

ALTI BOYUTLU ISING MODELİNİN CREUTZ "CELLULAR AUTOMATON" I İLE SİMÜLASYONUNDA HASSASİYETİN ARTIRILMASI

Ziya MERDAN*, Nevzat AKTEKİN

Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü,

Teknikokullar, 06500, Ankara, TÜRKİYE, zmerdan@gazi.edu.tr

ÖZET

Altı boyutlu Ising modelinin, doğrusal boyutu $L=4,6,8$ olan periyodik sınır şartlı soyut basit küp örgülerde, sonsuz örgü kritik sıcaklığı yakınında ve beş "bit"li demonlar kullanılarak Creutz "cellular automaton"ında simülasyonu yapılmaktadır. Simülasyon sayısının sonsuz örgü kritik sıcaklığında düzen parametresi ve manyetik alınganlık ile manyetik alınganlık maksimumları için sonlu örgü ölçekleme üs değerlerine ve sonsuz örgü kritik sıcaklığı T_c için hesaplanan değere etkisi incelenmektedir. Bu nicelikler için sırasıyla 7,14,21 bağımsız simülasyon için elde edilen $\frac{d}{4}=1,45(51)$, $\frac{d}{4}=1,44(26)$, $\frac{d}{4}=1,44(26)$; $\frac{d}{2}=3,014(27)$, $\frac{d}{2}=3,049(52)$ $\frac{d}{2}=3,040(61)$; $\frac{d}{2}=2,973(42)$, $\frac{d}{2}=2,984(57)$, $\frac{d}{2}=2,980(50)$ ve $T_c = 10,8383(26)$, $T_c = 10,8382(30)$, $T_c = 10,8384(29)$ değerleri, $\frac{d}{2}$ ve $\frac{d}{4}$ için farklılığın noktadan sonra üçüncü hanede olması için bağımsız simülasyon sayısının 14 ten fazla olması gerektiğini göstermekte, T_c için ise 7 bağımsız simülasyondan sonra farklılık dördüncü hanede oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler : Ising modeli, sonlu örgü ölçekleme Teorisi, "Cellular automaton"lar.

INCREASING THE PRECISION IN THE SIMULATION OF THE SIX- DIMENSIONAL ISING MODEL ON THE CREUTZ CELLULAR AUTOMATON

ABSTRACT

The six-dimensional Ising model is simulated on the Creutz cellular automaton with five-bit demons for hypercubic lattices of linear dimensions $L=4,6,8$. The effect of the number of independent simulations on the critical quantities is studied. From the values of the magnetization and the magnetic susceptibility at the infinite-lattice critical temperature T_c , $\frac{d}{4}=1,45(51)$, $\frac{d}{4}=1,44(26)$, $\frac{d}{4}=1,44(26)$ and $=3.014(27)$, $=3.049(52)$ $=3.040(61)$; from the maxima of the magnetic

susceptibilities $\frac{d}{2} = 2.973(42)$, $\frac{d}{2} = 2.984(57)$, $\frac{d}{2} = 2.980(50)$; and from the critical temperatures of the finite-size lattices $T_c = 10.8383(26)$, $T_c = 10.8382(30)$, $T_c = 10.8384(29)$ are obtained for 7,14 and 21 independent simulations, respectively. For $\frac{d}{4}$ and $\frac{d}{2}$ the number of simulations must be greater than 14 in order to have differences in the third digit after the decimal point. The number of simulations greater than 7 is enough for having differences in the fourth digit in the case of the critical temperature for the infinite lattice

Key Words: Ising model, finite-size scaling theory, cellular automata

1. GİRİŞ

Klasik sonlu örgü ölçekleme teorisi (1), d uzay boyutu olmak üzere, $d \geq 4$ için uygulanamaz. $d = 4$ için (2,3,4,5) de türetilen sonlu örgü ölçekleme bağıntıları(4,5,6,7,8) de test edilmiş ve doğrulanmıştır. $d \geq 5$ için sonlu örgü ölçekleme bağıntıları (9), (2,3,4,5) de verilenlerden farklıdır. (9) daki sonlu örgü ölçekleme bağıntıları $d = 5$ için Monte Carlo simülasyonu (10,11) ve Creutz "cellular automaton"ında (12,13,14,15,16) simülasyon ile test edilmiştir. (9) daki sonlu örgü ölçekleme bağıntılarından düzen parametresi ve manyetik alınganlık için olanlar $d = 6$ (17,18,19) ve $d = 7$ (20) için Creutz "cellular automaton"ın da simülasyon ile test edilmiş ve doğrulanmıştır.

Bu çalışmanın amacı altı boyutlu Ising modeli için, doğrusal boyutu $L=4,6,8$ olan periyodik sınır şartlı örgülerde ve sonsuz örgü kritik sıcaklığı yakınında beş "bit"li demonlar ile Creutz "cellular automaton"ında(21,22), simülasyon sayısının sonlu örgü ölçekleme bağıntısından hesaplanan nicelik değerlerine etkisini incelemektir.

Model 2.Bölümde açıklanmakta sonuçlar ise 3.Bölümde tartışılmaktadır.

2. MODEL

Bu modelde her bir hücreye 7 ikili "bit" karşılık getirilmekte ve bir hücredeki bir değişkenin alacağı değer o değişkenin bir önceki zaman adımıdaki kendi değeri ile ona en yakın komşularındaki değerlerinden elde edilmektedir. Bu yedi ikili "bit" den ilki, B_1 Ising spini içindir; "0" veya "1" değerlerini alabilir. $S_i = 2B_i - 1$ olmak üzere, örgünün Ising spin enerjisi H_I (iç enerji, potansiyel enerji) (en yakın komşu etkileşme sabiti J cinsinden) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$H_I = - \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad [2.1]$$

Burada $\langle ij \rangle$ bütün en yakın komşu hücre çiftleri üzerinden toplamı göstermektedir. Kalan 6 bitten 5'i "demon" veya spine eşlik eden momentuma karşı gelmektedir. D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 ile gösterilen bu bitler "0" veya "1" değerlerini alabilmekte ve $(2^0 x D_1 + 2^1 x D_2 + 2^2 x D_3 + 2^3 x D_4 + 2^4 x D_5)$ ifadesine göre (0,31) aralığındaki tamsayıları oluşturmaktadır. Momentum değişkenine karşılık gelen kinetik enerji bu tam sayı değerlerinin dört katını almaktadır.

$$E_D = 4(2^0 x D_1 + 2^1 x D_2 + 2^2 x D_3 + 2^3 x D_4 + 2^4 x D_5) \quad [2.2]$$

Kinetik enerji bu değerleri aldığıında, bir spin değişiminde Ising enerjisinde oluşan ve değerleri 4'ün katları olan enerji değişimi karşılanabilmektedir. Bu sırada, örgünün toplam enerjisi $H = H_I + H_K$ korunmaktadır. H_K örgünün toplam kinetik enerjisidir, yani E_D^i , i.nci örgü gözüne ait "demon"un

enerjisi olmak üzere $H_K = \sum_i E_D^i$ dir. Verilen bir toplam enerji için sistemin sıcaklığı T (J/k_B biriminde; burada k_B Boltzman sabitidir) bir "demon"un kinetik enerjisinin ortalama değerinden elde edilir.

$$\langle E_D \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{31} 4ne^{-4n\beta}}{\sum_{n=0}^{31} e^{-4n\beta}} \quad [2.3]$$

$$T = \frac{1}{\beta} \quad [2.4]$$

dir. Yedinci bit "cellular automaton"ın zamanla dama tahtası düzeninde gelişimini sağlamakta ve böylece Ising modelinin "cellular automaton" ile simülasyonunu mümkün kılmaktadır. Her bir zaman adımında dama tahtasının siyah hücrelerine kural uygulanıp rengi beyaza çevrilir; beyaz hücrelerin ise sadece rengi siyaha çevrilir. Rengi beyaza çevrilen siyah hücrelerin spini ters çevrilerek Ising enerjisindeki enerji değişimi hesaplanır. Eğer enerji değişimi bu hücrenin momentum değişkenine aktarılabilir veya momentum değişkeninden alınabilecek bir değer ise, toplam enerji korunmak üzere spin ters çevrilir. Buna uygun olarak momentum değiştirilir, aksi halde spin ve momentum değiştirilmez. Bu işlem örgüdeki bütün siyah hücrelere aynı zaman adımında uygulanmakta ve gelişim süresince periyodik sınır şartı kullanılmaktadır. Başlangıçta sistemin bütün spinleri aşağı veya yukarı yönde alınabilir. İlk kinetik enerji beyaz hücrelerdeki demonun "bit"leri vasıtasıyla örgüye rasgele verilir; bu çalışmada birinci ve dördüncü "bit"ler vasıtasıyla verilmektedir. $L=4,6$ ve 8 örgüleri kullanılmıştır. Her bir bağımsız simülasyonda $L=4$ örgüsü için kere, $1,6 \times 10^5$ $L=6$ ve 8 örgüleri için de 6×10^4 kere örgünün bütün spinlerine ters çevirme kuralı uygulanmıştır. 21 bağımsız simülasyon yapılmaktadır.

3. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

3.1. Düzen Parametresi için Kritik Üssün Simülasyon Sayısı ile Değişimi

Altı boyutlu Ising modelinde düzen parametresi(manyetizasyon) için sonlu örgü ölçekleme denklemi $L \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ durumunda

$$M = L^{-d/4} X(x) \quad [3.1]$$

formuna sahiptir(23). Burada $x = tL^{d/2}$, $t = (T - T_c)/T_c$ ve ölçekleme fonksiyonudur.

Verilerin analizi bu ifadeye göre yapılmaktadır.

Çizelge 3.1. Sonsuz örgü kritik sıcaklığında, $=10.835(5)(17)$ ve $L=4,6,8$

L	M_c	Simülasyon Sayısı
4	0,1129(23)	7
	0,1127(23)	14
	0,1128(22)	21
6	0,0629(35)	7
	0,0625(35)	14
	0,0627(35)	21
8	0,0412(64)	7
	0,0415(61)	14
	0,0415(62)	21

Çizelge 3.2. M_c 'nin L 'ye karşı log-log grafiklerinin eğimleri.

L için Aralık	$\frac{d}{4}$	Simülasyon Sayısı
$4 \leq L \leq 8$	1,45(51)	7
	1,44(26)	14
	1,44(26)	21

$\frac{d}{4}$ değerleri arasındaki farklılığın noktadan sonra ikinci hanede de kalmaması için 14 ve daha fazla simülasyon gereklidir.

3.2. Mağnetik Alınanlık için Kritik Üssün Simülasyon Sayısı ile Değişimi

Altı boyutlu Ising modelinde mağnetik alınanlık için sonlu örgü ölçekleme denklemi $L \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ durumunda

$$\chi = L^{d/2} Y(x) \quad [3.2]$$

formuna sahiptir. Burada $x = tL^{d/2}$, $t = (T - T_c)/T_c$ ve Y ölçekleme fonksiyonudur.

Verilerin analizi bu ifadeye göre yapılmaktadır.

Çizelge 3.3. Sonsuz örgü kritik sıcaklığında, $T_c = 10,835(5)(17)$ ve $L=4,6,8$

L	χ_c	Simülasyon Sayısı
4	1,776(24)	7
	1,772(48)	14
	1,771(51)	21
6	6,24(27)	7
	6,23(30)	14
	6,23(29)	21
8	14,29(13)	7
	14,63(16)	14
	14,52(16)	21

Çizelge 3.4. Mağnetik alınanlığın maksimum olduğu sonlu örgü kritik

L	$T_c(L)$	χ_{maks}	Simülasyon Sayısı
4	10,6898(9)	2,296(11)	7
	10,6897(15)	2,293(21)	14
	10,6895(13)	2,298(21)	21
6	10,7920(7)	7,90(13)	7
	10,7916(9)	7,85(14)	14
	10,7917(9)	7,86(14)	21
8	10,8214(5)	17,96(38)	7
	10,8216(5)	18,10(60)	14
	10,8217(5)	18,08(51)	21

Çizelge 3.5 χ_c 'nin L'ye karşı log-log grafiklerinin eğimleri.

L için Aralık	$\frac{d}{2}$	Simülasyon Sayısı
$4 \leq L \leq 8$	3,014(27)	7
	3,049(52)	14
	3,040(61)	21

Çizelge 3.6. χ_{maks} 'nin L'ye karşı log-log grafiklerinin eğimleri.

L için Aralık	$\frac{d}{2}$	Simülasyon Sayısı
$4 \leq L \leq 8$	2,973(42)	7
	2,984(57)	14
	2,980(50)	21

$\frac{d}{2}$ değerleri arasındaki farklılığın noktadan sonra üçüncü hanede olması için 14 ve daha fazla simülasyon gereklidir.

3.3. Sonsuz Örgü Kritik Sıcaklığının Simülasyon Sayısı ile Değişimi

Altı boyutlu Ising modelinde sonlu örgü kritik sıcaklık değerleri ile sonsuz örgü kritik sıcaklık değeri arasındaki bağıntı Binder (23) tarafından [3.3]'deki gibi verilmiştir.

$$T_c - T_c(L) \propto L^{-d/2} \quad [3.3]$$

Verilerin analizi bu ifadeye göre yapılmaktadır.

Çizelge 3.7. Mağnetik alınganlığın maksimum olduğu sonlu örgü kritik sıcaklık değerlerinden elde edilen sonsuz örgü kritik sıcaklık değerleri.

Simülasyon sayısı	T_c
7	10,8383(26)
14	10,8382(30)
21	10,8384(29)

değerleri arasında farklılık 7 ve daha fazla simülasyon sayısı için sadece noktadan sonra dördüncü hanede oluşmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Privman, V., "Finite Size scaling and numerical simulation of statistical systems", *World Scientific*, Singapore,(1991).
2. Rudnick, J., Guo, H., Jasnow, D., "Finite-size scaling and the renormalization group", *J.Stat.Phys.*, 41, 353-373,(1985).
3. Kenna, R., Lang, C.B., "Renormalization group analysis of finite size scaling in the model", *Nucl.Phys. B.*, 393, 461-479,(1993).
4. Lai, P.Y., Mon, K.K., "Finite-size scaling of the Ising model in four dimensions", *Phys.Rev.B.*, 41, 9257-9263,(1990).
5. Aktekin, N., "The finite-size scaling functions of the four-dimensional Ising model", *J.Stat.Phys.*, 104, 1397-1406,(2001).
6. Aktekin, N., "Simulation of the four-dimensional Ising model on the Creutz Cellular Automaton", *Physica A*, 232, 397-407,(1996).
7. Aktekin, N., Günen, A., Sağlam, Z., "A finite-size scaling study of the four- dimensional Ising model on the

- Creutz Cellular Automaton", *Int.J.Mod.Phys.C.*, 10, 875-881,(1999).
8. Aktekin, N., Sağlam, M., Boyacıoğlu, B., "Effect of the number of energy levels of a demon for the simulation the Four-dimensional Ising model on the Creutz cellular automaton", *İstanbul Teknik Üniversitesi, 8.İstatistik Fizik Günleri*. İstanbul (2001).
 9. Luijten, E., Binder, K., Blöte, H.W.J., "Finite-size scaling above the upper critical dimension revisited: The case of the five-dimensional Ising model", *The European.Phys.J.B.*,9, 289-297 (1999).
 10. Mon, K.K., "Finite-size scaling of the 5D Ising model", *Europhys.Lett.*, 34, 399-404 (1996).
 11. Rickwardt, C., Nielaba, P., Binder, K., "A finite size scaling study of the 5-dimensional Ising model", *Ann.Phys.(Leipzig)*, 3: 483-493 (1994).
 12. Aktekin, N., Erkoç, Ş., Kalay, M., "The test of the finite-size scaling relations for the five-dimensional Ising model on the Creutz Cellular Automaton", *Int.J.Mod.Phys.C.*, 10: 1237-1245 (1999).
 13. Aktekin, N., Kalay, M., "Finite-size scaling functions of the five dimensional Ising model", *4th General Conference of the Balkan Physical Union*, Bulgaria,(Veliko Turnova) (2000).
 14. Kalay, M., "Beş boyutlu ising modelinin creutz cellular automaton'ında İncelenmesi", Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara,1- 93 (2001).
 15. Kalay, M., Aktekin, N., "Finite-size scaling study of The Binder parameter for the Five-Dimensional Ising model", *İst. Tek. Ün., 8.İst. Fiz. Gün.*, İstanbul (2001).
 16. Kalay, M., Aktekin, N., "The Finite-size scaling study of the Specific Heat for the Five-Dimensional Ising model", *First Hell. Turk. Int.Phys. Conf.(Kos Greece-Bodrum Turkey)*, İzmir (2001).
 17. Aktekin, N., Erkoç, Ş., "The test of the finite-size scaling relations for the six-dimensional Ising model on the Creutz Cellular Automaton", *Physica A.*, 284, 206-214 (2000).
 18. Merdan, Z. and Aktekin, N., "The simulation of the six-dimensional ising model on the Creutz cellular automaton", *Balkan phys.Lett.* 10(2): 95-101 (2002).
 19. Merdan, Z., "Altı Boyutlu Ising Modelinin Creutz Cellular Automaton'ında İncelenmesi", Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Ankara, 1-104 (2003).
 20. Aktekin, N., Erkoç, Ş., "The test of the finite-size scaling relations for the seven-dimensional Ising model on the Creutz Cellular Automaton", *Physica A.*, 290,123-130 (2001).
 21. Creutz, M., "Deterministic Ising Dynamics", *Ann.Phys.*, 167,62-72 (1986).
 22. Aktekin, N., "The simulation of the ising model on the creutz cellular automaton, annual reviews of computational physic VII", edited by D.Stauffer, *World Scientific*, Singapore,1-23 (2000).
 23. Binder, K.,Nauenberg, M., Privman, V., Young, A.P., "Finite-size test of hyperscaling", *Phys.Rev.B.*, 31: 1498-1502 (1985).

Geliş Tarihi: 12.03.2003

Kabul Tarihi: 29.05.2003