NİTEL BAĞIMLI DEĞİŞKEN İÇİN DOĞRUSAL OLASILIK MODELİ (IVb)

Prof. Dr. Mehmet GENCELİ

G İ R İ Ş

Ekonometri'de 1960'lar ve 1970'lerde kaydedilen en büyük aşamalardan biri de makroekonomik analizlerin yanı sıra mikroekonomik analizlere de başlanmasıdır. (Chow 1983: 250). Böylece iktisadi birimlerin davranışlarına ilişkin, bağımlı değişkenin nitel olduğu durumlar da Ekonometri'nin uğraşı alanına girmiştir. Bundan dolayı da Ekonometri'deki en önemli gelişmelerden biri de nitel veya süreksiz bağımlı değişken modelleri olarak adlandırılan alanda olmuştur (Amemiya 1981: 1483).

Söz konusu modellerin iktisadi uygulanmasında iki etmen rol oynamaktadır:

1) İktisatçılar günümüzde aslında süreksiz olan veya süreksiz hale getirilmiş veriler ile uğraşmak durumundadırlar. Örneğin yeni bir araba, yeni bir dayanıklı tüketim malı satın alıp almama isteği, İstanbul'dan Ankara'ya uçak, tren, otobüs, otomobil ile gitmek gibi sonlu almaşıklar arasından tercih yapılması gibi olaylar nitel bağımlı değişken modellerini oluştururlar.

2) Son zamanlarda araştırma verilerinin değerlendirilmesine verilen önem (kar. : Pindyck-Rubmfeld 1985: 273) ve mikro verilerin toplanma (aggregation) sorunu çıkarmamaları ve aynı zamanda davranışları tahmine yaramaları (Intriligator 1978: 64-65) bu konularda kullanılan tekniklerin gelişmesinde itici olmuşlardır.

Bütün bu gelişmeler bireysel davranışın açıklanması ve tahmininde doğan ekonometrik tekniklerin yetersizliğini de ortaya koymuştur.

Klasik Normal Regresyon Modeli'nde hata paylarına ilişkin bir kısıtlama getirilmediği gibi, normal dağıldıkları varsayılmaktadır. Bu da, kuramsal da olsa, bağımlı değişkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanmasını sağlamaktadır. Ancak fiat, harcama, yatırım gibi birçok iktisadi değişken negatif değer alamayacaklarından iktisadi modellerde bağımlı değişken için tanım aralığı çoğu kez $(0,+\infty)$'dır (kar.: Goldberger 1964: 248).

Halbuki anılan modellerde bağımlı değişken süreksizdir. Bu nedenle de bağımlı değişken için ölçme değil sayma söz konusu olmaktadır (Kmenta 1971: 409).

Bireylerin tercihlerini yansıttıklarından bu gibi modeller tercih modelleri olarak da adlandırılmaktadır. Tercih modellerinde bağımlı değişken açısından ikili bir ayırım yapılmaktadır (kar.: Johnston 1985: 419):

a) Bağımlı değişkenin evet-hayır, başarılı-başarısız, kabul-red gibi sadece iki almaşığı kapsadığı, dikotom veya ikili bağımlı değişkenler,

b) İkiden fazla almaşığı içeren politokom veya çoklu tercih bağımlı değişkenleri.

Tercih modellerinde de bu ayırma koşut olarak ikili ve çoklu tercih modelleri olarak ayrılabilir. Buna karşın Tobin (1958) tarafından ortaya atılan ve sınırlı bağımlı değişken veya Tobit değişkeni olarak adlandırılan model ayırımın dışında tutulmuştur.

Bu çalışmada tercih modelleri için uygulanan tekniklerden birini oluşturan Doğrusal Olasılık Modelleri'nin özelliklerini ortaya koymak, iktisadi uygulanabilirliğini tartışmak amaçlanmıştır.

1) Tercih Modellerinde Fayda Ölçütü

Tercih modellerinde bağımlı değişken olasılık şeklinde ifade edilmektedir. O halde, sorun, bağımlı değişkenin olasılık şeklindeki değerlerinin tahmininin yanı sıra almaşıklar arasında seçişe yol açan etmenlerin belirlenmesidir. Bu da tercihlerden elde edilen fayda ilkesine göre çözümlenmektedir.

Çözümleme için de iktisadi birimlerin faydalarını maksimize edecek şekilde rasyonel davrandıkları varsayılmaktadır (Amemiya: 1489).

İki tercih ile karşı karşıya kalan birey bu en basit durumda ikisinden birini tercih edecektir. Birinci almaşık için Y_i'ye $Y_i=1$ ve ikinci almaşık için de $Y_i=0$ tekabül ettirilirse, P_i, Y_i'nin 1 değerini alma, $(1-P_i)$ de Y_i'nin O değerinin olasılıklarını gösterecektir. Böylece Y_i'nin olasılık

$$f(Y_i) = P_i^{Y_i} \cdot (1-P_i)^{1-Y_i} \qquad Y_i = 0,1$$

olacaktır (Judge ve diğerleri 1988: 786).

O halde böyle bir tercihin neye göre yapıldığı açıklanmalıdır.

P_i'nin belirlenmesinde faydanın rolü için üç yaklaşımdan biri kullanılabilir:

Birinci yaklaşım beklenen faydanın maksimizasyonudur. Genellikle benimsenmiş olan bu yaklaşım burada da kullanılacaktır.

İkinci yaklaşım ise tercih eğilimini belirleyen gözlenemeyen, rastlantısal bir indeksin bulunmasıdır. En nihayet üçüncü olarak da tercih olasılıkları doğrudan doğruya bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu şeklinde gösterilmektedir.

İkili bir tercih için bireyin işine kendi arabası veya kamu aracı ile gitmek arasındaki tercihini inceleyelim. Bu tercihte konfor, zaman kaybı, ulaşım giderleri gibi ulaşım şekline bağlı özelliklerin yanı sıra bireyin yaşı, geliri, cinsiyeti, meslekteki mevkii gibi sosyo-ekonomik etmenler de rol oynamaktadır. Böylece, bireyin tercih almaşıklarından elde ettiği dolaylı fayda U, tercihlerin özelliklerini yansıtan z ile bireyin sosyo-ekonomik özelliklerini simgeleyen w'nin bir fonksiyonudur. Bireyin fayda fonksiyonu

$$U(z, w, \eta, \theta)$$

şeklinde yazılabilir (Dhrymes 1985: 341). z, bireyin tercih için karşı karşıya kaldığı almaşıkların özelliğini veren bir sıra vektörüdür. w de bir sıra vektörü diye tercih yapan bireyin sosyo-ekonomik özelliklerini yansıtmaktadır. η ise almaşıkları kapsayan bir rastlantısal değişkendir. θ da parametre vektörüdür.

Bireyin beklediği fayda da

$$u(z, w; \theta) = E[\, u(z, w, \eta; \theta) / w, z \,]$$

dır. Yerine konulursa

$$U(z, w, \eta; \theta) = u(z, w; \theta) + \varepsilon$$

elde edilir (Dhrymes: 330).

Mc Fadden anlamında hata payı olup gözlenemeyen tercih özellikleri ile sosyo-ekonomik özellikleri simgelemektedir (Amemiya: 1490). Hata payının ortalaması sıfır olup birinci veya ikinci tercih için hata payı farklıdır: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

$$U (z, w, \varepsilon_1, \theta_1) > U (z, w, \varepsilon_2, \theta_2)$$

halinde birinci almaşık, tersi durumunda da ikinci almaşık tercih edilecektir.

Diğer taraftan

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < u (z, w; \theta_1) - u (z, w; \theta_2)$$

yazılması da bir almaşığın tercihini gösteren başka bir şekildir.

Tercihleri içeren rastlantısal fayda fonksiyonunun U'nun, doğrusal olduğu varsayılırsa, fonksiyon

$$U_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

şeklinde ortalama fayda ve hata payının toplamı olarak yazılabilir (Amemiya 1985: 296).

İki tercihli j = 0,1 modelde de i'nci birimin fayda fonksiyonu

$$U_{io} = \mu_{io} + \varepsilon_{io} = \alpha_o + z_{io}\delta + w_i\gamma_o + \varepsilon_{io}$$

$$U_{i1} = \mu_{in} + \varepsilon_{i1} = \alpha_1 + z_{i1}\delta + w_i\gamma_1 + \varepsilon_{i1}$$

olacaktır. Burada $U_{i1} > U_{io}$ veya $U_{i1} < U_{io}$ hali gözönüne alınmaktadır. Dolayısıyle $U_{i1} > U_{io}$ ise $Y_i = I$, $U_{i1} < U_{io}$ ise Y_i ='dır. Böylece, yukarıda gösterilen $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ koşutunda,

$P (Y_i = I) = P (U_{i1} > U_{io}) = P \left[(\varepsilon_{io} - \varepsilon_{in}) < (\alpha_1 - \alpha_0) + (z_{i1} - z_{io}) \delta + w_i'(\gamma_1 - \gamma_0) \right] = F (x_i \beta)$ yazılabilir. (Judge ve diğerleri 1985: 753).

$x_i = (1, (z_{i1} - z_{io})', w_i')$ $\beta' = [(\alpha_1 - \alpha_0), \delta', (\gamma - \gamma_o)']$ dır.

F ise $(\varepsilon_{i0} - \varepsilon_{i1})$'in birikimli dağılım fonksiyonudur. Tercih modelleri F'in seçilişine bağlıdır.

İktisadi uygulamalar için genellikle

$F(x_i'\beta) = x_i'\beta$ Doğrusal Olasılık Modeli

$$F(x_i'\beta) = \int_{-\infty}^{x_i'\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \, . \, dt$$ Probit Modeli

$$F(x_i'\beta) = \frac{1}{1 + e^{x_i'\beta}}$$ Logit Modeli

kullanılmaktadır (kar.: Johnston: 420-421). Ayrıca Gombit gibi başka modeller önerilmişse de (Zellner-Lee 1965: 386) bunlar rağbet görmemiştir.

2) Doğrusal Dikotom Olasılık Modeli

Bu modellerde bağımsız değişkenler X_i, $i=1, 2, \ldots, k$ ile ana kütle oranları arasındaki bağıntının hiç olmazsa belirli bir aralık için

$$P = X\beta$$

şeklinde parametreler açısından doğrusal olduğu varsayılmaktadır (kar.: Zellner ve Lee: 387).

Ayrıca ana kütle oranları P_i ile örnek oranları p_i, $i=1, 2, \ldots, T$ arasındaki ilişki de

$$p_i = P_i + \varepsilon_i$$

varsayılmıştır. ε_i'ler birbirinden bağımsız olup Binom dağılımına uymaktadır. Hata paylarının ortalaması sıfır, varyansı ise

$$\frac{P_i(1-P_i)}{n_i} \text{ dir.}$$

Gerçi bu varsayıma bazı eleştiriler getirilmiştir (örneğin Neter - Maynes 1970: 502), ama bunlar dikkate alınmamaktadır.

Model en basit biçimi ile

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad i = 0, 1 \qquad [1])$$

şeklindedir. X_i nicel değişkeninin, KDNR modeli paralelinde genellikle stokastik olmadığı varsayılmaktadır. Öte yandan X_i'nin stokastik olması halinde, X_i, ε_i'den bağımsızdır (Pmdyck-Rubmfeld: 275). Y_i ise X_i'in doğrusal bir fonksiyonu olup dikotom bir rastlantısal değişkendir.

Örneğin evli kadınların çalışma hayatına katılmalarını inceleyen bir modelde Y_i kadının çalışma veya çalışmama isteğini gösteren, diğer bir deyişle evet-hayır karşılığı bir değişkendir. Buna göre Y_i'ye

Kadının çalışma isteğinde bulunması halinde $Y_i = 1$

Kadının çalışmak istememesi durumunda $Y_i = 0$
değerleri veya tersi verilebilir.

Yine KDNR modelinde olduğu gibi $E(\varepsilon_i) = 0$ varsayılırsa

$$E(Y_i) = E(Y_i/X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i \qquad [2]$$

elde edilir. [1] modelinde Y_i aynı zamanda iki tercihten birinin bağıl frekansını da vermektedir. Bağıl frekans da bir olasılık olarak yorumlandığında [2] denklemi aslında $P(Y_i = 1/X_i)$ koşullu olasılığıdır. Bundan ötürü de model Doğrusal Olasılık Modeli olarak tanımlanmaktadır.

Öte yandan Y_i'nin sadece iki değer alabilmesi sonucu dağılım şöyle olacaktır:

TABLO : 1

Y_i'nin Dağılımı

Y_i	$P(Y_i)$
1	P_i
0	$(1-P_i)$
	1

Buna göre daha önce değinildiği gibi; Y_i'nin olasılık fonksiyonu

$$f(Y_i) = P_i^{Y_i} (1-P_i)^{1-Y_i} \quad Y_i = 0,1$$

Bernouilli sürecini gerçeklemektedir. Dağılımın matematik ümidi alınırsa

$$(Y_i) = 1 . P_i + 0 \, (1-P_i) = P_i$$

bulunur. Bu sonuç [2] denkleminde yerine konulursa

$$P_i = \beta_0 + \beta_1 X_2$$

sonucuna ulaşılır. Böylece [2] denkleminin matematik ümidinin Y_i'nin koşullu olasılığı olduğu ortaya çıkmaktadır. β_1 ise (dP_i/dX_i) dir. β_1

bağımsız değişkendeki 1 birim değişmenin P_i üzerindeki etkisini ölçmektedir. Kadınların çalışma hayatına katılmaları probleminde X_i kocanın geliri olarak alınabilir. Böyle bir olayda P_i, belirli bir gelire sahip kocanın eşinin çalışma hayatına katılma olasılığını vermektedir.

Diğer taraftan X_i'nin sabit olması halinde hata payı ε'nın olasılık dağılımı Y_i'nin olasılık dağılımına eşittir. Buradan hareketle $E(\varepsilon_i) = 0$ olduğu gösterilebilir:

$$\varepsilon_i = Y_i - E(Y_i/X_i) = Y_i - P_i$$

$$Y_i = \varepsilon_i = 1 - \beta_0 + \beta_1 X_{ij} \quad Y_i = 0 \quad \varepsilon_i = -\beta_0 - \beta_1 X_i$$

$$E(\varepsilon_i) = (1 - \beta_0 + \beta_1 X_i) \,.\, P_i + (-\beta_0 - \beta_1 X_i) \,.\, (1 - P_i)$$

$$E(\varepsilon_i) = P_i - P_i \beta_0 + P_i \beta_1 X_i - \beta_0 - \beta_1 X_i + P_i \beta_0 + P_i \beta_1 X_i$$
$$= P_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i) = P_i - P_i = 0$$

2.1) Doğrusal Dikotom Olasılık Modelinin Uygulamaları

Yeni bir tip buzdolabı piyasaya süren A firması buzdolabının satış olasılığını araştırmak üzere 25 ev kadını ile anket yaparak yeni buzdolabını satın alma tercihlerini sormuş ve evet için $Y_i = 1$, hayır için $Y_i = 0$ vermiştir. X_i ise anket yapılan kadınların eşlerinin yıllık geliridir (1000.000 TL.)

TABLO : 2

Buzdolabı Satın Alma İsteği

i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i
1	14	0	14	5	0
2	29	0	15	20	1
3	6	0	16	13	0
4	25	1	17	9	0
5	18	1	18	32	1
6	4	0	19	24	0
7	18	0	20	13	1
8	12	0	21	19	0
9	22	1	22	4	0
10	6	0	23	28	1
11	30	1	24	22	1
13	30	1			
12	11	0	25	8	1
				442	11

Kaynak: Neter J. - Wasserman W., Applied Linear Statistical Models, Richard D. Irwin Homewood, 1974, s. 315'den uyarlanmıştır.

Bu verilere E.K.K. yöntemi uygulanacak olursa şu sonuçlar ve regresyon denklemi elde edilir.

$\Sigma XY = 248 \quad \overline{X} = 16.68 \quad \Sigma x^2 = 1976.44$

$\Sigma \; X = 442 \quad \Sigma Y = \Sigma Y^2 = 11 \quad \Sigma xy = 62.32$

$\Sigma \; X^2 = 9100 \quad \overline{Y} = \overline{P} = 0.44 \quad \Sigma y^2 = 6.16$

$$Y = -0.092192 + 0.03152825\,X \qquad (0.183272) \quad (0.009606)$$
$$t \quad -0.503 \qquad 3.2821$$

TABLO : 3

Varyans Analizi Tablosu

Değişkenlik	SS	s.d.	MSS	
Regresyon (X_1)	SSR = 1.964840537	1	MSSR = 1.964840537	F = 10.77
Hata	SSE = 4.195159463	23	MSSE = s_e^2 = 0.182398	r^2 = 0.3192
Toplam	SST = y^2 = 6.16	24	s_y^2 = 0.2567	

Test istatistiğinin değeri t = 3.2821 kritik değer olan $t_{0.05,23} = 1.714$' den büyük olduğu için regresyon denklemi tahminler için kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

TABLO : 4

Buzdolabı Satın Almanın Olasılıkları

i	Y_i	i	Y_i	i	Y_i
1	0.34920	10	0.09697	18	0.91671
2	0.82212	11	0.85365	19	0.64448
3	0.09697	12	0.25461	20	0.31767
4	0.69601	13	0.85365	21	0.50684
5	0.47531	14	0.06544	22	0.03392
6	0.03392	15	0.53837	23	0.79059
7	0.47531	16	0.31767	24	0.60142
8	0.28614	17	0.19156	25	0.16003
					11.0000

Tablo 4'de görüldüğü gibi, bütün tahmin değerleri $0 \leqslant Y_i$ 1 arasında yer aldığından

$$\widehat{P} = -0.092192 + 0.031152825 \; X$$

yazılabilir. Böylece eşin yıllık gelirinin 100000 TL. artması buzdolabı satın alma tercihini %3 kadar arttırmaktadır.

Dikotom tercih modellerinde aslında çözüm bu kadar kolay olmadığı gibi çözümde de bazı sorunlar çıkmaktadır. Bunun için ikinci bir problemi ele alalım.

İkinci bir uygulama için aşağıdaki tablodan yararlanılabilir:

TABLO : 5

Kırk Ailenin Bulaşık Makinesi Sahipliği

Aile	X_i	Y_i	Aile	X_i	Y_i
1	8	0	21	22	1
2	16	1	22	16	1
3	18	1	23	12	0
4	11	0	24	11	0
5	12	0	25	16	1
6	19	1	26	11	0
7	20	1	27	20	1
8	13	0	28	18	1
9	9	0	29	11	0
10	10	0	30	10	0
11	17	1	31	17	1
12	18	1	32	13	0
13	14	0	33	21	1
14	20	1	34	20	1
15	6	0	35	11	0
16	19	1	36	8	0
17	16	1	37	17	1
18	10	0	38	16	1
19	8	0	39	7	0
20	18	1	40	17	1

Tablo 5'deki veriler 40 ailenin yıllık gelirleri ile bulaşık makinesi sahibi olup olmadıklarını göstermektedir. Ailelerin bulaşık makinesi sahibi olmaları halinde $Y_i = 1$, aksi takdirde $Y_i = 0$ verilmiştir.

Verilerden de

$\Sigma Y = \Sigma Y^2 = 21$ $\overline{Y} = 21/40 = 0.525$ $\Sigma X = 576$ $\Sigma X^2 = 9064$

$\overline{X} = 14.4$ $x^2 = 769.6$ $Y = 381$ $xy = 78.6$ $= 78.6/769.6 = 0.10213$ ve $= 0.525 - (14.4) \quad (0.10213) = - 0.9457$

$$\widehat{Y} = - 0.9454 + 0.10213$$
$$(0.1228) \quad (0.0082)$$
$$t \quad - 7.701 \quad 12.45$$

bulunmuştur.

TABLO : 6

Varyans Analizi Tablosu

Değişkenlik	SS	s.d.	MSS	
Regresyon X_1	SSR = 8.027418	1	8.027418	F = 156.62
Hata	SSE = 1.947582	38	0.051252	r^2 = 0.08047
Toplam	SST = y^2 = 9.975	39	s^2_y = 0.2558	

Diğer taraftan nitel bağımlı değişkene özgü olarak hata payına ilişkin değişkenliğin SSE'nin de

$$SSE = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} - \widehat{\beta}_1 \, \Sigma xy = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} - \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2}$$

olduğu ispat edilebilir.

Dikotomi halinde örnek birim mevcudu $n_1 + n_2 = n$'dir. Böylece

$$SST = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j} Y^2_{ji} - n \, \overline{Y}^2 \text{ ifadesi}$$

$$\Sigma Y^2 = \Sigma Y = n_1 \text{ ve } \overline{Y}^2 = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \text{ dolayısıyle}$$

$$SST = \Sigma y^2 = n_1 - \frac{n_1^2}{n^2} \cdot \quad n = \frac{n_1 (n - n_1)}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \text{ olacaktır.}$$

(kar. : Ladd 1966: 874)

Probleme uygulanacak olursa:

$$SST = \frac{n_1 . n_2}{n_1 + n_2} = \frac{21.19}{40} = 9.975 \quad \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2} = \frac{6177.96}{769.6} = 8.0274$$

$$SSE = 9.975 - 8.0274 = 1.9476$$

olarak Tablo 6'daki aynı sonuca ulaşılır.

Belirginlik katsayısı nitel bağımlı değişkenli bu model için çok yüksek olup 0.8047'dir. Gerek t testleri, gerekse F testi anlamlı sonuçlar verdiğinden elde edilen regresyon denklemi tahminlerde kullanılabilecektir. Yapılan tahminler ise aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

TABLO : 7

i	Y_i	$\hat{Y}_i$	i	Y_i	$\hat{Y}_i$
1	0	−0.128638	21	1	1.301195
2	1	+0.688409	22	1	0.688409
3	1	+0.89267	23	0	0.279885
4	0	0.17775	24	0	0.17775
5	0	0.279885	25	1	0.688409
6	1	0.99480	26	0	0.17775
7	1	1.096933	27	1	1.096933
8	0	0.382016	28	1	0.89267
9	0	−0.026507	29	0	0.17775
10	0	0.0756237	30	0	0.075623
11	1	0.790541	31	1	0.790541
12	1	0.89267	32	0	0.382016
13	0	0.484147	33	1	1.199064
14	1	1.096933	34	1	1.096933
15	0	−0.33290	35	0	0.17775
16	1	+0.99480	36	0	−0.128638
17	1	+0.688409	37	1	+0.790541
18	0	+0.07560	38	1	+0.688409
19	0	−0.128638	39	0	−0.230769
20	1	+0.89267	40	1	+0.790541

Tablo 7'deki tahmin değerlerine bakıldığı zaman bundan önceki örnekte olduğu gibi $\widehat{Y_i} = \widehat{P_i}$ şeklinde bir ifade kullanılamamaktadır, çünkü bazı tahmin değerleri 1'deh büyük, bazıları ise 0'dan küçüktür.

O halde en basit biçimi ile dahi modelin aksayan bazı yönleri ortaya çıkmaktadır. Buna karşın hesaplama kolaylığı açısından özellikle 1950'li ve 1960'lı yıllarda anılan modele sıkça başvurulmuştur.

Nitekim ilk uygulamalardan biri olan de Jonasi modelinde 1952 yılına ilişkin otomobil satın alma tercihi

$$\widehat{Y} = -0.008 + 0.0022\ X$$

olarak bulunmuştur. X burada 100 Dolar cinsinden kullanılabilir geliri temsil etmektedir.

O halde 1952 yılında 10000 Dolar kullanılabilir geliri olan bir kimsenin otomobil alma olasılığı,

$$-0.008 + 0.0022\ (100) = 0.212$$

Dikotom modeller ile çoklu tercih modellerinin aksayan yönleri aynı olduğundan önce çoklu tercih modelleri incelenecektir.

3) Çoklu Doğrusal Olasılık Modeli

İkili tercih modelinin uzantısı olan bu modelde asgari üç tercih bulunmaktadır. Örneğin evet, belki, hayır gibi üç tercihli j = 1, 2, 3 model söz konusu olunca da

$$P_{1i} = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad P_{2i} = \beta_3 + \beta_3 X_i \quad P_{3i} = \beta_4 + \beta_3 X_i$$

yazılabilir (Pindyck-Rubinfeld: 302). P_{ji} İ'nci bireyin J'nci tercihi yapma olasılığıdır. Her üç tercih için X_i'nin aynı olması halinde yukarıdaki doğrusal olasılık modelleri E.K.K. yöntemi ile ayrı ayrı çözülebilir. Bunun için de gene dikotomdan yararlanılır. İstenilen tercih için $Y_i = 1$ verilerek bir grupta, diğer tercihlerin tümüne de $Y_1 = 0$ tekabül ettirilerek ikinci bir grupta toplanılır.

J tercihte bağımsız değişken veya değişkenlerin aynı olması durumunda model için şu özellikler sıralanabilir:

a) Her i için $P_{1i} + P_{2i} + P_{3i} = 1$'dir.

b) $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 1$

c) $\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_4 = 1$

d) $\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_5 = 0$

Sayılan bu özellikleri kanıtlamak ve çoklu tercih modeline ilişkin bir uygulama için Tablo 5'i aşağıdaki biçimde değiştirelim ve tercihler arasmda bir sıralama bulunmadığını varsayalım.

TABLO : 8
Yeni Tip Bulaşık Makinesi Alma İsteği

i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i
1	8	0	14	20	1	28	18	1
2	16	1	15	6	0	29	11	2
3	18	1	16	19	1	30	10	0
4	11	0	17	16	1	31	17	1
5	12	2	18	10	2	32	13	0
6	19	1	19	8	0	33	21	1
7	20	1	20	18	1	34	20	1
8	13	2	21	22	1	35	11	2
9	9	0	22	16	1	36	8	0
10	10	2	23	12	2	37	17	1
11	17	1	24	11	0	38	16	1
12	18	1	25	16	1	39	7	2
13	14	0	26	11	0	40	17	1
			27	20	1			

Evet: $Y_i = 1$ Hayır: $Y_i = 0$ Belki: $Y_i = 2$

$\Sigma X = 576$ $\Sigma X^2 = 9064$ $\overline{X} = 14.4$ $\Sigma x^2 = 769.6$ $n = 40$

a) $$\widehat{P_1} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} X$$

$$\Sigma Y = \Sigma Y^2 = 21 \quad \overline{P_1} = 21/40 = 0.525 \quad \Sigma xy = 78.6$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{78.6}{769.6} = 0.10213 \quad \widehat{\beta_0} = 0.525 - (0.10213).\ (14.4) = -0.94567$$

$$\widehat{P_1} = 0.94567 + 0.10213\,X$$

b) $$\widehat{P_2} = \widehat{\beta_2} + \widehat{\beta_3} X$$

$$\Sigma Y = \Sigma Y^2 = 11 \quad \Sigma XY = 109 \quad \overline{P_2} = 11/40 = 0.275 \quad n_2 = 11$$

$$\Sigma xy = 109 - 40 \quad (0.275) \quad (14.4) = \quad 109 - 158.4 = -49.4$$

$$\hat{\beta}_3 = -\frac{49.4}{769.6} = -0.0642 \qquad \hat{\beta}_4 = 0.275 - (-0.0642)\ (14.4) = 1.1993$$

$$\hat{P}_2 = 1.1993 - 0.0642\,X$$

c) $$\hat{P}_3 = \hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_4\,X$$

$$\Sigma\,Y = \Sigma\,Y^2 = 8 \quad \Sigma\,XY = 86 \quad \bar{P}_3 = 8/40 = 0.20 \qquad n_3 = 8$$

$$\Sigma\,xy = 86 - 40\ (0.20)\quad (14.4) = 86 - 115.2 = -29.2$$

$$= -\frac{29.2}{769.6} = -0.0379 \qquad = 0.20 - (-0.0379)\quad (14.4) = 0.7464$$

$$\bar{P}_3 = 0.7464 - 0.0379\,X$$

$\hat{P}_1$ denklemi eşin geiiri verildiğinde ev kadınının yeni tip bulaşık makinesine evet deme olasılığını, $\hat{P}_2$ ise aynı durumda hayır deme olasılığını vermektedir. $\hat{P}_3$ ise veri gelirde belki deme olasılığıdır.

Diğer taraftan $\hat{\beta}_1 = 0.10213$'dür. Eşin gelirinin bir birim artmasının evet deme olasılığına etkisini vermektedir. Buna göre gelirin 1000000 TL. artması evet deme olasılığını 0.10213 kadar arttıracaktır.

Diğer taraftan gelirin 100000 TL. artışı hayır ve belki diyenlerde hayır ve belki olasılığını azaltıcı etkiye sahiptir. Dolayısıyle eşin geliri arttıkça yeni tip bulaşık makinesine evet deme eğilimi de artmaktadır.

Şimdi ise bulunan sonuçların çoklu tercih modellerinin olasılıklarını gerçekleyip gerçeklemediklerine bakalım:

TABLO : 9

Buzdolabı Probleminin Olasılıkları

i	X_i	P_{1i}	P_{2i}	P_{3i}	P_{ji}
1	8	−0.12863	+0.6857	+0.4432	1.00027
2	16	+0.68841	+0.1721	+0.1400	1.00051
3	18	+0.89267	+0.0437	+0.0642	1.00057
4	11	+0.17776	+0.4931	+0.3295	1.00036
5	12	+0.27989	+0.4289	+0.2916	1.00039
6	19	+0.99480	−0.0205	+0.0263	1.0006
7	20	+1.09693	−0.0847	−0.0116	1.00063
8	13	+0.38202	+0.3647	+0.2537	1.00042
9	9	−0.02650	+0.6215	+0.4053	1.0003
10	10	+0.07563	+0.5573	+0.3674	1.00033
11	17	+0.79054	+0.1079	+0.1021	1.00054
12	18	+0.89267	+0.0437	+0.0642	1.00057
13	14	+0.48415	+0.3005	+0.2158	1.00045
14	20	+1.09693	−0.0847	−0.0116	1.00063
15	6	−0.33289	+0.8141	+0.5190	1.00021
16	19	+0.99480	−0.0205	+0.0263	1.00060
17	16	+0.68341	+0.1721	+0.1400	1.00051
18	10	+0.07563	+0.5573	+0.3674	1.00033
19	8	−0.12863	+0.6857	+0.4432	1.00027
20	18	+0.89267	+0.0437	+0.0642	1.00057
21	22	+1.30119	−0.2131	−0.0874	1.00069
22	16	+0.68841	+0.1721	+0.1400	1.00051
23	12	+0.27989	+0.4289	+0.2916	1.00039
24	11	+0.17776	+0.4931	+0.3295	1.00036
25	16	+0.68841	+0.1721	+0.1400	1.00051
26	11	0.17776	+0.4931	+0.3295	1.00036
27	20	1.09693	−0.0847	−0.0116	1.00063
28	18	+0.89267	+0.0437	+0.0642	1.00057
29	11	+0.17776	+0.4931	+0.3295	1.00036
30	10	0.07563	+0.5573	+0.3674	1.00033
31	17	0.79054	+0.1079	+0.1021	1.00054
32	13	0.38202	−0.3647	+0.2537	1.00042
33	21	1.19906	−0.1489	−0.0495	1.00066
34	20	1.09693	−0.0847	−0.0116	1.0006
35	11	+0.17776	+0.4931	+0.3295	1.00036
36	8	−0.12863	0.6857	+0.4432	1.00027
37	17	0.79054	+0.1079	+0.1021	1.00054
38	16	0.68841	+0.1721	+0.1400	1.00051
39	7	−0.23076	+0.7499	+0.4811	1.00021
40	17	0.79054	+0.1079	+0.1021	1.00054
		21.00	10.99	8.02	

Tablo 9'dan görüldüğü gibi $P_{1i} + P_{2i} + P_{3i} = 1, i = 1 ...., 40$ özelliği gerçekleşmiştir.

İkinci özellik için ise $\overline{P}_j$, j = 1, 2, 3 bağıl frekanstan faydalanılarak

$P_j = \frac{n_j}{n}$ ifadesinden $\quad P_j = \frac{n_j}{n} = \frac{n}{n} = 1$ bulunur.

Örnekte $\overline{P}_1 = 0.525$; $\overline{P}_2 = 0.275$ ve $\overline{P}_3 = 0.20$'dir. Toplamı alınırsa. $0.525 + 0.275 + 0.20 = 1$ edecektir.

c — özelliği ise ikinci özellikten elde edilmektedir.

$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 1$ ifadesinde P_1, P_2 ve P_3 için

$$(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \overline{X}) + (\widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_3 \overline{X}) + (\widehat{\beta}_4 + \widehat{\beta}_5 \overline{X}) = 1$$

olacaktır. Buradan da

$-\infty V^2\eta$

$$(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_4) + (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_5) \,.\, \overline{X} = 1 \text{ yazılabilir.}$$

Tercih modellerinde $X_i > 0$ olacağından $\overline{X} > 0$'dır. Dolayısıyle yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi

$$(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_4) = 1 \text{ ve } (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_5) = 0 \text{ koşullarına bağlıdır.}$$

$\widehat{\beta}_j$, j = 1, 3, 5 ise şöyle hesaplanmaktadır: (Pinyck-Rubinfeld: 302)

$$\widehat{\beta}_j = \frac{\Sigma X_i Y_{ji} - n \overline{X}\, \overline{Y}_j}{(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\Sigma (Y_{ji} - \overline{Y}_j)\,(X_i - \overline{X})}{(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\Sigma (P_{ji} - \overline{P}_j)\,(X_i - \overline{X})}{(X_i - \overline{X})^2}$$

$$\widehat{\Sigma}_j \widehat{\beta}_j = \frac{1}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2} \left[\Sigma (P_{ji} - \overline{P}_j)\,(X_i - \overline{X}) \right]$$

$$= \frac{1}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2} \left[(P_{1i} - \overline{P}_1)\,(X_i - \overline{X}) + + (P_{2i} - \overline{P}_2)\,(X_i - \overline{X}) + \right.$$

$$\left. (P_{3i} - \overline{P}_3)\,(X_i - \overline{X}) \right] = \frac{\Sigma (P_{1i} + P_{2i} + P_{3j})\,(X_j - \overline{X})}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}$$

$$- \frac{(\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3)\, \Sigma (X_i - \overline{X})}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2} \quad ; \quad (P_{1i} + P_{2i} + P_{3j}) = 1 \quad ; \quad \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 \; {}_{+1}$$

$$\Sigma \beta_j = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X}) - \Sigma (X_i - \overline{X})}{\Sigma (X_i - \overline{X})^2} = 0$$

Bu sonuçtan

$$(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_4) \quad + \quad (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_5) \;.\; \bar{X} = 1$$

olabilmesi için $(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}^2 + \widehat{\beta}_4) -= 1$ olma koşulu doğmaktadır. Elde edilen bu sonuçlar probleme uygulanırsa

$$\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_3 + \widehat{\beta}_5 = \quad 0.10213 - 0.0642 - 0.0379 = 0 \text{ ve}$$

$$\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_2 + \widehat{\beta}_4 = -\ 0.94567 + 1.1993 + 0.7464 = 1$$

bulunur.

Bu ispatlardan hareketle k tercih için (k-ı) regresyon denkleminin yeterli olduğu görülmektedir, çünkü

$$\sum^{k-1} \widehat{\beta}_{j-1} + \widehat{\beta}_j = 0 \quad , \; j = 1, 3, 5, 7, ... \text{ ve } \sum^{0} \widehat{\beta}_m = 1 \quad m = 0, 2, 4, ...$$

söz konusudur.

4) Uygulamadan Bazı Örnekler

Özellikle 1960'lı yıllarda çok yaygın kullanılan çoklu tercih modellerinin ilk örnekleri arasında Fisher'in (1962) ve Lee'nin (1963) araştırmaları sayılabilir. Doğrusal Olasılık Modeli'nin bir uzantısı olan «İkiz Doğrusal Olasılık Yaklaşımı'na» (Goldberger: 252) örnek olması bakımından Fisher'in makalesine değinilecek ve makalenin ilginç görünen yönleri tartışılmaya çalışılacaktır.

Fisher, Amerika'da 1957 yılında dayanıklı tüketim malı satın alma konusunda 1052 birim ile anket yaparak bunların 762 tanesini değerlendirebilir bulmuştur. Bu örnek birim sayısını kullanarak da sekiz ayrı regresyon elde etmiştir. Denklemlerde 17 bağımsız değişken bulunmaktadır. Bu değişken gelir ve banka hesabı gibi mali, konut sahipliği gibi kişisel ve demografik olmak üzere üç grupta toplanabilir.

Birinci denklem 762 birimin 1957 yılındaki satın aldığı dayanıklı tüketim mallarının tutarına ilişkin regresyondur. İkinci denklem ise dayanıklı tüketim malı satın alma kararını veren 359 kişiden elde edilen satın alma olasılığıdır. Bu regresyon için $\bar{R}^2 = 0.1336$'dır (Fisher: 67). Üçüncü denklem ise ikinci denklem ile bağlantılı olup satın alma kararı veren 359 kişinin ödemelerinin regresyonudur. Bu bağlantı nedeniyle

«İkiz Doğrusal Olasılık Modeli» söz konusudur. Burada da $R^2 = 0.2194$'dür.

Çalışmadaki dördüncü denklem ikinci denklem için $Y_i = 1$ evet yanıtını veren 359 kişinin peşin tercih olasılığını vermektedir. $Y_i = 1$, peşin, $Y_i = 0$, taksitle, verilmiştir. $\bar{R}^2 = 0.1865$.

Bağımsız değişken sayısının bu kadar yüksek olduğu bir modelde belirginlik katsayılarının düşüklüğü dikkati çekmektedir. Buna rağmen bir çalışma dışında (Theil-Kosobud 1968: 50-59) bu konu 1970 yılına dek ilgi toplamamıştır. Bu konuya ilk kez Neter ve Maynes (1970: 501-509) açıklık getirmişlerdir.

İkinci husus ise satın almaya ilişkin doğrusal olasılık modeli ile taksit yapma olasılığını veren model arasındaki ilişkidir. Fisher'in getirdiği çözüm bu iki modeli ayrı ayrı ele alarak çözmektir. Başka bir deyişle satın alma ile taksit yapma arasındaki ilişki gözardı edilmektedir. Nitekim Zellner-Lee (1965) çoklu tercih modellerinde de bu gibi ilişkileri gözönüne alan bir genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ortaya koymuşlardır.

Bu iki eksikliğine rağmen Fisher'in modeli gene de bir yenilik sayılabilir:

5) Doğrusal Olasılık Modellerinin Eleştirisi

Nitel bağımlı değişkenlerin ilk uygulamalarını oluşturan anılan modeller aslında çeşitli yönlerden eksiktir. Bu eksiklikler ve düzeltme yöntemleri sırasıyla ele alınacaktır.

a) Modellerde, KDNR modellerinde olduğu gibi, E.K.K. yönteminin uygulanması için $E(\varepsilon_i) = 0$ varsayımı gerekmektedir.

Bu varsayımın geçerliliği, en azından X_i'nin sınırlı bir tanım aralığı içinde tartışma dışıdır (kar. : Fox: 303).

Buna karşılık Y_i'nin Bernouilli karakteri ε_i'yi de aynı karaktere sahip kılacak, bu da hata paylarını normal dağıtmayacaktır. Böylece hata paylarının olasılık dağılımı aşağıdaki gibi olacaktır:

TABLO : 10

Y_i	ε_i	$P(\varepsilon_i)$
0	$-(\beta_0 + \beta_1 X_i)$	$1 - P_i$
1	$1 - (\beta_0 + \beta_1 X_i)$	P_i
		1

Buradan da görüldüğü gibi doğrusal olasılık modelinin hata payları normal dağılmamaktadır (Gujarati 1984: 314).

Hata paylarının normal dağılmaması E.K.K. yönteminin uygulanması için bir sakınca teşkil etmemektedir, çünkü E.K.K. bir varsayım gerektirmemektedir.

Normallik varsayımı parametreler için hipotez testleri yapılmasında ve güven sınırlarının belirlenmesinde gereklidir. Buradan da tercih modellerinde hipotez testleri yapılamaz ve güven sınırları hesaplanamaz şeklinde bir anlam çıkmaktadır. Amemiya (1985: 92) ve Malinvaud (1970: 250-251) Merkezi Limit Kuramı'ndaki Lindeberg-Feller koşuluna dayanarak örnek birim mevcudu arttıkça hata paylarının limitte normal dağıldıklarını göstermişlerdir. Parametre tahminleri de hata paylarının doğrusal bağlantısı olduğundan onlar da normal dağılacaklardır. Buna göre de büyük örnekler için doğrusal olasılık modellerinin KDNR modelindeki normallik varsayımını gerçeklediği kabul edilebilir (Gujaratı: 314). Bu şekilde örnek birim mevcudunu arttırarak bu yetersizliği ortadan kaldırmak mümkündür.

b) Hata payları heteroskedastiktir. Hata paylarının varyansı

$\text{Var } \varepsilon_i = \text{Var } Y_i = E(\varepsilon_i^2) - [E(\varepsilon_i)]^2 = E(\varepsilon_i^2)$ dır. Böylece

$$\text{Var } \varepsilon_i = [-(\beta_0 + \beta_1 X_i)][1 - (\beta_0 + \beta_1 X_i)] + [1 - (\beta_0 + \beta_1 X_i)^2] [\beta_0 + \beta_1 X_i]$$

$$\text{Var } \varepsilon_i = (-P_i)^2 (1 - P_i) + (1 - P_i)^2 P_i = P_i^2 - P_i^3 + [1 - 2 P_i^2]. P_i$$

$$= P_i^2 - P_i^3 + P_i - 2 P_i^2 + P_i^3 = P_i + P_i^2 = P_i (1 - P_i) = (\beta_0 + \beta_1 X_i) [1 - (\beta_0 + \beta_1 X_i)]$$

P_i'nin 0 veya 1'e yakın değerleri için bağıl olarak düşük varyanslar söz konusu olurken P_i'nih 0.5'e yakın değerlerinde varyans daha yüksektir (Pindyck-Rubinfeld: 276).

Hata payları sistematik olarak P_i, dolayısıyla da X_i ile değişmektedir. Bu nedenle de modelde $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ söz konusu değildir (Judge ve diğerleri 1985: 757).

Heteroskedasite kaçınılmaz olmaktadır.

Böylece parametre tahmin edicileri sistematik hatasız ve tutarlı olmakla birlikte küçük örneklerde etkin değildir. Büyük örnekler için de asimtotik etkinlik özelliği yitirilmektedir.

Ancak bu da düzeltilebilecek bir yetersizliktir. Nitekim gerek Goldberger, gerekse Zellner ve Lee, heteroskedasiteyi düzeltmek için ağırlıklı en küçük kareler yöntemini önermişlerdir.

Goldberger heteroskedasite için iki aşamalı en küçük kareler önermiştir.

— E.K.K. yöntemi ile $\widehat{Y}_i$, i = 1, 2, ..., n hesaplanır.

— Sonra da $_i = \widehat{Y}_i\ (1 - \widehat{Y}_i)$ bulunur.

— Hata payları bilinemediğinden hata paylarının varyans-kovaryans matrisi bulunamamaktadır. Bunun yerine W_i'lerin köşegende yer aldığı hata payları varyans-kovaryans matrisinin tahmini olan kalıntıların varyans-kovaryans matrisi oluşturulur:

$$W = \begin{bmatrix} \widehat{Y}_1\ (1 - \widehat{Y}_1) & & & \\ & \widehat{Y}_2\ (1 - \widehat{Y}_2) & & \\ & & \widehat{Y}_3\ (1 - \widehat{Y}_3) & \\ & & & \widehat{Y}_n\ 1 - \widehat{Y}_n) \end{bmatrix}$$

Ağırlıklı en küçük karelerde tahmin ediciler ve bunların standart hataları ise

$$b = (X\ W^{-1} X)\ {-1}\ \ (X\ W^{-1}\ Y)$$

$$S_b^2 = \ S_e^2\ (X\ W^{-1}\ X)^{-1}$$

ile bulunmaktadır (Johnston: 292).

Yöntem Tablo 2 için uygulanacak olursa,

$$\widehat{Y} = -\ 0.092192 + 0.03152825\, X$$

denklemi yardımı ile şu sonuçlara ulaşılacaktır:

TABLO : 11

i	X_i	$\widehat{Y}_i$	$(1-\widehat{Y}_i)$	$W_i=\widehat{Y}_i\,(1-\widehat{Y}_i)$	$W_i^{-1}=(1/W_i)$
1	14	0.34920	0.65080	0.22726	4.4003
2	29	0.82212	0.17788	0.14624	6.8382
3	6	0.09697	0.90303	0.08757	11.4196
4	25	0.69601	0.30399	0.21158	4.7263
5	18	0.47531	0.52469	0.24939	4.0098
6	4	0.03392	0.96608	0.03277	30.5196
7	18	0.47531	0.52469	0.24939	4.0098
8	12	0.28614	0.71386	0.20246	4.8956
9	22	0.60142	0.39588	0.23916	4.1717
10	6	0.09697	0.90303	0.08757	11.4196
11	30	0.85365	0.14635	0.12493	8.0044
12	11	0.25461	0.74539	0.18978	5.2691
13	30	0.85365	0.14635	0.12493	8.0044
14	5	0.06544	0.93456	0.06116	16.3502
15	20	0.53837	0.46163	0.24853	4.0237
16	13	0.31767	0.68233	0.21676	4.6135
17	9	0.19156	0.80844	0.15486	6.4573
18	32	0.91671	0.08329	0.05635	13.0967
19	24	0.66448	0.33552	0.22294	4.4854
20	13	0.31767	0.68233	0.21676	4.6135
21	19	0.50684	0.49316	0.24995	4.0007
22	4	0.03392	0.96608	0.03277	30.5196
23	28	0.79059	0.20941	0.16556	6.0403
24	22	0.60142	0.39858	0.23971	4.1717
25	8	0.16003	0.83997	0.13442	7.4394

Ağırlıklı E.K.K. normal denklemler yardımıyla bulunmak istenilirse

$$\sum W_i^{-1} Y_i = \hat{\beta}_0^{*} \sum W_i^{-1} + \hat{\beta}_1^{*} \sum W_i^{-1} X_i$$

$$\sum W_i^{-1} X_i Y_i = \hat{\beta}_0^{*} \sum W_i^{-1} X_i + \hat{\beta}_1^{*} \sum W_i^{-1} X_i^2$$

yazılabilir (kar. : Neter-Wasserman: 136).

Yapılan hesaplamalara göre

$\sum W_i^{-1}\ Y_i=68.3019 \quad \sum (W_i^{-1})^2=3126.264885 \quad \sum W_i^{-1}=213.5004$

$\sum W_i^{-1} .X_i.Y_i=1642.3402 \quad \sum W_i^{-1} .\ X_i=2855.833 \quad \sum W_i^{-1}.\ X_i^2=60504.3844$

bulunmuştur. Buna göre de A.E.K.K. tahminleri

$$\hat{\beta}_0^* = \frac{\begin{vmatrix} 68.3019 & 2855.833 \\ 1642.3402 & 60504.3844 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 213.5004 & 2855.833 \\ 2855.833 & 60504.3844 \end{vmatrix}} = -\frac{557684.9275}{4761928.147} = 0.1171132596$$

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\begin{bmatrix} 213.5004 & 68.3019 \\ 2855.833 & 1642.3402 \end{bmatrix}}{4761928.147} = 0.032671 \quad \text{olup regresyon da}$$

$$\hat{Y}= -0.1171132596 + 0.032671\ X$$

dir. Aynı problem için Goldberger yaklaşımı ile çözülecek olursa:

$$\hat{\beta}^* = (X\quad W^{-1}.X)^{-1}\ (X\quad W^{-1}\ Y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots . 1 \\ X_1 & X_2 \ldots . X_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/W_1 & & \\ & 1/W_2 & \\ & & 1/W_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & X_{25} \end{bmatrix}$$

$$(X\quad W^{-1}X) = \begin{bmatrix} \sum W_i^{-1} & \sum W_i^{-1}\ .\ X_i \\ \sum W_i^{-1}.\ X_i & \sum W_i^{-1}\ X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 213.5004 & 2855.833 \\ 2855.833 & 60504.3844 \end{bmatrix}$$

En küçük kareler ile ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri ile bulunan parametre tahminleri ile bunların standart hatalarını karşılaştırmak amacı ile aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

$$(X \quad W^{-1} \; Y) = \begin{vmatrix} W_i^{-1} & Y_i \\ W_i^{-1} . X_i Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68.3019 \\ 1642.3402 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 213.5004 & 2855.833 \\ 2855.833 & 60504.3844 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\beta}_0^* \\ \hat{\beta}_1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68.3019 \\ 1642.3402 \end{vmatrix}$$

$$213.5004 \; \hat{\beta}_0^* + 2855.833 \; \hat{\beta}_1^* = 68.3019$$

$$2855.833 \; \hat{\beta}_0^* + 60504.3844 \; \hat{\beta}_1^* = 1642.3402$$

$$\hat{\beta}_0^* = -0.1171132596 \qquad \hat{\beta}_1^* = 0.032671$$

Öte yandan SSE, hata paylarına ilişkin değişkenlikte

$$SSE = \sum W_i^{-1} . Y_i^2 - \left[\hat{\beta}_0^* \quad \hat{\beta}_1^* \right] \begin{vmatrix} \sum W_i^{-1} & Y_i \\ \sum W_i^{-1} & X_i Y_i \end{vmatrix} = SST - SSR$$

yolu ile hesaplanabilir. $\sum W_i^{-1} \; Y_i^2 = \sum W_i^{-1} \; . Y_i$ olduğu gözönüne alınarak

$$SSE = 68.3019 - \left[-0.117113 \quad 0.032671 \right] \begin{bmatrix} 68.3019 \\ 1642.3402 \end{bmatrix}$$

SSE=68.3019-45.6594986=22.6424014 sonucuna ulaşılarak

$S_e^2 = SSE/23 = 0.9844$ bulunur.

$$(X\ W^{-1}X) = \begin{vmatrix} 213.5004 & 2855.833 \\ 2855.833 & 60504.3844 \end{vmatrix} \quad (X\ W^{-1}X)^{-1} = \frac{1}{4761928.147} \begin{bmatrix} 60504.3844 & -2855.833 \\ -2855.833 & 213.5004 \end{bmatrix}$$

$$(X\ W^{-1}X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0127058 & -0.0005997 \\ -0.0005997 & 0.00004483 \end{bmatrix}$$

$$S^2_{\beta_0^*} = (0.9844)\ (0.0127058) = 0.0125075895 \qquad S_{\beta_0^*} = 0.111837$$

$$S^2_{\beta_1^*} = (0.9844)\ (0.00004483) = 0.0000441307 \qquad S_{\beta_1^*} = 0.0066436$$

Böylece A.E.K.K. yöntemine göre regresyon denklemi

$$\hat{Y} = \underset{(0.1118)}{-0.117113} + \underset{(0.00664)}{0.032671}\ X$$

olacaktır. Yeni denkleme göre yapılan tahminler ise aşağıda gösterilmektedir:

TABLO:12

Ağırlıklı En Küçük Kareler ile Tahminler

i	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	i	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$
1	14	0	0.34028	13	30	1	0.86302
2	29	0	0.83034	14	5	0	0.04624
3	6	0	0.07891	15	20	1	0.53631
4	25	1	0.69966	16	13	0	0.30761
5	18	1	0.47096	17	9	0	0.17693
6	4	0	0.01357	18	32	1	0.92836
7	18	0	0.47096	19	24	0	0.66699
8	12	0	0.27494	20	13	1	0.30761
9	22	1	0.60165	21	9	0	0.17693
10	6	0	0.07891	22	4	0	0.01357
11	30	1	0.86302	23	28	1	0.79767
12	11	0	0.24227	24	22	1	0.60165
				25	8	1	0.14426

TABLO : 13

	$\hat{\beta}_0$	$S_{\hat{\beta}_0}$	$\hat{\beta}_1$	$S_{\hat{\beta}_1}$
E.K.K.	−0.9457	0.1228	0.10213	0.0082
A.E.K.K.	−0.117113	0.1118	0.032671	0.0064

Her iki yöntem ile bulunan parametre tahmin değerleri birbirinden çok farklı değildir, başka bir deyişle A.E.K.K. yönteminin uygulanması sonucu çok fazla bir değişiklik olmamıştır. Buna karşın standart hatalar küçülmüştür. Bu azalma özellikle bağıl önemi fazla olan $\widehat{\beta^1}$ için yüksektir.

TABLO : 14

i	X_i	Y_i	$\widehat{Y_i}$	$(1-\widehat{Y_i})$	W_i	W_i^{-1}	i	X_i	Y_i	$\widehat{Y_i}$	$(1-\widehat{Y_i})$	W_i	W_i^{-1}
1	3	0	—0.1286	1.1286	—0.1451	—6.8900	21	22	1	1.3012	—0.3012	—0.3919	—2.5515
2	16	1	0.6884	0.3116	0.2145	4.6619	22	16	1	0.6884	0.3116	0.2145	4.6619
3	18	1	0.8927	0.1073	0.0958	10.4399	23	12	0	0.2799	0.7201	0.2016	4.9614
4	11	0	0.1777	0.8223	0.1461	6.8436	24	11	0	0.1777	0.3223	0.1461	6.8436
5	12	0	0.2799	0.7201	0.2016	4.9614	25	16	1	0.6884	0.3116	0.2145	4.6619
6	19	1	0.9948	0.0052	0.0051	193.3129	26	11	0	0.1777	0.3223	0.1461	6.3438
7	20	1	1.0969	—0.0969	—0.1063	—9.4032	27	20	1	1.0969	—0.0969	—0.1063	—9.4032
8	13	0	0.3820	0.6130	0.2361	4.2359	23	18	1	0.8927	0.1073	0.0953	10.4399
9	9	0	—0.0265	1.0265	—0.0272	—36.7647	29	11	0	0.1777	0.3223	0.1461	6.3436
10	10	0	0.0756	0.9244	0.0699	14.3093	30	10	0	0.0756	0.9244	0.0699	14.3093
11	17	1	0.7905	0.2095	0.1656	6.0383	31	17	1	0.7905	0.2095	0.1656	6.0363
12	13	1	0.8927	0.1073	0.0958	10.4399	32	13	0	0.3320	0.6130	0.2361	4.2359
13	14	0	0.4841	0.5159	0.2497	4.0040	33	21	1	1.1991	—0.1991	—0.2387	—4.1886
14	20	1	1.0969	—0.0969	—0.1063	—9.4082	34	20	1	1.0969	—0.0969	—0.1063	—9.4082
15	6	0	—0.3329	1.3329	—0.4437	—2.2537	35	11	0	0.1777	0.8223	—0.1461	6.8433
16	19	1	0.9948	0.0052	0.0052	193.3129	36	8	0	—0.1286	1.1238	—0.1451	—6.3900
17	10	1	0.6884	0.3116	0.2145	4.6619	37	17	1	0.7905	0.2095	0.1656	6.0383
18	10	0	0.0756	0.9244	0.0699	14.3093	33	16	1	0.6884	0.3116	0.2145	4.6619
19	3	0	—0.1286	1.1286	—0.1452	—6.3900	39	7	0	0.2308	0.7692	0.1775	5.6328
20	13	1	0.8927	0.1073	0.0958	10.4399	40	17	1	0.7905	0.2095	0.1656	6.0383

Bağımlı değişkenlerin tahmin değerlerinin değişim aralığının 0.2 ilâ 0.8 arasında olması halinde hata paylarına ilişkin varyanslar çok az farkedileceğinden A.E.K.K. yönteminin parametre tahminleri üzerinde fazla etkisi bulunmamaktadır (Neter-Wasserman: 328). Tablo 2'de de $\widehat{Y}_i$ olasılıklarının hemen hemen tümü anılan sınırlar içinde kalmaktadır.

A.E.K.K. yöntemini bu kez de Tablo 5'deki verilere uygulayalım:

$$\sum W_i^{-1} = 476{,}9671351 \qquad \sum W_i X_i = 8605.0019$$

$$\sum W_i^{-1}.X_i^2 = 155887.1801 \quad \sum W_i Y_i = 431.4572 \qquad \sum W_i X_i Y_i = 7984.3698$$

$$\begin{bmatrix} 476.9671351 & 8605.0019 \\ 8605.0019 & 155887.1801 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^* \\ \hat{\beta}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 431.4752 \\ 7984.3698 \end{bmatrix}$$

$$476.967351\,\hat{\beta}_0^* + 8605.0019\,\hat{\beta}_1^* = 431.4752$$

$$8605.0019\,\hat{\beta}_0^* + 155887.1801\,\hat{\beta}_1^* = 7984.3698$$

$$\hat{\beta}_0^* = \frac{\begin{vmatrix} 431.4752 & 8605.0019 \\ 7984.3698 & 155887.1801 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 476.9671351 & 8605.0019 \\ 8605.0019 & 155887.1801 \end{vmatrix}} = -\frac{1444065.951}{307003.0382} = -4.7037$$

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\begin{matrix} 476.9671351 & 431.4752 \\ 8605.0019 & 7984.3698 \end{matrix}}{307003.0382} = \frac{95437.07328}{307003.0382} = 0.31087$$

$$\hat{Y} = -4.7037 + 0.31087$$

TABLO:15
Parametre Tahminlerinin Karşılaştırılması

	E.K.K.	A.E.K.K.
$\hat{\beta}_0$	-0.9457	0.10213
$\hat{\beta}_1$	-4.7037	0.31087

Tablo 15'den görüldüğü gibi parametre tahminleri önemli derecede değişmiştir. Bunun nedeni de, tabloda görüldüğü gibi, $\widehat{Y}_i$'lerin çoğunun değerinin 0.2 ile 0.8 aralığının dışında kalmasıdır.

Yeni tahminler ise aşağıdaki gibi olacaktır.

TABLO : 16

Ağırlıklı En Küçük Karelere Göre Tahminler

i	X_i	$\widehat{Y}_i$	i	X_i	$\widehat{Y}_i$
1	8	—2.21674	21	22	2.13544
2	16	0.27022	22	16	0.27022
3	18	0.89196	23	12	—0.97326
4	11	—1.28413	24	11	—1.28413
5	12	—0.97326	25	16	0.27022
6	19	1.20283	26	11	—1.28413
7	20	1.5137	27	20	1.5137
8	13	—0.66239	28	18	0.89196
9	9	—1.90587	29	11	—1.28413
10	10	—1.595	30	10	—1.595
11	17	0.58109	31	17	0.58109
12	18	0.89196	32	13	—0.66239
13	14	—0.35152	33	21	1.82457
14	20	1.5137	34	20	1.5137
15	6	—2.83848	35	11	—1.28413
16	19	1.20283	36	8	—2.21674
17	16	0.27022	37	17	0.58109
18	10	—1.595	38	16	0.27022
19	8	—2.21674	39	7	—2.52761
20	18	0.89196	40	17	0.58109

A.E.K.K. yönteminin uygulanması ile heteroskedasite düzeltilmiş olmaktadır. Bununla beraber Goldberger ön regresyon diyebileceğimiz E.K.K. yöntemi ile Y_i elde edip Var $(\varepsilon_i) = \widehat{Y}_i\ (1-\widehat{Y}_i)$ ifadesini W matrisinin köşegen elemanları olarak almaktadır. $\widehat{Y}_i$'lerin 0 ilâ 1 arasında yer almamasında bu varyanslardan bazılarının da negatif olması da kaçınılmaz olmaktadır (Fox: 304).

Değinilmesi gereken ikinci husus da Goldberger yaklaşımının $\widehat{Y}_i$'nin [0,1] aralığı dışında bulunmasını engelleyememesidir. Böyle durumlarda da $\widehat{Y}_i$'nin olasılık olarak yorumlanmasının imkânı bulunmamaktadır.

Zellner ve Lee de benzer bir yaklaşım kullanarak A.E.K.K. ile bulunan Aitken tahmin edicileri için

$$b = (X \quad V^{-1} X)^{-1} \quad (X \; V \; y)$$

önermişlerdir. Burada kovaryans-kovaryans matrisi için W yerine V yazılmasının nedeni ise V'nin W'den farklı olarak

$$V = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 (1-\hat{Y}_1)/n_1 & & & \\ & \hat{Y}_2(1-\hat{Y}_2)/n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{Y}_k(1-\hat{Y}_k)/n_k \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmasıdır. V'nin W'den farkı verilerin n_j, $j = 1, \ldots, k$ ile gösterilen ve hücre olarak adlandırılan (Amemiya 1981: 1493) gruplar altında toplanmasıdır. O halde hücre aynı X_i değerindeki Y'leri kapsamaktadır. Kuşkusuz

$\Sigma \, n_j = n$ toplam birim sayısıdır.

Diğer taraftan W_j'ler de $\widehat{Y_i}$ $(1-\widehat{Y_i})$'ye dayandığından Goldberger yaklaşımına getirilen eleştiriler burada da geçerliliğini korumaktadır.

$\widehat{Y_i}$'lerin tümünün 0 ilâ 1 arasında yer aldığını varsaysak bile A.E.K.K.'nin ikame edilebilirliği tartışılabilir, çünkü yöntem örnek birim mevcudunun istenildiği kadar arttırılabildiği büyük örnekler için etkin olduğu halde küçük örneklerde etkinlik söz konusu değildir (Pindyck - Rubinfeld 276). Ayrıca da spesifikasyon hatalarına da duyarlı olan A.E.K.K. yöntemi gelişigüzel kullanılmamalıdır. Buna karşılık E.K.K.' in uygulanması halinde de parametre tahminleri için varyans-kovaryansı veren

$$\text{Var-kov } (\hat{\beta}) = s^2 . (X'X)^{-1} \quad s^2 = \frac{e'e}{n-k} = \frac{(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})}{n-k}$$

formülü hem sistematik hatalı, hem de tutarsız tahminlere yol açmaktadır. Bundan ötürü de

$$\text{Var-kov } (\hat{\beta}) = (X' X)^{-1} X' W X (X' X)^{-1}$$

formülü ile hesaplanmalıdır (Zellner-Lee: 387).

c) Bağımlı değişkenin nitel olup 0, 1 değerleri alması halinde belirginlik katsayısının KNDR modelinde olduğu gibi kullanılamayacağına ilişkin Neter-Maynes ile başlatılan çalışmalar henüz kesinlik kazanmamıştır.

Neter-Maynes (1970: 504-505) belirginlik katsayısı R^2'nin tercih modellerinde hiçbir zaman 1 olamayacağını göstermişlerdir. Buna karşılık almaşık bir ölçü de önermemektedirler. Morrison (1972: 68) ise olaya daha farklı bir açıdan yaklaşarak R^2'yi ölçü olarak kabul etmiş, R^2'nin düşük olma nedenlerini açıklayarak 1 yerine P_i'lerin olasılık yoğunluk fonksiyonuna bağlı olarak bir üst sınır bulma çabasına girmiştir. Örneğin uniform dağılım halinde R^2'nin üst sınırı 1/3'dür.

Theil ise R^2'nin ikamesi olarak

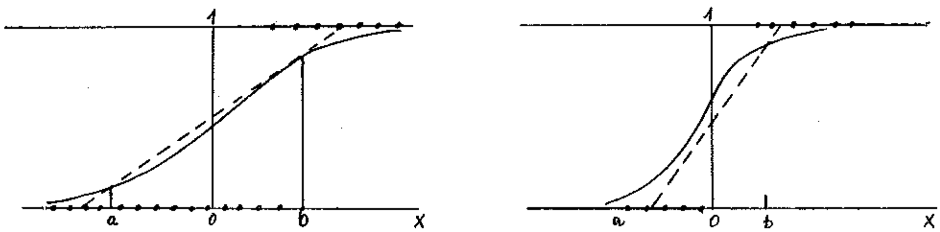
$$H(Y) = \sum_{h=1}^{m} W_h \cdot P_h \ln \frac{1}{P_h} + \sum W (1-P_h) \ln \frac{1}{1-P_h}$$

ortalama koşullu entropi ölçüsünü teklif etmiştir. Neter-Maynes ise bu ölçüyü sınırlı bilgi sağladığı gerekçesiyle eleştirmişlerdir. Aslında ölçüye getirilebilecek başka bir eleştiri de ters bir ölçü olmasıdır.

R^2'yi ikame edecek çeşitli ölçüler önerilmesine rağmen bunların rağbet bulmamasının sebebi R^2'nin bilgi sağlamasının yanında test istatistiği olarak kullanılabilmesidir. Bunun için de düşük kalması pahasına doğrusal olasılık modellerinde R^2'nin kullanılması şaşırtıcı olmamalıdır.

d) Çoklu tercih problemine çözüm getirilirken her üç denklemdeki X_i'lerin aynı olduğu varsayılmıştır. X_i'ler aynı olmadığı takdirde olasılıkların toplamı 1 çıkmayabilir. Bundan dolayı da E.K.K. böyle durumlar için uygun bir çözüm tekniği olmamaktadır.

e) İncelenmesi gereken başka bir konu da doğrusal olasılık modellerinin hangi hallerde temsil özelliği olduğudur. Bu özellik diğer koşulların yanı sıra aynı zamanda X_i'nin değişim aralığına bağlıdır.



ŞEKİL : 1

İkili Tercih Modelleri

Durumu basitleştirmek için tek bağımsız değişkenli ikili tercih modelini de alalım. Şekil 1'den görüldüğü gibi $Y_i = 0$ ve $Y_i = 1$ tekabül ettirilen X_i değerlerinin değişim aralığı modelin uygunluğunu belirleyici bir rol oynamaktadır. $Y_i = 0$ için X_i'lerin a değeri etrafmda, $Y_i = 1$ için X_i'lerin b etrafında toplanması halinde doğrusal olasılık modelleri uygun sonuçlar verecektir (kar. : Dhrymes: 332). Halbuki, Şekil 1/b'de olduğu gibi $Y_i = 0$ karşılığı X_i'nin a ile 0, Y_i = 1'e tekabül eden X_i'nin de b'nin dışında yer alması uygunluğu güçleştirmektedir. Böyle durumlarda regresyon denklemi ile birikimli dağılım fonksiyonu arasında uyum sağlanamamaktadır.

$$P = \begin{cases} 0 & 0 > \beta_0 + \beta_1 X \\ \beta_0 + \beta_1 X & 0 \leq \beta_0 + \beta_1 X \leq 1 \\ 1 & \beta_0 + \beta_1 X > 1 \end{cases}$$

Bu nedenle de doğrusal olasılık modelleri uçlarda son derece tutarsız ve doğru olmayan sonuçlar vermektedir (Johnston: 427).

Durum böyle olunca örnek birimleri içinde uç değerlerin çoğunlukta olması halinde ana kütle regresyon denkleminin eğimini veren ${}_1$ parametresinin olduğundan daha düşük veya daha yüksek tahmin edilmesi kolaylıkla mümkündür.

f) Ayrıca doğrusal olasılık modelinin olasılık olarak öngörü için kullanılması halinde modelin en büyük eksikliği ortaya çıkmaktadır. O da X_i'nin geniş bir değişim aralığmda yer alması halinde $P_i \varepsilon [0, 1]$ koşulunun gerçekleşmemesi, bunun sonucunda da olasılık şeklinde yorumlanamamasıdır.

Bu eksikliğe karşı bazı öneriler getirilmiştir. Bunlardan birincisi 0'dan küçük değerleri 0, 1'den büyük değerleri de 1 kabul etmektir. Ancak bu çözüm pek gerçekçi değildir, çünkü meydana gelemeyebilen bir olaya 1 olasılığı, meydana gelebilecek başka bir olaya da 0 olasılığı tekabül ettirilebilir (kar. : Pindyck-Rubinfeld: 277).

İkinci bir almaşık ise X_i ile P_i arasındaki ilişkiyi $[0, 1]$ aralığına kısıtlamaktır. Mantık açısından doğru gözükmesine rağmen Nerlove ve Press (1973) modelin $P_i = 0$ ve $P_i = 1$ keskin değişmesi nedeniyle son derece anlamsız tahminler verdiklerine işaret etmişlerdir.

Son almaşık ise kısıtlanmış en küçük kareler uygulamaktır. Burada $0 \leqslant \widehat{Y}_i \leqslant 1$ kısıtlayıcı koşulu altında ve parametreleri yeniden tahmin edilmektedir. Bu şekilde bulunan parametre tahminlerinin varyansları da daha düşük olacaktır. Öte yandan parametre tahminleri sistematik hatalı da olabilmektedir. Bu nedenle doğan E.K.K.'in kullanılması daha doğrudur. (kar. : Pindyck-Rubinfeld: 278). Ayrıca, herhangi bir X_i için yapılacak tahmin için yöntem tatmin edici bir sonuç vermeyecektir (Judge ve diğerleri 1985: 759).

6) SONUÇ

Açıklanmaya çalışıldığı gibi, nitel bağımlı değişkenli modellerin bir şekli olan doğrusal olasılık modelleri çeşitli yönlerden eksiktir.

Bununla beraber birim sayısının yeteri kadar büyük olması halinde bu eksiklikler büyük ölçüde giderilebilmekte ve normal dağılımın özelliklerinden yararlanılmaktadır. Bu şekilde hipotez testlerinin yapılması ve güven sınırlarının hesaplanabilmesi de imkân dahiline girmektedir.

Vurgulanması gereken başka bir nokta da nitel bağımlı değişkenli modellerde araştırıcının bazen bağımsız değişkenler üzerinde denetime sahip olabilmesidir. Böyle bir olanak söz konusu olduğunda seçilen X_i değerlerine karşılık gelen hücrelerdeki birim sayısının asgari 30 olması regresyonun verilere uygunluğunu önemli ölçüde yükseltecektir.

Diğer taraftan model için herkesçe kabul edilen bir uygunluk ölçüsü getirilememesi önemli bir zayıflıktır. Fakat konunun da çok yeni olduğu gözden uzak tutulmamalıdır.

Doğrusal olasılık modelinin en büyük zayıflığı ise $\widehat{Y}_i < 0$ ve/veya $\widehat{Y}_i > 1$ tahmin değerlerine erişebilmesidir. Bu konu da henüz çözümlenmiş değil. Böyle bir durumda doğrusal olasılık modeli probit modeli ile ikame edilecek ve probit modeline özgü hesaplama zorlukları ile karşı karşıya kalınacaktır. Diğer bir modeli oluşturan logit ile doğrusal olasılık modeli ile bulunan parametre tahminlerinin aşağı-yukarı aynı olduğu saptanmıştır (Pindyck-Rubinfeld: 294).

K A Y N A K Ç A

1) Amemiya Takeshi, «Qualitative Response Models: A Surwey», Journal of Economic Literature, 19 (December 1981), s. 1483-1536
2) ————. «Advanced Econometrics, Basıl Blackwell, Oxford, 1985, s. 267-318
3) Chow Gregory, Econometrics, Mc Graw Hill, ISE, Tokyo, 1983, s. 253-264
4) Dhrymes Phoebus, Introductory Econometrics, Springer Verlag, New York, 1985, s. 324-352
5) Fox John, Linear Statistical Models, John Wiley, New York, 1984, s. 302-318
6) Gujarati Damodar, Basic Econometrics, Mc Graw Hill, ISE, New York, 1984, s. 312-319
7) Johnston John, Econometric Methods, Mc Graw Hill, ISE, New York, 1985, s. 419-428
8) Judge George ve diğerleri, The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley, New York, 1985, s. 752-778
9) ————. Introduction to the Theory and Practice of Econometrics, New York, 1988, s. 785-795
10) Ladd George, «Linear Probability Functions and Discriminant Functions», Econometrica 34 (October 1966), s. 873-885
11) Malinvand Edgar, Statistical Methods of Econometrics, 1970, North-Holland, Amsterdam, s. 250-51
12) Morrison Donald, «Upper Bounds for Correlations Between Binary Outconies and Probabilistic Prediction», JASA, 67 (March 1972), s. 68-70
13) Neter John-Maynes Scott, «On the Appropriatness of the Correlation Coefficient with a 0, 1 Variable», JASA, 65 (June 1970), s. 501-509
14) Pindyck Robert-Rubinfeld Daniel, Econometric Models, Mc Graw Hill, ISE, Singapore, 1985, s. 273-312
15) Theil Henri, Principles of Econometrics, North Holland, 1971, s. 640
16) Theil Henri-Kosobud Richard, «How Informative Are Consumer Buying Intentions Surveys», Review of Economics and Statistics, 50 (1968), s. 50-59
17) Zellner Arnold-Lee Tong Hun, «Joint Estimation of Rolationslup Involving Discrete Random Variables», Econometrica, 33 (1965), s. 382-394