S.Ü. FEN FAKÜLTESİ FEN DERGİSİ

Ekim(2019) 45(2), 149-162
DOI:10.35238sufefd.597069

Araştırma Makalesi

Geliş (Recieved) :26/07/2019
Kabul (Accepted) :10/09/2019

PISA Fen, Matematik ve Okuma Puanları Arasındaki Bağımlılık Yapısının Kapula ile Modellenmesi

Mervenur PALA*, Fatih SAĞLAM

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, SAMSUN

* mervenur.pala1@gmail.com

Öz: PISA, bir ülkedeki fen, matematik ve okuma alanlarında öğrencilerin eğitim seviyelerini ölçen güvenilir bir araştırmadır. Bu bağlamda ülkelere ait farklı alanlarda (fen-matematik-okuma) puanlar elde edilerek, ülkelerarası eğitim düzeylerini karşılaştırmak ve ileriye yönelik olarak eğitim politikalarının belirlenmesi amaçlanmıştır. PISA'nın ulusal düzeyde çeviri ve uyarlama işlemleri, analizlerinin yapılması ve ulusal raporun hazırlanması, araştırmaya katılan her ülke için belirlenen ulusal merkezler tarafından yürütülmektedir. Kapulalar, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyan fonksiyonlar olup, bununla beraber iki ya da çok değişkenli dağılımları oluşturur. Kapula fonksiyonunun asıl amacı, gözlenen verilere en uygun düşen çok değişkenli dağılımı, bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir. PISA, bireylerin eğitim seviyelerini ortaya çıkaran önemli bir araç olması ve ülkelerin karşılaştırılmasında önemli rol oynaması nedeniyle PISA puanları arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesi önemlidir. Bu çalışmada 2006-2015 yılları arasındaki PISA fen, matematik ve okuma puanları için ikili bağımlılık yapıları en uygun kapula modeliyle belirlenmiş ve seçilen modellere göre bağımlılık yapıları yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kapula, PISA, OECD.

PISA Modeling the Dependency Structure between Science, Mathematics and Reading Scores with Copula

Abstract: PISA is a reliable study that measures the educational levels of students in science, mathematics and reading in a country. In this context, it is aimed to compare the educational levels of the countries and to determine the educational policies for the future by obtaining scores in different fields of the countries. PISA's translation and adaptation at national level, analysis and preparation of the national report are carried out by national centers designated for each participating country. Copulas are functions that represent the structure of dependence between variables and they form multivariate distributions. The main purpose of the copula function is to obtain the multivariate distribution, which is the most appropriate for the observed data, by revealing the dependency structure. It is important to examine the dependence structure between PISA scores, since PISA is an important tool to reveal the educational level of individuals and has an important role in comparing countries. In this study, the most appropriate paired dependence structures for PISA science, mathematics and reading scores between 2006 and 2015 were determined by the most suitable copula model and the dependency structures were interpreted according to the selected models.

Keywords: Copula, PISA, OECD

1. Giriş

Küreselleşen dünyada eğitimin amacı; bireylere bilgi öğretme, bu bilgileri kullanma ve bununla beraber bireyleri günlük hayatta karşılaştıkları yeni durumlara hazırlamaktır. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin sahip oldukları niteliklerin seviyesini ölçmek için OECD (Organization of Economic Cooperation and Development) tarafından, her üç yılda bir PISA (The Programme for International Student Assessment) araştırması yapılmaktadır. 2000 yılında başlayan PISA araştırmaları, araştırmaya katılan ülkelerdeki zorunlu eğitimi tamamlamış, 15 yaş üzerindeki bireyler üzerinde uygulanmaktadır. PISA, ülkelerarası öğrencilerin eğitim düzeylerinin karşılaştırılması ve eğitimde eksik yönlerin tespit edilmesinde önemli rol oynadığı için tüm dünyada devlet otoritelerinin ilgilendiği bir araştırmadır (Taş ve ark., 2016).

Araştırmada fen, matematik ve okuma alanlarında beceri puanları elde edilmektedir. PISA araştırmasında bu puanlar değerlendirilirken okuryazarlık kavramı esas alınmaktadır. Bu kavramda öğrencilerin değerlendirilecek olan alanda karşılaştıkları problemi tanımlayabilme, yorumlayabilme, anlayabilme, sahip oldukları bilgileri kullanarak problemin üstesinden gelebilme ve elde ettikleri sonuçlarla iletişim kurabilme becerileri ele alınmaktadır (Taş ve ark., 2016). Bu bağlamda fen, matematik ve okuma becerileri arasında ilişki olması beklenir. Değişkenler arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi için değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının belirlenmesi gerekir. Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modelleyen kapulalar, bir rastgele değişken vektörünün ortak dağılım fonksiyonu ile bu dağılımın marjinalleri arasında bağıntı kuran çok değişkenli, özel bir fonksiyondur (Alhan, 2008).

Bu çalışmada 2006-2015 yılları arasındaki PISA fen, matematik ve okuma beceri puanları baz alınmıştır. Fen, matematik ve okuma puanları birer değişken olarak ele alınmış ve bu değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı, uygun kapula modelleri belirlenerek incelenmiş ve yıllara göre sonuçlar yorumlanmıştır.

2. Materyal ve Yöntem

Kapulalar değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirlerken, bazı korelasyon ölçümleri ya da parametrik yöntemlerin sahip olduğu varsayımlara ihtiyaç duymadan, değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu ile marjinalleri arasında bağlantı kurar. Bu sayede, kapula ile değişkenler arasında bağımlılık yapısı belirlenirken diğer taraftan da değişkenlere uygun düşen çok değişkenli dağılım elde edilir. Kapulalar ile verilerin normal dağılmadığı ya da dağılımın bilinmediği durumlarda çok değişkenli bir modelle, bağımlılık yapısını yansıtan parametreler elde edilebilir.

Kapulalar, marjinal olasılık dağılımları için herhangi bir varsayım gerektirmeyen bir yaklaşım olup, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki lineer olmayan bağımlılığın modellenmesini sağlar. Ayrıca hiçbir korelasyon ölçüsü bu özelliğe sahip değildir. Dolayısıyla kapulalar, bağımlılık açısından ölçüden bağımsız olarak çalışmaya olanak sağlaması ve iki ya da daha fazla değişkene sahip dağılım ailelerini inşa etmede başlangıç noktası olması nedeniyle uygulamada önemli bir yere sahiptir (Nelsen, 2003).

Kapulaları matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$C: I^n \rightarrow I$

$u \rightarrow C(u)$ fonksiyonu,

- $\forall u \in I^n$ için u'nun koordinatlarından en az biri 0 ise, $C(u) = 0$ **(2.1)**
- $\forall u \in I^n$ için u_k hariç u'nun tüm koordinatları 1 ise, $C(u) = u_k$
- $a \leq b$ olan $\forall\ a, b \in I^n$ için $V_C([a, b]) \geq 0$

şartlarını sağlıyorsa C'ye n −boyutlu kapula ya da kısaca n −kapula denir (Nelsen, 1999).

2.1. Sklar Teoremi

Kapulanın varlığını ortaya koyan bu teorem, ortak dağılım fonksiyonu ile kapulalar arasındaki bağıntıyı tanımlamaktadır.

H, marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan n-boyutlu ortak dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde $\forall x \in \bar{R}^n$ için,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big) \qquad \mathbf{(2.2)}$$

olacak şekilde bir C n-kapulası vardır. Eğer $F_1, F_2, \dots, F_n$'lerin hepsi sürekliyse o zaman C tektir. Aksi takdirde C, $F_1, F_2, \dots, F_n$'lerin değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine C bir n-kapula ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonları ise (2.2) eşitliğinde tanımlanan H fonksiyonu, marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan n-boyutlu bir dağılım fonksiyonudur (Sklar, 1959).

H, marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan ve kapulası C olan dağılım fonksiyonu olsun. $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ sırasıyla $F_1, F_2, \dots, F_n$'lerin yarı tersleri olsun. Bu takdirde herhangi bir $u \in I^n$ için;

$$C(u_1,u_2,\dots,u_n)=H\left(F_1^{(-1)}(u_1),F_2^{(-1)}(u_2),\dots,F_n^{(-1)}(u_n)\right) \qquad (\mathbf{2.3})$$

eşitliği Sklar teoreminin bir sonucu olarak sağlanır.

2.2 Kapula Aileleri

2.2.1 Clayton Kapula

Clayton kapula bir Arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u,v)=\left(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1\right)^{-1/\theta},\quad 0\le\theta<\infty \qquad (\mathbf{2.4})$$

$\theta\to 0$ iken $C(u,v)=\pi(u,v)=uv$ olur ve bağımsızlık kapulasına ulaşılır. $\theta\to\infty$ iken mükemmel bağımlılığa işaret eder. Clayton kapula için sol kuyruk bağımlılığı dikkate alınmalıdır. Yani, birlikte azalış göstermeye, birlikte artış göstermekten daha yatkın olan gözlemlerde Clayton kapula tercih edilmelidir (Trivedi ve Zimmer, 2007).

2.2.2 Student's t Kapula

Student's t kapula eliptik bir kapula olup, r Pearson korelasyon katsayısı ve t_v ise v serbestlik dereceli student-t dağılımını belirtmek üzere bu iki bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u_1,u_2)=\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)}\left(1+\frac{(s^2-2rst+t^2)}{v(1-r^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}}dsdt \qquad (\mathbf{2.5})$$

Burada t_v^{-1}, v serbestlik derecesine sahip student t dağılımının tersini ifade eder. $v\to\infty$ için $C(u_1,u_2,r,v)\to\Phi_G(u_1,u_2,r)$ olur. Yani v sonsuza yaklaştığında, Student's t kapula, Gaussian kapulaya yakınsar. Student's t kapula simetrik bağımlılık sergiler. Alt ve üst kuyruk bağımlılığı birbirine eşit olup $\lambda_U=\lambda_L=2t_{v+1}\left(\frac{-\sqrt{v+1}\sqrt{1-r}}{\sqrt{1+r}}\right)$ ile ifade edilir (Wiboonpongse ve ark., 2015).

2.2.3 Gaussian Kapula

Gaussian kapula eliptik bir kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u,v) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \theta) \qquad (\mathbf{2.6})$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} * \left(\frac{-(s^2-2\theta st+t^2)}{2(1-\theta^2)}\right) dsdt$$

Burada Φ standart normal dağılım fonksiyonu, $\Phi_G(u,v)$ iki değişkenli standart normal dağılım fonksiyonudur. Gaussian kapulada θ bağımlılık parametresi, Pearson korelasyon ölçümü olup $[-1,1]$ aralığına kısıtlanmıştır. $\theta \to 0$ için bağımsızlık kapulasına dönüşür. $\theta \to -1$ ve $\theta \to 1$ olduğunda sırasıyla Frechet alt sınır ve Frechet üst sınırına ulaşır. Eşit derecede pozitif ve negatif bağımlılığa izin verdiği için esnek bir kapula modelidir (Trivedi ve Zimmer, 2007). Burada u ve v parametrik ya da non-parametrik keyfi bir dağılıma sahip olabilir. Ancak u ve v normal dağılan marjinallerse Gaussian kapula'da iki değişkenli dağılım fonksiyonu normal dağılıma sahiptir (Chen ve ark., 2017).

2.2.4.Gumbel-Hougaard Kapula Ailesi

Gumbel-Hougaard kapula bir Arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u,v) = exp\left\{-\left[(-lnu)^\theta + (-lnv)^\theta\right]^{1/\theta}\right\},\ 1 \le \theta < \infty \qquad (\mathbf{2.7})$$

$\theta \to 1^+$ için $C(u,v) = \pi(u,v) = uv$ bağımsızlık kapulasına dönüşür. Bu kapula hiçbir θ değeri için Frechet alt sınırına ulaşmaz. Gumbel kapula, güçlü sağ kuyruk bağımlılığı sergiler. Bunun anlamı iki boyutlu rastgele değişkenler birlikte artış göstermeye, birlikte azalış göstermekten daha yatkındır. Küçük değerler için düşük korelasyon, yüksek değerler için güçlü korelasyona sahip gözlemler varsa, bu tür gözlemler için Gumbel kapula tercih edilmelidir. Gumbel kapula için sağ kuyruk bağımlılığı $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ ile hesaplanır (Trivedi ve Zimmer, 2007).

2.2.5. Frank Kapula

Frank kapula bir arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta} ln\left[1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right], \theta \in R - \{0\} \qquad (\mathbf{2.8})$$

$\theta \to 0$ iken $C(u,v) = \pi(u,v) = uv$ bağımsızlık kapulasına ulaşılır. $\theta \to \infty$ iken Frechet üst sınırına $\theta \to -\infty$ iken Frechet alt sınırına eşit olur. Geniş bir parametre uzayına sahip olması ve marjinaller arasındaki negatif bağımlılığın da modellenebilir olması nedeniyle, Frank kapula uygulamalarda daha çok tercih edilmektedir. Frank kapula ile modellenen gözlemler çok güçlü negatif ya da çok güçlü pozitif bağımlılığa sahiptir (Meester ve Mackay, 1994).

2.3 Kapula Tahmini

Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı kapula ile istatistiksel olarak, bir parametre ya da parametreler vektörü ile belirlenebilmektedir. Parametrelerin tahmin edilmesinde kullanılan maksimum olabilirlik yönteminde, tahmin edilen çok değişkenli dağılımın, marjinal dağılımlarına ait parametreleri ile bağımlılık yapısını karakterize eden kapulaya ilişkin parametrelerin tamamı eşanlamlı olarak tahmin edilir (Joe, 1997).

Çok değişkenli bir dağılımın kanonik gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big) \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \qquad \mathbf{(2.9)}$$

$$f_j(x_j) = \frac{\partial F_j(x_j)}{\partial x_j}, j = 1, .., n \text{ ve}$$

$$c\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big) = \frac{\partial^n C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big)}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)} \qquad \mathbf{(2.10)}$$

olmak üzere, c kapula yoğunluğu C kapulasının n. mertebeden kısmi türevini, f_j'ler ise marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmektedir. Kapulaların istatistiksel modellemesi iki adımda gerçekleşir. İlk olarak marjinal dağılımlar belirlenir ve daha sonra uygun kapula fonksiyonu tanımlanır (Cherubini ve ark., 2004).

Örnek veri matrisi $S = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^{T}$ olsun. Bu takdirde, log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T} ln\big\{c\big(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt})\big)\big\} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} ln\, f_j(x_{jt}) \qquad \mathbf{(2.11)}$$

Burada θ, kapula ve marjinallere ilişkin parametreler vektörüdür. Marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonu biliniyorsa, yukarıdaki log-olabilirlik fonksiyonu yazılır ve maksimum olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MLE} = maxl(\theta)$ ile bulunur.

2.4 Kapula Seçimi

Farklı kapula fonksiyonları farklı bağımlılık modelleri sergiler. Bu nedenle, bağımlılık yapısı araştırılmak istenildiğinde, birkaç kapula modeli tahmin edilir ve verilere en uygun olanı seçilir (Trivedi ve Zimmer, 2005).

Maksimum olabilirlik fonksiyonu ile kullanılan AIC ya da BIC değerleri ile kapula seçimine karar verilir.

$$BIC = -2\ln(L) + kln(n) \qquad (\mathbf{2.12})$$

Burada $\ln(L)$ maksimize edilmiş log-olabilirlik değeri, k parametre sayısı, n ise gözlemlerin sayısıdır. En küçük BIC değerine sahip kapula, bağımlılığı en iyi yansıtan modeldir (Akaike, 1974).

$$AIC = -2\ln(L) + 2k \qquad (\mathbf{2.13})$$

Benzer şekilde, $\ln(L)$ maksimize edilmiş log-olabilirlik değeri, k parametre sayısı olmak üzere en küçük AIC değerine sahip olan kapula, en iyi uyuma sahip kapuladır.

3. Bulgular

Bu çalışmada 31 ülkenin, 2006-2015 yıllarına ait PISA fen, matematik ve okuma puanları üzerinde araştırma yapılmıştır. Fen, matematik ve okuma puanları birer tesadüfi değişken olarak ele alınmış ve aralarındaki ikili bağımlılık yapıları için en uygun kapula modelleri tespit edilmiştir. Bağımlılık yapısını karakterize eden parametreler, parametrik yöntemlerden olan maksimum olabilirlik yöntemi ile elde edilmiştir. Elde edilen kapula modellerinden en uygun olanı AIC ve BIC değerlerine bakılarak minimum değere sahip olan model tercih edilmiştir. Tercih edilen kapula modeline göre ikili bağımlılık yapıları yıllara göre yorumlanmıştır.

2006-2015 yılları arasındaki Fen-Matematik, Fen-Okuma, Okuma-Matematik puanları arasındaki ikili bağımlılık yapıları incelendiğinde, kapula modellerine ait elde edilen AIC ve BIC değerleri Çizelge 1'de verilmiştir. En küçük AIC veya BIC değeri baz alınarak seçilen kapula modelleriyle puanlar arasındaki ikili bağımlılık yapıları belirlenmiştir.

Çizelge 1. Fen-Matematik, Fen-Okuma, Okuma-Matematik puanları arasındaki ikili kapula modellerine ait elde edilen AIC ve BIC değerleri

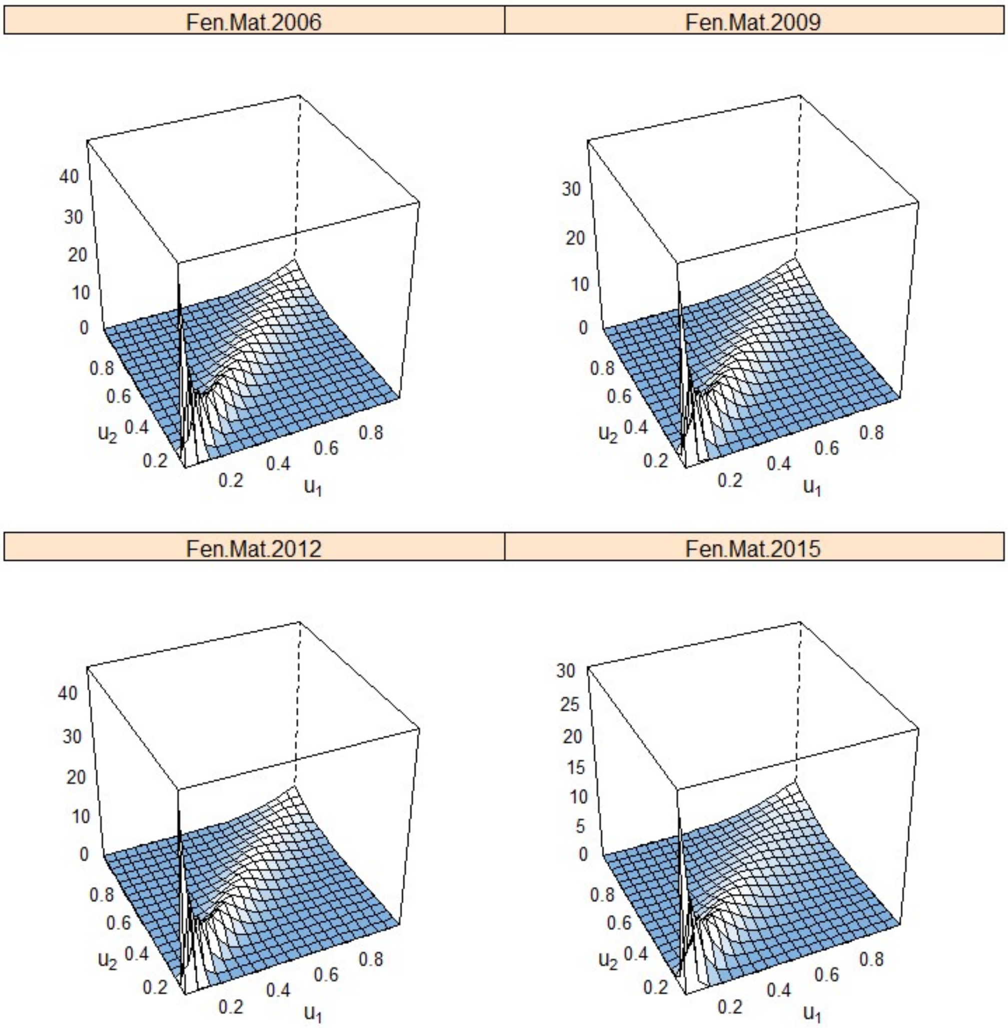
İkili	Yıl	Aile	AIC	BIC
FEN-MAT	2006	Gaussian	-57.71	-56.28
		Student's t	-55.7	-52.83
		Clayton	-75.48	-74.04
		Gumbel	-46.91	-45.48
		Frank	-52.59	-51.16
		Joe	-33.68	-32.24
FEN-OKUMA	2006	Gaussian	-33.01	-31.58
		Student's t	-32.41	-29.55
		Clayton	-39.27	-37.83
		Gumbel	-27.72	-26.28
		Frank	-30.17	-28.74
		Joe	-19.04	-17.61
OKUMA-MAT	2006	Gaussian	-40.27	-38.84
		Student's t	-38.35	-35.48
		Clayton	-40.13	-38.7
		Gumbel	-35.67	-34.23
		Frank	-33	-31.57
		Joe	-27.73	-26.3
FEN-MAT	2009	Gaussian	-57.2	-55.77
		Student's t	-55.07	-52.21
		Clayton	-66.19	-64.75
		Gumbel	-47.53	-46.1
		Frank	-48.13	-46.69
		Joe	-35.85	-34.42
FEN-OKUMA	2009	Gaussian	-40.58	-39.15
		Student's t	-40.75	-37.88
		Clayton	-36.45	-35.02
		Gumbel	-38.92	-37.48
		Frank	-37.74	-36.3
		Joe	-32.25	-30.81
OKUMA-MAT	2009	Gaussian	-58.73	-57.3
		Student's t	-60.07	-57.21
		Clayton	-46.45	-45.02
		Gumbel	-61.89	-60.46
		Frank	-56.14	-54.7
		Joe	-56.51	-55.08
FEN-MAT	2012	Gaussian	-59.72	-58.28
		Student's t	-58.01	-55.14
		Clayton	-71.51	-70.08
		Gumbel	-49.2	-47.77
		Frank	-56.63	-55.2
		Joe	-35.75	-34.32
FEN-OKUMA	2012	Gaussian	-39.76	-38.33
		Student's t	-49.74	-46.87
		Clayton	-37.37	-35.93
		Gumbel	-45.47	-44.04
		Frank	-39.67	-38.24
		Joe	-39.98	-38.54
OKUMA-MAT	2012	Gaussian	-41.78	-40.35
		Student's t	-40.8	-37.94
		Clayton	-37.98	-36.55
		Gumbel	-39	-37.56
		Frank	-39.38	-37.95
		Joe	-31.02	-29.59
FEN-MAT	2015	Gaussian	-44.11	-42.68
		Student's t	-44.76	-41.89
		Clayton	-52.45	-51.01
		Gumbel	-38.81	-37.38
		Frank	-38.34	-36.91

		Joe	-29.29	-27.86
FEN-OKUMA	2015	Gaussian	-35.24	-33.81
		Student's t	-39.2	-36.33
		Clayton	-29.73	-28.3
		Gumbel	-36.74	-35.31
		Frank	-40.29	-38.86
		Joe	-30.76	-29.33
OKUMA-MAT	2015	Gaussian	-33.45	-32.02
		Student's t	-31.54	-28.67
		Clayton	-33.1	-31.67
		Gumbel	-26.72	-25.28
		Frank	-37.19	-35.76
		Joe	-17,82	-16,39

Fen-Matematik puanları arasındaki bağımlılık yapısına göre seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler Çizelge 2'de verilmiştir. Fen-Matematik puanları arasındaki bağımlılığı en iyi modelleyen Clayton kapula ailesi olmuştur. Bu aileye ait parametreler; 2006 yılı için 8.207788, 2009 yılı için 6.610368, 2012 yılı için 7.743329 ve 2015 yılı için 5.098275 olarak elde edilmiştir. Bunun anlamı bireylere ait Fen-Matematik puanlarının, tüm yıllarda birlikte azalmaya eğilimli olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle bireylerin fen puanları azaldığında, matematik puanlarının da azaldığını benzer şekilde matematik puanları azaldığında, fen puanlarının da azaldığını söylemek mümkündür. Yıllara göre Fen-Matematik puanları arasındaki bağımlılık yapısı Şekil 1'deki gibi gösterilebilir.

Çizelge 2. Fen-Matematik puanları arasında seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler

İkililer	Yıllar	Aileler	par1	par2	tau
FEN-MAT	2006	Clayton	8.207788	0	0.804071
FEN-MAT	2009	Clayton	6.610368	0	0.767722
FEN-MAT	2012	Clayton	7.743329	0	0.794731
FEN-MAT	2015	Clayton	5.098275	0	0.718241



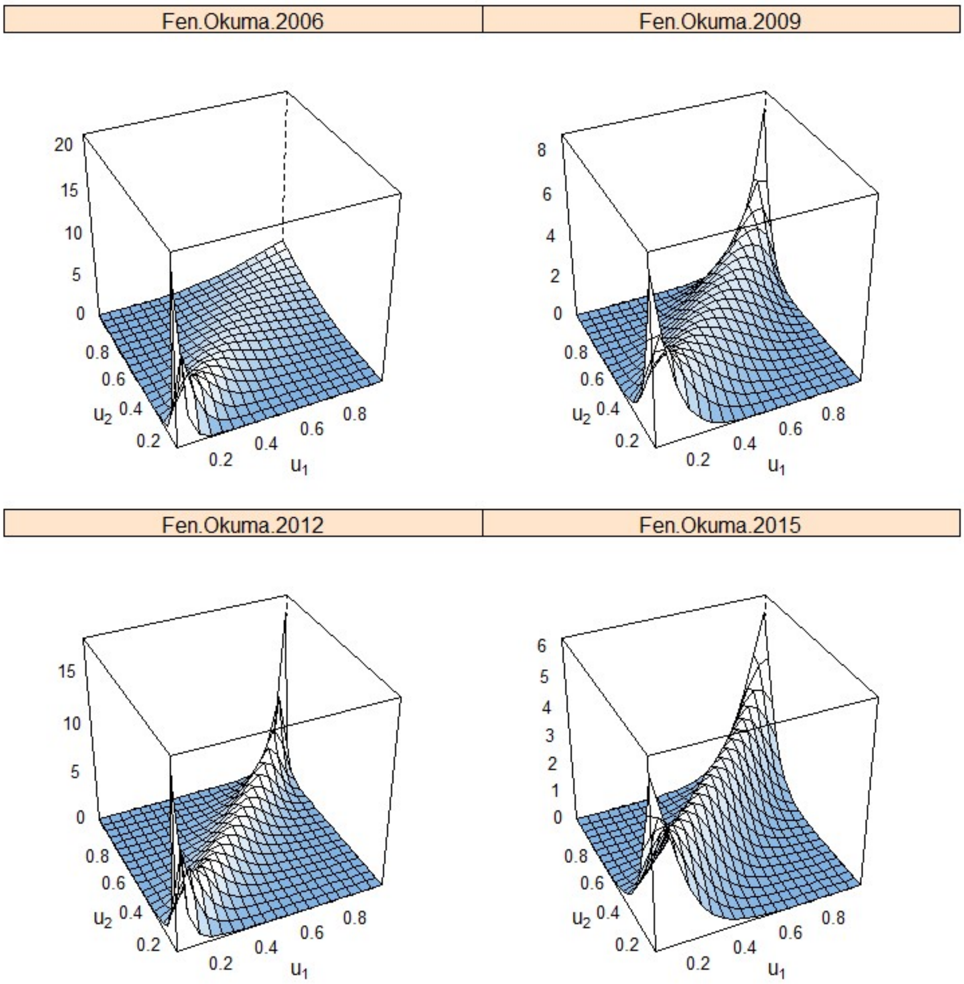
Şekil 1. Yıllara göre Fen-Matematik puanları arasındaki bağımlılık yapıları

Fen-Okuma puanları arasındaki bağımlılık yapısına göre seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler Çizelge 3'de verilmiştir. 2006 yılında Fen-Okuma puanları arasındaki bağımlılığı en iyi modelleyen Clayton kapula ailesi olmuştur. Fen-Okuma puanlarının birlikte azalmaya eğilimli olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle bireylerin fen puanları azaldığında, okuma puanlarının da azaldığını benzer şekilde okuma puanları azaldığında, fen puanlarının da azaldığını söylemek mümkündür. 2009 yılı için, Fen-Okuma puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Gaussian kapula parametresi 0.885637 olarak bulunmuştur. Fen-Okuma puanları arasında güçlü pozitif bağımlılık söz konusudur. Bunun anlamı, Fen ve okuma puanlarının biri artarken diğerinin artma, biri azalırken diğerinin azalma eğiliminde olduğunu söylemek mümkündür. 2012 yılı için, Fen-Okuma puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Student's t kapula parametresi

0.918422 olarak bulunmuştur. Fen-Okuma puanları arasında güçlü bir simetrik bağımlılık söz konusudur. 2015 yılı için, Fen-Okuma puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Frank kapula parametresi 11.618 olarak bulunmuştur. Fen-Okuma puanları arasında diğer yıllara kıyasla daha güçlü pozitif bağımlılık söz konusudur. Yıllara göre Fen-Okuma puanları arasındaki bağımlılık yapısı Şekil 2'deki gibi gösterilebilir.

Çizelge 3. Fen-Okuma puanları arasında seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler

İkililer	Yıllar	Aileler	par1	par2	tau
FEN-OKUMA	2006	Clayton	3.489343	0	0.635658
FEN-OKUMA	2009	Gaussian	0.885637	0	0.692555
FEN-OKUMA	2012	t	0.918422	2.0001	0.741073
FEN-OKUMA	2015	Frank	11.618	0	0.70445

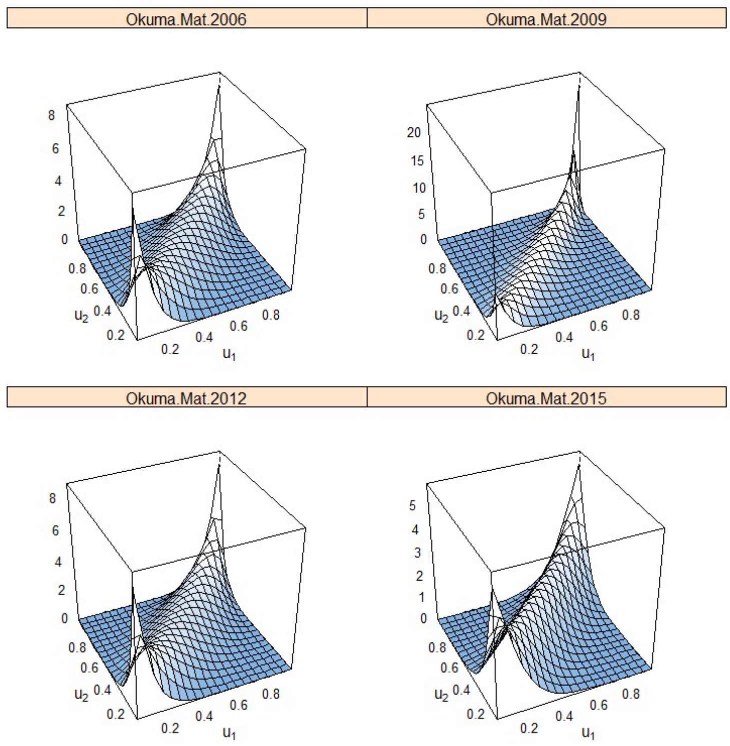


Şekil 2. Yıllara göre Fen-Okuma puanları arasındaki bağımlılık yapıları

Okuma-Matematik puanları bağımlılık yapısına göre seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler Çizelge 4'de verilmiştir. 2006 yılı için, Okuma-Matematik puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Gaussian kapula parametresi 0.884366 olarak bulunmuştur. Okuma-Matematik puanları arasında güçlü pozitif bağımlılık söz konusudur. Bunun anlamı, Okuma ve Matematik puanlarının biri artarken diğerinin artma, biri azalırken diğerinin azalma eğiliminde olduğunu söylemek mümkündür. 2009 yılı için, Okuma-Matematik puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Gumbel kapula parametresi 4.586192 olarak bulunmuştur. Okuma-Matematik puanlarının birlikte artmaya eğilimli olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle bireylerin okuma puanları arttığında, matematik puanlarının da arttığı benzer şekilde matematik puanları arttığında, okuma puanlarının da arttığını söylemek mümkündür. 2012 yılı için, Okuma-Matematik puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Gaussian kapula parametresi 0.890511 olarak bulunmuştur. Okuma-Matematik puanları arasında güçlü pozitif bağımlılık söz konusudur. 2015 yılı için, Okuma-Matematik puanları arasında bağımlılığı en iyi modelleyen Frank kapula parametresi 10.40644 olarak bulunmuştur. Yıllara göre Okuma-Matematik puanları arasındaki bağımlılık yapısı Şekil 3'deki gibi gösterilebilir.

Çizelge 4. Okuma-Matematik puanları arasında seçilen en uygun kapula modelleri ve bu modellere ait parametreler

İkililer	Yıllar	Aileler	par1	par2	tau
OKUMA-MAT	2006	Gaussian	0,884366	0	0,690818
OKUMA-MAT	2009	Gumbel	4,586192	0	0,781954
OKUMA-MAT	2012	Gaussian	0,890511	0	0,699306
OKUMA-MAT	2015	Frank	10,40644	0	0,676368



Şekil 3. Yıllara göre Okuma-Matematik puanları arasındaki bağımlılık yapıları

4. Tartışma

PISA 2006-2015 yılları arasındaki Fen, Matematik ve Okuma puanlarının ikili bağımlılık yapıları kapula modelleri ile belirlenmiş ve en uygun kapula modelinin seçimine AIC ve BIC değerlerine bakılarak karar verilmiştir.

Fen-Matematik puanlarının tüm yıllarda sol kuyruk bağımlılığına sahip olduğu ve 2015 yılında Fen-Matematik puanları arasında bağımlılığın en az, 2006 yılında ise en fazla olduğu görülmektedir. 2006 yılı Fen-Okuma puanlarının sol kuyruk bağımlılığı sergilediği ve 2015 yılı Fen-Okuma puanlarının diğer yıllara kıyasla daha güçlü bağımlılık yapısına sahip olduğu görülmektedir. 2009 yılı Okuma-Matematik puanlarının sağ kuyruk bağımlılığı sergilediği ve 2015 yılı Okuma-Matematik puanları arasında diğer yıllara kıyasla daha güçlü pozitif bağımlılık yapısına sahip olduğu elde edilmiştir.

Sonuçlar değerlendirildiğinde, Fen-Okuma ve Okuma-Matematik arasındaki bağımlılığın son yıllarda daha da arttığı görülmektedir. Ülkeler bireylerin okuma becerilerini geliştirdiğinde ve bununla ilgili eğitim politikalarına yön verdiğinde, Matematik ve Fen alanında başarının daha da artacağını söyleyebiliriz.

Kaynaklar

Akaike H (1974). A new look at the statistical model identification. *In Selected Papers of Hirotugu Akaike*, *Springer*, New York, 215-222.

Alhan A (2008). Bağımsızlık kapulasını içeren kapula aileleri, kapula tahmin yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında sektörler arası bağımlılık yapısı. *Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı*, 162, Ankara.

Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W (2004). Copula methods in finance. *John Wiley and Sons*, 289, New York.

Chen M, Yu G, Chen P, Wang Y (2017). A copula-based approach for estimating the travel time reliability of urban arterial. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 82: 1-23.

Joe H (1997). Multivariate models and multivariate dependence concepts. *CRC Press* 395, London.

Meester SG, Mackay J (1994). A parametric model for cluster correlated categorical data. *Biometrics* 954-963.

Nelsen RB (2003). Properties and applications of Copulas: A Brief Survey. In Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modeling in Insurance and Finance, September, University Press USP: Sao Paulo, Brazil, pp. 10-28.

Nelsen RB (1999). An introduction to Copulas. *Springer*, New York, 1-4.

Sklar A (1959). Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges. *Publ Inst Statist Univ* 8: 229-231.

Trivedi PK, Zimmer DM (2005). Copula modeling: An introduction for practitioners. *Publishers Inc.*, 28, Hanover, USA.

Trivedi PK, Zimmer DM (2007). Copula modeling: An introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics* 1(1): 1-111.

Taş UE, Arıcı Ö, Ozarkan HB, Özgürlük B (2016). PISA 2015 ulusal raporu. *Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı*.

Wiboonpongse A, Liu J, Sriboonchitta S, Denoeux T (2015). Modeling dependence between error components of the stochastic frontier model using Copula: Application to intercrop coffee production in Northern Thailand. *International Journal of Approximate Reasoning* 65: 34-44.

URL-1: http://www.oecd.org/pisa/data/ (Erişim Tarihi: 29.06.2017)