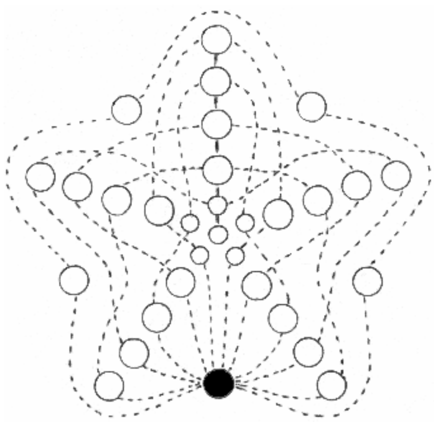

Figure 3. A configuration of projective plane of order 5
Şekil 3. 5. mertebeden projektif düzlemin bir konfigürasyonu

Sonuç olarak P, 6 elemanlı bir O kümesi üzerinde bir totalin seçimiyle tek şekilde bellidir. 6 elemanlı bir küme üzerinde var olan toplam 6 total birbirine denk olduğundan P tektir.

Şekil 3 ile 5. mertebeden bir projektif düzlem temsil edilmektedir. Şekilde düzlemin toplam 31 noktası ve içi

Finally, P is determined uniquely by choosing of a "total" on set O with 6 elements. Since all 6 total, existing on set consisting 6-element are equivalent, P is unique.

Figure 3 is represents to the projective plane of order 5. In this figure, it is shown 31 points of the plane and 6 lines koyu olarak boyanmış noktasından geçen 6 doğrusu görülmektedir. Kesik çizgiler sabit kalmak şartıyla şeklin her 72° döndürülmesiyle, her seferinde düzlemin farklı 6 doğrusu elde edilir. Bu şekilde toplam olarak 30 farklı doğru elde edilir. Düzlemin son doğrusu ise şeklin en dışındaki 5 nokta ile ortasındaki noktadan oluşur. Şekil 3 ün renkli haline ve bununla ilgili açıklamalara (6) dan ulaşılabilir.

4. mertebeden projektif düzlemin tekliği için (7) ya da (8) ve 5. mertebeden projektif düzlemin tekliği için (9) a bakılabilir.

6. mertebeden projektif düzlemin yokluğu G.Tarry tarafından 1901 de gösterilmiştir ve Bruck-Ryser Teoreminin sonuçları da 6.mertebeden projektif düzlemin yokluğunu özel bir durum olarak kapsamaktadır (3).

4. YEDİNCİ MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEM

W.A.Pierce; 57 noktalı bir projektif düzlemde herhangi bir Fano konfigürasyonunun bulunamayacağını gösterdi (10) ve Marshall Hall, JR. bu sonuçtan hareketle 57 noktalı herhangi bir projektif düzlemin Dezargsel olduğunu, dolayısıyla tek olduğunu ispatladı (11, 12). Bu ispat ta, 2. ve 3. mertebeden projektif düzlemlerde olduğu gibi yine düzlemin elde ediliş yöntemine dayanmaktadır. Her biri 4 er nokta kapsayan 9 doğrulu bir konfigürasyon baz alınarak 7.mertebeden projektif düzlemin mümkün doğru tipleri belirlenmiştir. Bu doğru tiplerinin sayısı ve belli bir noktadan geçen doğru tiplerinin sayısı ile ilgili bulunan bağıntılardan projektif düzleme genişletilebilecek 2 durum tespit edilmiştir. Bu durumlardan biri Fano konfigürasyonu kapsadığından diğer durum göz önüne alınmıştır ve bu durum Moufang ın Teorem D_8 in konfigürasyonudur ve meydana gelen düzlem Dezargseldir (13).

5.SEKİZİNCİ MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEM

Teorik araştırmalarla 8 ve daha büyük mertebeden var olan projektif düzlemleri kurmak ve tekliklerini kanıtlamak zorlaşmaktadır. Bu yüzden araştırmalar bilgisayar destekli ya da tamamen bilgisayara dayalı olarak yapılmıştır. Ancak bu aşamada da bilgisayar araştırmaları bir noktaya kadar cevap verebilmektedir.

8. mertebeden projektif düzlemin tekliği, 7. mertebeden latin karelere dayanır. Hesapların teorik kaynağı ise “n. mertebeden bir afin düzlemin var olması için gerek ve yeter şart n. mertebeden birbiriyle ortogonal olan $n-1$ elemanlı bir latin kare cümlesinin varolmasıdır.” teoremine dayanmaktadır. “n. mertebeden bir afin düzlemin varlığı ile n. mertebeden birbiriyle ortogonal $n-1$ elemanlı bir latin kare cümlesi arasındaki karşılık gelmenin ilk ispatı (14) e dayanır. Bu teoremin ispatı için (15) ve (16) ya bakılabilir.

Norton, 7. mertebeden 146 tane latin karenin bir listesini verdi (17). Sade bu listede bir eksik buldu ve eklenilen değişikliği kapsayan listenin tam olduğunu gösterdi (18).

Toplam sayısı 147 olan bu 7. mertebeden latin kareler 8. mertebeden düzlem araştırmasının başlangıç noktasıdır.

of the plane passing the point filled in dark. If figure by every 72°s rotating of this figure with leaving fix all of trunced lines, distinct 6 lines of the plane are obtained. Using this method totally 30 distinct lines handled. The last line of the plane is consisting 5 points of outside of the figure and the center point of the figure. Detailed explanations about figure 3 and coloured figure can be found in (6).

The uniqueness of the projective plane of order 4 and order 5 can be found (7) or (8) and (9), respectively.

Non-existing of the projective plane of order 6 was shown by Tarry in 1901 and it can be also seen from the corollaries of the Bruck-Ryser theorem in particular case (3).

4. THE PROJECTIVE PLANE OF ORDER 7

W.A.Pierce showed that any Fano configuration is not contained in a projective plane with 57 points (10) and using this fact Marshall Hall, JR. proved that any projective plane with 57 points is Desarguesian and hence unigue (11,12). Also, his proof is based on the method of constructing the plane like as in projective planes of order 3 and 4. Taking a configuration with 9 lines which have 4 points on each as a basis, possible line types of projective plane of order 7 are determined. Thanks to the number of these line types and the relations about the number of line types passing a fixed point, it is determined that two cases which will be extended to projective plane. Since the one of these structures contains Fano configuration, other case is considered and this is the configuration of Moufang’s Theorem D_8 (“A-Netz”) and the generated plane will be Desarguesian (13).

5. THE PROJECTIVE PLANE OF ORDER 8

It is getting hard to proof of uniqueness and to construct, existing projective planes of order 8 and more by theorical arguments. Hence, researchs are done by using computer partially or completely. However, computer researches can be given partially answer, in this stage.

Uniqueness of the projective plane of order 8 based on Latin squares of order 7. Teorical source of calculations based on the theorem “A set of $n-1$ mutually orthogonal Latin squares of order n exists if and only if an affine plane of order n exists” First proff of the corresponding between a set of $n-1$ mutually orthogonal Latin squares of order n and existence of an affine plane of order n is based on (14). For proof of this theorem it can be seen to (15) and (16).

Norton gave a list of 146 Latin squares of order 7 (17). Sade found an omission in this list and showed that new list with this addition is complete (18).

These total 147 Latin squares of order 7 are the starting point of the investigation of plane of order 8. The

8. mertebeden bir projektif düzlemin üçgen ve dörtgen sayıları üzerinden yapılan bir inceleme ile 147 latin kareden sadece 100 tanesinin kullanılmasının yeterli olacağı görülmüştür (19).

Bundan sonra yapılan iş latin karelerin tam düzleme genişletilmesidir. $[\infty]$ doğrusunun ve sonsuz noktalarının eklenmesiyle bir projektif düzleme genişletme basit olduğundan işlemlerin kolaylığı için 8. mertebeden bir afin düzlem incelenecektir.

Teorik birkaç işlemden sonra bilgisayar yardımıyla yapılan düzleme genişletilmede bilgisayara girdi olarak alınan 7. mertebeden 100 latin kareden sadece bir tanesi tam düzleme genişletilmiştir. Ancak bu kareyi düzleme genişleten 4 farklı yoldan ikisi latin kareyi bir afin düzleme tamamlayamazken diğer ikisi benzer tamamlamaya yol açmıştır yani elde edilen düzlemler izomorf olmaktadır. Bu yüzden genişletme bir tektir ve elde edilen geometrik yapı 8. mertebeden afin düzlemdir. Dolayısıyla 8. mertebeden bir tek projektif düzlem vardır. Daha ayrıntılı bilgi için (19) a başvurulabilir.

6. DOKUZUNCU MERTEBEDEN 4 FARKLI PROJEKTİF DÜZLEM

9. mertebeden dört farklı projektif düzlem bilinmektedir. Bunlar Dezarg düzlemi, Sol yaklaşık cisim düzlemi, Sağ yaklaşık cisim düzlemi ve Hughes düzlemidir. Aşağıda bu düzlemlerin cebirsel yapıları üzerinde kısaca durulacaktır.

$S = \{0,1,2,a,b,c,d,e,f\}$ olsun ve S üzerindeki $\oplus$ işlemi $F = GF(9)$ cisminin toplama işlemi olarak alınsın.Burada $b = a+1, c = a+2, d = a+a, e = d+1, f = d+2$ ve $1+2 = a+d = 0$ dır. S üzerindeki $\otimes$ işlemi aşağıda verilen Çizelge 1. deki gibi tanımlansın:

investigation on the number of triangle and quadrilateral of projective plane with order 8 is shown that only 100 of the 147 Latin squares are sufficent for this investigation (19).

The work which is done after this is extenting the Latin squares to plane. Since the extention to projective plane by adding infinite points and $[\infty]$ line is easy, an affine plane of order 8 will be investigated for shorth-cutting of proceses.

Only one of 100 Latin squares of order 7 taking as the entry to computer have been extending the plane by computer after some theorical operations. But, while two of 4 distinct ways of founding extented affine plane from the Latin square is not working, the other ways lead to same completions, that is, resulting planes are isomorphic. So, the extention is unique and the obtained geometrical structure is affine plane of order 8. Therefore, there exists the unique projective plane of order 8. It can be applied to (19) for more detail information about this.

6. FOUR DISTINCT PROJECTIVE PLANE OF ORDER 9

Four distinct projective plane of order 9 are known. These are Desarguesian plane, the left nearfield plane, the right nearfield plane and Hughes plane. We will give some briefly information about on algebraic structures of these planes.

Let $S = \{0,1,2,a,b,c,d,e,f\}$ and operation $\oplus$ on S be as the additional operation in field $F = GF(9)$ when $b = a+1, c = a+2, d = a+a, e = d+1, f = d+2$ ve $1+2 = a+d = 0$. Let operation $\otimes$ on S define as in Table 1. :

$\otimes$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	2	e	b	1	f	c
b	0	b	f	c	2	d	e	a	1
c	0	c	e	f	a	2	b	1	d
d	0	d	a	1	c	f	2	b	e
e	0	e	c	b	d	1	f	2	a
f	0	f	b	e	1	a	c	d	2

Table 1. Operation $\otimes$ on S

Çizelge 1. S üzerinde $\otimes$ işlemi

(S, $\oplus$, $\otimes$) bir sağ yaklaşık cisimdir. Bu yaklaşık cisim $S(9)$ ile gösterilir. Cebirsel yapısı 9. mertebeden bir

Then (S, $\oplus$, $\otimes$) is the right nearfield plane. This nearfield is doneted by $S(9)$. Projective plane whose sağ yaklaşık cisim olan projektif düzlem aşağıdaki gibi inşaa edilir:

$N = \{[x,y,1]: x,y \in S\} \cup \{[1,x,0]: x \in S\} \cup \{[0,1,0]\}$ noktalar cümlesi,

$D = \{\langle m,1,k\rangle : m,k \in S\} \cup \{\langle 1,0,k\rangle : k \in S\} \cup \{\langle 0,01\rangle\}$ doğrular cümlesi ve

$\circ : [x,y,z] \circ \langle m,n,k\rangle \Leftrightarrow xm + yn + zk = 0$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $IP = (N, D, \circ)$ düzleminin bir projektif düzlem olduğu bilinmektedir (15).

S (9) yardımıyla kurulan 9. mertebeden projektif düzlem $\Pi_S(9)$ ile gösterilir.

Her $x, y \in S$ (9) için $*$ işlemi $x * y = y \otimes x$ olarak tanımlanırsa (S , $\oplus$, $*$) bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim üzerine kurulan $\Pi_S(9)$ un duali olup farklı bir projektif düzlemdir (15). Bu projektif düzlem $\Pi_S^d(9)$ ile gösterilir.

9. mertebeden diğer bir düzlem ise düzlemsel halkası lineer olmayan, bu yüzden $\Pi_S(9)$ ve $\Pi_S^d(9)$ projektif düzlemlerinden farklı olan $\Pi_H(9)$ ile gösterilen Hughes düzlemidir.

p tek asal sayı ve h pozitif tamsayı olmak üzere $q = p^h$ olsun. q^2 mertebeli bir sağ yaklaşık cismin varlığı ve bu yaklaşık cisim üzerine kurulan Hughes düzlemlerinin elde edilişi için (20) ye bakılabilir.

$q = 3$ için en küçük Hughes düzleminin kuruluşu ve dualinin kendisi olduğu (15) de verilmiştir.

Bu şekilde kurulan IP_2F cisim düzlemi, $\Pi_S(9)$, $\Pi_S^d(9)$ ve $\Pi_H(9)$ düzlemleri 9. mertebeden bilinen projektif düzlemlerin tamamını oluşturmaktadır. Bu farklı 4 projektif düzlem ile ilgili ayrıntılı bilgi (21) de verilmiştir..

9. mertebeden projektif düzlemler üzerine bilgisayarla Lam tarafından yapılan bir araştırmada 8. mertebeden 283.657 izomorf olmayan latin kare üzerinde çalışılarak 9. mertebeden genel bir projektif düzlemin yapısı incelenmiştir. Bilgisayarda meydana gelebilecek bir hatanın veya bilinmeyen bir donanım hatasının araştırmanın bir dalının kaybedilmesine yol açabileceğine ve bunun yeni bir düzlem oluşturabilecek tek dal olabilmesi olasılığına dikkat çekilmiştir. Bu da bilgisayar programıyla elde edilen sonuçlar için kesin kararı engellemektedir. Teorik araştırmalarla elde edilenler ile bilgisayar sonuçları uyuştuğundan bilgisayar programının doğru olduğu ve 9. mertebeden başka bir projektif düzlemin varolmadığı iddia edilmektedir. Daha ayrıntılı bilgi için (22) ye bakılabilir.

algebraic structure is the right nearfield plane of order 9 is constructed in following manner:

Set of the points;
$N = \{[x,y,1]: x,y \in S\} \cup \{[1,x,0]: x \in S\} \cup \{[0,1,0]\}$,

Set of the lines;
$D = \{\langle m,1,k\rangle : m,k \in S\} \cup \{\langle 1,0,k\rangle : k \in S\} \cup \{\langle 0,01\rangle\}$
and

Incidence relation,
$\circ : [x,y,z] \circ \langle m,n,k\rangle \Leftrightarrow xm + yn + zk = 0$
Then it is known that $IP = (N, D, \circ)$ is projective plane (15).

Projective plane of order 9 constructing by S (9) is denoted by $\Pi_S(9)$.

If operation $*$ is defined as $x * y = y \otimes x$ for all $x, y \in S$ (9), (S , $\oplus$, $*$) is the left nearfield. The plane constructing over this nearfield is the dual plane of $\Pi_S(9)$ and it is, not isomorphic to $\Pi_S(9)$ (15). This plane is doneted by $\Pi_S^d(9)$.

Hughes planes which is represented by $\Pi_H(9)$ is the other plane of order 9 which has nonlinear ternary ring and hence different from projective planes $\Pi_S(9)$ and $\Pi_S^d(9)$.

Let $q = p^h$, where p is odd prime and h is a positive integer. The existence of the right nearfield of order q^2 and the construction methods of the Hughes planes over this nearfield can be seen from (20).

The construction of the smallest Hughes plane for $q = 3$ and self duality of this plane is given in (15).

IP_2F , $\Pi_S(9)$, $\Pi_S^d(9)$ and $\Pi_H(9)$ constructing in these manner are consist of all known projective planes of order 9. In (21) more detailed information about these distinct four planes is given.

Getting in the search which is done by Lam by computer on projective planes of order 9 is worked on 283.657 non-isomorphic Latin squares, it is note that it can lead the lost a branch of the search because of unknown hardware error or occuring a error in computer; and that there is a possibility that this is a only branch where new plane occurs. Thus, it prevents to definite decision for computer programs. Because of the agreement of the computer results with those obtained by theorical means it is claimed that the computer program is correct and that there is no another projective plane order 9. It can be seen to (22) for more detail information.

10. mertebeden projektif düzlemin var olup olmadığı hakkında Bruck-Ryser Teoremi bir şey vermemektedir. Aynı zamanda 10, Bruck-Ryser Teoreminin bir projektif düzlemin mertebesi olup olamayacağı hakkında bir şey söylemediği en küçük sayıdır. Bu yüzden araştırılmaya değer önemli bir düzlemdir. Bilgisayar yardımıyla 10. mertebeden projektif düzlemin var olup olmadığının incelenmesine dair birçok araştırma vardır. Bu araştırmalara bir örnek olarak (23) e bakılabilir. Bugüne kadar 10. mertebeden bir projektif düzlem bulunamamıştır ve Lam 15 yıl süren bilgisayar araştırmalarının hikayesini anlattığı (23) deki makalesinde böyle bir düzlemin bulunmadığı sonucuna varmıştır.

9. ve 10. mertebeden projektif düzlemler için bilgisayar sonuçlarını doğrulayacak teorik ispatlar verilememiştir.

7. SONUÇ

Projektif düzlemin mertebesi büyüdükçe teorik olarak elle yapılan işlemler zorlaştığından yapılan araştırmalarda bilgisayar kullanılması zorunlu hale gelmiştir. Bu aşamada ise bir projektif düzlemin bilgisayarda nasıl incelenebileceği ya da bir projektif düzlemin yapısının bilgisayar dilinde nasıl ifade edilebileceği sorusu ile karşı karşıya kalınmıştır. Bu noktada en çok bir projektif düzleme genişletilebilen latin karelerden faydalanılmıştır. Ancak, bu araştırmalardan da elde edilen yeni bir bilgi yoktur denilebilir.

The Bruck-Ryser theorem doesn't give anything about the existence or nonexistence of the projective plane of order 10. Also, 10 is the smallest number which doesn't say anything about whether order of projective plane is or not by using the Bruck-Ryser theorem. Therefore, it is important plane which is worthy to be search. There are many searches by computer about whether projective planes exist or not with order 10. It can be seen to (23) that as an example to these searches. So far, a projective plane of order 10 hasn't been found and Lam deduced that so plane doesn't find in his article which says the story of his computer search during 15 years.

Theorical proofs which will testify to the results of computer for projective planes of order 9 and 10 are not given.

7. CONCLUSION

As order of projective plane is more; because it forces to do teoritically the operations which are done by hand, it has been obligatory using computer in doing searches. In this stage, it has been faced to questions about in the computer how to explain a projective plane or in the computer language how to examine structure of a projective plane. In this point, it is made the most of Latin squares which is extended to projective plane. But, it is said that there isn't new information obtaining from these searches.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Tarry, G., Le Probleme des 36 Officiers, Compte Rendu de I'Association Française pour I'Avancement de Science Naturel, 1: 122-123 (1900).
2. Tarry, G., Le Probleme des 36 Officiers, Compte Rendu de I'Association Française pour I'Avancement de Science Naturel, 2: 170-203 (1901).
3. Bruck, R.H., Ryser H.J., "The Non-existence of Certain Finite Projective Planes", ***Canadian Journal of Math***., 1: 88-93 (1949).
4. Batten, L.M., Combinatorics of Finite Geometries. ***Cambridge University Press***, 43-44 (1986).
5. Kaya, R., Projektif Geometri. ***Anadolu Üniversitesi Yayınları***. No:551. Eskişehir, 112-114 (1992).
6. Internet: Projective Plane of order 5. http://www.maths.monash.edu.au/~bpolster/pg5.html. (2004).
7. Beutelspacher, A., 21-6=15: A Connection Between Two Distinguished Geometries, Fachbereich Mathematik der Universitat, Saarstr. 21, D-6500 Mainz, Federal Republic of Germany, 29-40 (1986).
8. İnternet: Projective Plane of order 4. http://www.win.tue.nl/math/dw/pp/hansc/mathieu/node2.html. (2000).
9. Elkies, N., "Proof the Uniqueness of the Projective Plane of Order 5", elkies@MATH.HARVARD.EDU. (2000).
10. Pierce, W.A., "The Impossibility of Fano's Configuration in a Projective Plane with Eight Points Per Line", ***Am. Math. Soc. Proc.*** ,4: 908-912 (1953).
11. Hall, M. JR., "Uniqueness of the Projective Plane with 57 Points", ***Am. Math. Soc. Proc.*** , 4: 912-916 (1953).
12. Hall, M. JR., Correction to Uniqueness of the Projective Plane with 57 Points. ***Am. Math. Soc. Proc***. , 5: 994-997 (1954).

13. Moufang, R., „Zur Struktur der Projektiven Geometrie der Ebene“, ***Math. Ann***. , 105: 536-601 (1931).

14. Bose, R.C., “On the application of the properties of Galois fields to the construction of hyper-Graeco-Latin squares”, ***Sankhya*** 3: 323-338 (1938).

15. Stevenson, F. W., Projective Planes. ***W. H. Freeman and Company***, San Francisco, 416s (1972).

16. Laywine, C.F., Mullen, G.L., Discrete Mathematics Using Latin Squares, ***John Wiley&Sons***., NewYork. 137-140 (1998).

17. Norton, H.W., “The 7×7 Squares”, *Ann. Eugenics*, 9: 269-307 (1939).

18. Sade, A., “An omission in Norton’s list of 7×7 Squares”, *Annals Math. Statistics*, 22: 306-307 (1951).

19. Hall, M. JR., J.D. Swıft and R.J. Walker, Uniqueness of the Projective Plane of Order Eight. Math. Tables Aids. Comput. , 10: 186-194 (1956).

20. Hughes, D.R., Piper, F.C., Projective Planes. ***Springer – Verlag,*** New York Inc, 196-201 (1973).

21. Room, T.G., Kırkpatrıck, P.B., Miniquaternion Geometry, *Cambridge University Press*, 176s (1971).

22. Lam, C.W.H., Kolesova, G., Thiel, L. A., “Computer Search for Finite Projective Planes of Order 9”, *Discrete Mathematics*, 92: 187-195 (1991).

23. Lam, C.W.H., The Search for a Finite Projective Planes of Order 10. Computer Science Department, ***Concordia University***, American Math. Monthly, 305-318 (1991).

Received/ Geliş Tarihi: 01.03.2004 Accepted/Kabul Tarihi: 04.10.2004