Anatolian Journal of Computer Science
Volume:4 No:2 2019 © Anatolian Science
pp:68-73 ISSN:2548-1304

Karcı ve Shannon Entropilerin Karşılaştırılması

Ali Karcı, Feyza Bilgiç
İnönü Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Malatya, Turkey ali.karci@inonu.edu.tr
Received: Dec.23, 2018
Accepted: May 3, 2019
Published: Dec.1, 2019

ÖZET : Entropi, fiziksel sistemlerin düzensizliğini, dijital sistemler de ise, anlam verilememiş bilgi miktarını vermektedir. Bu amaçla Shannon tarafından dijital veriler için entropi tanımı yapılmıştır. Kesir dereceli türev kavramı kullanılarak entropi tanımı ise Karcı tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Karcı ve Shannon entropi tanımlarının farklı olasılık ortamlarında vermiş oldukları sonuçların karşılaştırmaları yapılmıştır.

Comparison Of Karcı And Shannon Entropies

ABSTRACT : Entropy gives the irregularity of physical systems and also gives the amount of information that cannot be understood in digital systems. For this purpose, the definition of entropy was made by Shannon for digital data. The definition of entropy using the concept of fractional order derivative was made by Karcı. In this study, the results of Karcı and Shannon entropy definitions in different probability environments were compared.

1.GİRİŞ

Entropi, fizikte bir sistemin mekanik işe çevrilemeyecek termal enerjisini temsil eden termodinamik terimi olarak kabul edilmektedir. Çoğunlukla bir sistemdeki rastgelelik ve düzensizlik olarak tanımlanır. Entropi, birim sıcaklık başına sistemin termal enerjisinin toplamının bir ölçüsüdür ve herhangi bir işlem yapamaz, çünkü entropi bir bozukluk ölçüsüdür ve bir işlemin olması düzene bağlıdır. Başka bir deyişle, entropi, fiziksel sistemlerin mikro yapısında bir yamama ya da bozukluğun ölçütüdür.
21. yüzyıl, bilgi ve bilginin yönetimi yüzyılıdır. Bilgi ve yönetimi bazı değişimlerin gösterimini sağlar, bununla; bununla birlikte, bilgi yönetimi tekniklerinin çoğu entropiye dayanmaktadır. Entropi, fiziksel (dijital) sistemlerde belirsizlik (veya bilgi) ölçüsüdür. Bu durum nedeniyle, Shannon, Tsallis, Renyi, vb. gibi tanımların tanımlanmasında pek çok yöntem vardır [1–3]. Shannon, rastgele değişkenlerden yararlandı ve entropiyi [1] tanımlamak için olasılıklar kullandı.

2. KULLANILAN YÖNTEMLER

Shannon kavramı ilk kez Claude Elwood Shannon tarafından 1948 yılında "İletişimdeki Matematik" adlı makale ile duyurulmuştur. Shannon entropisi bilgi analizinde kullanılan önemli bir ölçüm yöntemidir. Rastgele dağılımlı veride bulunan belirsizliği ölçmeye yarar.
Bir dizge veri içindeki harflerin yüzdelik dağılımları üzerinde entropi tanımı (Shannon tanımı)

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) ln(P(x_i)) \quad (1)$$

denklemi ile bulunur.
Entropi kavramı Karcı tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır, çünkü türev tanımı da değişmektedir ve kesir dereceli türev kavramı kullanılmaktadır.

Tanım (Kesir Dereceli Türev)[4,5,6,7,8]*: f(x):R→R bir fonksiyon/bağıntı olmak üzere, α∈R ve kesir dereceli türev aşağıdaki gibi verilebilir.*

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}$$

Bu tanımda h →0 değeri yerine yazılınca belirsiz limit elde edilir, bundan dolayı L'Hospital metodu uygulandığında:

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to 0} L\left(\frac{f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{d\left(f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)\right)}{dh}}{\dfrac{d((x+h)^{\alpha} - x^{\alpha})}{dh}} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} f^{'}(x)$$

denklemi elde edilir ve elde edilen bu türeve Karcı entropi denilmektedir, ${}^{\partial}_{\alpha}Kf(x)$ sembolü ile gösterilmektedir.
Kesir dereceli türev ile entropi tanımı elde etmek için

$$f(t) = \sum_{i} p_i^{-t}$$

fonksiyonun kesir dereceli türevi alınmıştır. Türev sonucunda elde edilen bağıntı

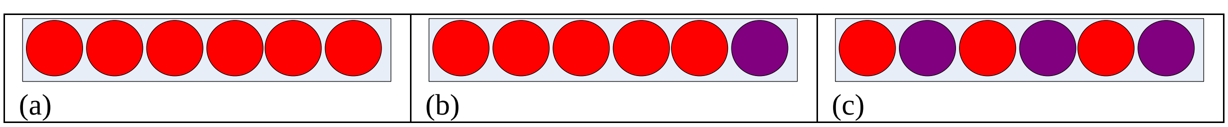
$$E = \left|\frac{d^{(\alpha)} f(t)}{dt}\right| = \left|\frac{d^{(\alpha)}}{dt} \sum_{i=1}^{n} p^{-t}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{p^{-t}}{t}\right)^{\alpha-1} (-1) p^{-1} \ln p\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|(-p)^{\alpha-1} (-p) \ln p\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|(-p)^{\alpha} \ln p\right|.$$

şeklindedir [9]. Bu denklemde α=1 olarak verildiğinde Shannon entropi denklemi elde edilir. Bu durumda farklı α değerleri için farklı entropi denklemleri elde edilir ve Karcı entropi esasında bir entropi denklemler kümesidir. Bu kümenin bir elemanı da Shannon entropi tanımıdır.

3. KARCI VE SHANNON ENTROPİ UYGULAMALARI

Her iki yöntem örnekler üzerinde birbiriyle karşılaştırılacaklardır. Karşılaştırma amacı bilgi ayrımının veya kazancının en iyi olduğu durum α=1 durumundaki Karcı entropi (Shannon entropi) durumu mudur yoksa daha iyi olduğu bir durum var mıdır sorgulaması yapılacaktır. Varlığı bilinen bilgi ile entropi birbirine zıt kavramlardır. Şekil 1(a)'da çekilecek topun kırmızı olma olasılığı 1 olduğundan çekilecek topun kırmızı olacağı bilinmektedir (yüksek bilgi seviyesi) ve bütün toplar aynı olduğundan entropi değeri sıfır olur. Şekil 1(b)'de ise %83 çekilecek topun kırmızı olacağı bilinmektedir ve bilgi seviyesi orta olarak kabul edilebilir, çünkü %17 olasılıkla çekilecek topun mor olabilir. Şekil 1(c)'de ise çekilecek topun kırmızı mı veya mor mu olma olasılığı aynıdır ve bilgi seviyesi düşük olarak kabul edilebilir. Bu üç örnek için entropinin en yüksek olduğu durum Şekil 1(c)'dir.



Şekil 1. Bilgi ve belirsizlik durumları.

Birinci örnek için bütün toplar aynı olduğundan ard-arda beş tane top çekilecektir ve geri yerine konulacaktır. Çekilecek topun rengi not edilmektedir. Bu durumda çekilecek beş top için KIRMIZI'nın kazanma olasılıkları Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1. KIRMIZI'nın kazanma olasılıkları.

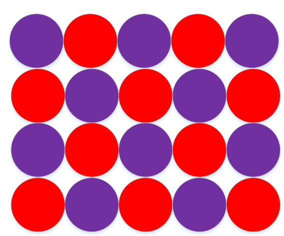
	Durum(a)	Durum(b)	Durum(c)
Olasılık	1x1x1x1x1=1	0.40	0.031

Tablo 1 dikkate alındığında Durum(a) bütün toplar kırmızı olduğundan kırmızının kazanma olasıgı %100 olur. Durum(b) bakıldığında kırmızının kazanma olasılığı %40 olarak görülmektedir. Durum(c) kırmızının kazanma olasılığı %3 olarak görülmektedir. Bu çok küçük bir değer olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durumu düzeltmek için olasılık çarpımlarının logaritması alındığında daha anlamlı ifadeler elde edilebilir. Bu sonuç entropi kavramının kullanılması gerektiğini ortaya çıkarmaktadır.
Shannon entropileri: H(a)=0, H(b)=0.65, H(c)=1.
Karcı entropinin farklı alfa değerlerine göre değerleri Tablo 2'de görülmektedir. Bu değerler dikkatlice incelendiğinde Karcı entropinin Shannon entropiyi kapsadığı ve özellikle bazı durumlarda entropiyi daha belirgin hale getirdiği görülmektedir.

Tablo 2. Farklı alfa değerlerine göre Şekil 1'deki durumların Karcı entropi değerleri.

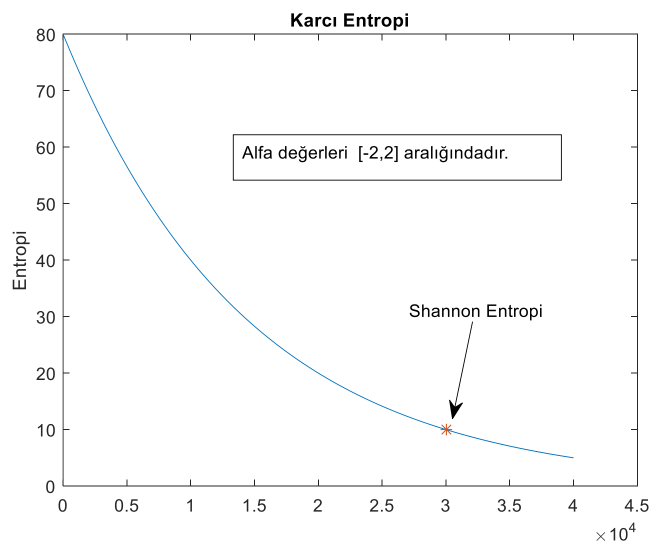
Alfa	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
Durum(a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Durum(b)	93.44	38.34	15.83	6.62	2.85	1.3	0.65	0.38	0.25
Durum(c)	8	5.66	4	2.83	2	1.41	1	0.71	0.5

Örnek 2: Eşit olasılıklı ortam



Şekil 2. 10 tane yeşil ve 10 tane mor top.

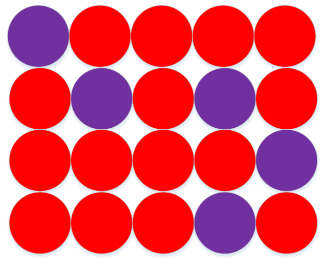
Şekil 2'de verilen durum için olasılık kümesi O={0.5,0.5} şeklinde olacaktır. Bu kümeden elde edilen Karcı ve Shannon entropiler Şekil 3' te görülmektedir.



Şekil 3. Eşit olasılık ortamı için entropiler.

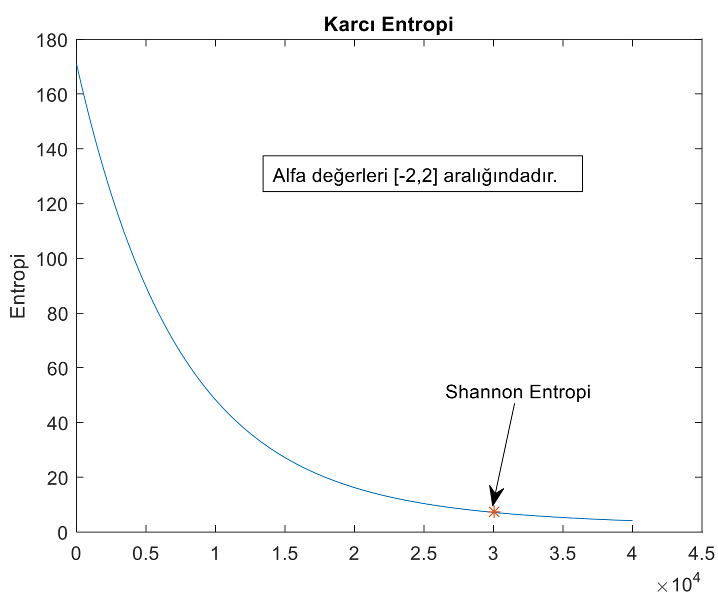
Şekil 3'te Karcı entropi için alfa değerlerinin [-2,2] aralığındaki değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi, Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi Karcı entropi ile aynı olmaktadır. Alfanın (1,∞) aralığındaki değerleri Shannon entropi değerinden küçük çıkacaktır. Bunun anlamı Karcı entropinin aynı olasılık değerlerine karşı bir küme oluşturduğu ve Shannon entropinin bu kümenin bir elemanı olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3: Olasılıkların eşit olmadığı ortam



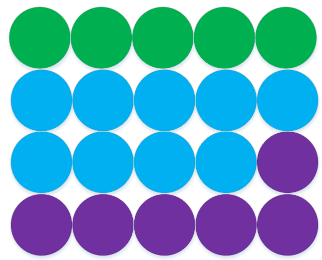
Şekil 4. 5 mor ve 15 kırmızı top.

Şekil 4'te olasılıkların farklı olduğu bir ortam görülmektedir ve ortam Şekil 2'deki ortama göre daha bilgilendirici bir ortamdır, çünkü ortamda baskın olan renk KIRMIZIdır. Bu ortam için Şekil 5'te Karcı entropinin [-2,2] aralığındaki farklı alfa değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi, Karcı entropi ile aynı olmaktadır.

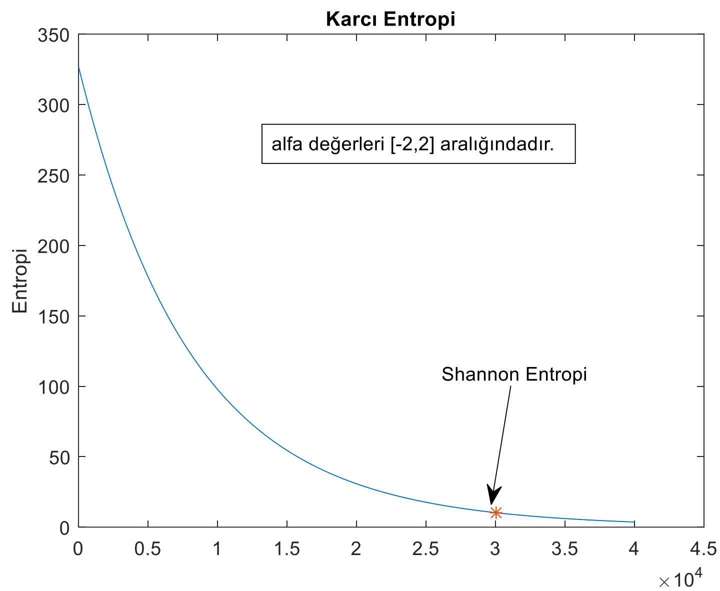


Şekil 5. Eşit olmayan olasılık ortamı için entropiler.

Örnek 4: İkiden fazla sınıf olasılıkları.



Şekil 6. 5 yeşil, 9 mavi ve 6 mor top.



Şekil 7. Eşit olmayan olasılık ortamı için entropiler (üç sınıf).

Şekil 7'de Karcı entropi için alfa değerlerinin [-2,2] aralığındaki değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi, Karcı entropi ile aynı olmaktadır. Olasılıksal ortam değişmesine rağmen Karcı ve Shannon entropileri arasındaki ilişki hep aynı kalmaktadır.

4.SONUÇLAR

Bu çalışmada Karcı entropi ile Shannon entropinin farklı olasılık ortamları için karşılaştırmaları yapılmıştır. Shannon entropi Karcı entropinin sadece bir durumuna karşı gelmektedir. Aynı zamanda alfa değerinin 1'den küçük olduğu durumların hepsinde Karcı entropi daha yüksek değer vermektedir. Aynı olasılıksal ortam için farklı alfa değerlerine göre Karcı entropi bir küme elde etmektedir ve Shannon entropi ise, bu kümenin bir elemanı olmaktadır. Bunun anlamı Karcı entropi Shannon entropiyi kapsayan bir entropi tanımıdır.

Eğer belirsizliğin daha ayırt edici olması isteniyorsa, Karcı entropi Shannon entropiye göre daha anlamlı sonuçlar vermektedir. Diğer bir deyişle problem hakkında bilgi sahibi olunmayan durumların daha ayırt edici olması isteniyorsa, Karcı entropinin farklı alfa değerlerine göre ele alınması daha iyi sonuçlar verecektir.

KAYNAKLAR

[1] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948) 379–423, 623–656.

[2] S. Bouzebda, I. Elhattab, New Kernel-types Estimator of Shannon’s Entropy, Comptes Rendus Mathematique, vol. 352, Comptes Rendus de l’Académiedes Sciences–Series I–Mathematics, 2014, pp. 75–80.
[3] M.R. Ubriaco, Entropies based on fractional calculus, Phys. Lett. A 373 (2009) 2516–2519.
[4] A. Karcı, A new approach for fractional order derivative and its applications, Univ. J. Eng. Sci. 1 (2013) 110–117.
[5] A. Karcı, Properties of fractional order derivatives for groups of relations/functions, Univ. J. Eng. Sci. 3 (2015) 39–45.
[6] A. Karcı, The linear, nonlinear and partial differential equations are not fractional order differential equations, Univ. J. Eng. Sci. 3 (2015) 46–51.
[7] A. Karcı, Generalized fractional order derivatives for products and quotients, Sci. Innov. 3 (2015) 58–62.
[8] A. Karcı, Chain rule for fractional order derivatives, Sci. Innov. 3 (2015) 63–67.
[9] A. Karcı, “Fractional order entropy New perspectives”, Optik - International Journal for Light and Electron Optics, vol:127, no:20, pp:9172-9177, 2016.