Hayvansal Üretim 44(2): 81-90 (2003)

Doğrusal-olmayan Büyüme Modellerinde Parametre Tahmini

Ömer Cevdet Bilgin[1], Nurinisa Esenbuğa[2]

[1] Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü Biyometri ve Genetik A.B.D. Erzurum

[2] Atatürk Üniversitesi Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü Hayvan Yetiştirme A.B.D. Erzurum

Özet: Tarımsal ürünlerde büyümeyi ifade etmek icin kullanılan doğrusal-olmayan modellerden negatif eksponensiyal, Brody, Gompertz, Lojistik, Bertalanffy ve Richard modellerine ait kısmi türevler çıkarılmış ve model parametrelerinin tahmininde kısmi türevlerin nasıl kullanılacağı üzerinde durulmuştur. Marquardt iteratif doğrusal-olmayan regresyon yöntemi kullanılarak, Morkaraman ırkı koyunlardan alınan yaş ve vücut ağırlığı verileri için, model parametreleri tahmin edilmiş ve parametreler için uygun başlangıç değeri belirleme problemi tartışılmıştır. Modellendirilmeye çalışılan sistem bağlamında, doğrusal-olmayan modellere ait parametrelerin doğru ifade edilebilmesinin, parametre tahmininde önemli bir rol oynadığı sonucuna varılmıştır.

Anahtar sözcükler: Büyüme eğrisi, parametre tahmini, kısmi türev, başlangıç değeri

Parameter Estimation in Nonlinear Growth models

Abstract: For nonlinear models, negative exponential, Brody, Gompertz, Bertalanffy and Richard's, used in defining growth of agricultural products partial derivatives were provided and an application of the partial derivatives to estimate model parameters were demonstrated. Model parameters were estimated for weight-age data from Morkaraman sheep by using Marquardt iterative method of nonlinear regression and the problem of finding good initial values was discussed. In the context of the system being modelled, it is concluded that correctly defining the parameters of nonlinear model is important in estimation of parameters.

Keywords: Growth curve, parameter estimation, partial derivative, initial value

Giriş

Büyümenin modellendirilmeye çalışıldığı bir biyolojik sistemde, büyüme hızı bakımından üç farklı durum söz konusudur: (1) sabit hızda büyüme, (2) sürekli artan yada azalan hızlarda büyüme, ve (3) değişken hızlarda büyüme. Büyüme eğrilerinin şekli canlının türüne, çevre şartlarına ve incelenen özelliğe göre değişiklik gösterdiğinden, uygun modelin seçimi istatistiksel bir karar sürecini gerektirir. Sabit hızda bir büyüme bazı canlıların bazı özellikleri için belirli dönemlerde gerçekleşse dahi, genel olarak canlılardaki büyüme hızının yaşam süresi boyunca sabit olmadığı literatürde bildirilmiştir (Kshirsagar ve Smith, 1995; Efe, 1990; Akbaş,1995; Kocabaş ve ark., 1997). Bu nedenle, doğrusal modeller canlıların yaşam süresi boyunca büyümesini modellemek için çoğu durumda yetersiz kalmaktadır (Perotto ve ark., 1992; Efe, 1990). Farklı büyüme hızlarının gerçekleştiği dönemler söz konusu olduğunda ise, doğrusal modellere göre biraz daha karmaşık olan doğrusal-olmayan modellerin kullanılması yararlı hatta gerekli olmaktadır. Sürekli azalan hızlarda büyüme durumunda uzak dönemde bir asimtota sahip negatif eksponensiyal ve Brody gibi modeller söz konusuyken, değişken hızlarda büyüme durumunda, Lojistik, Gompertz, Bertalanffy ve Richard gibi erken dönemde bir bükülme noktasına ve uzak dönemde bir asimtot yada maksimum değere sahip sigmoidal fonksiyonlar söz konusudur. Polinomiyal denklemler gibi ampirik modellerle kıyaslandıklarında, bu kuramsal modeller, bağımlı değişkenin tanımladığı fenomenin sebebi veya fonksiyonuyla ilişkili temel bir varsayıma ve biyolojik anlamı olan parametrelere sahiptirler. Aynı zamanda kuramsal altyapısı olan denklemlerin, veri aralığı dışında ekstrapolasyonla tahmin yapmak için, ampirik polinomiyal denklemlere göre daha güvenilir oldukları Martin ve Ek (1984) tarafından bildirilmiştir. Doğrusal-olmayan kuramsal modellerin önemli bir avantajı da, biyolojik bir varlığın büyüme potansiyelini ve sürdürülebilir üretimini tahmin edecek objektif bir yöntem için temel olabilmeleridir (Fekedulegn, 1999).

Özellikle tarımsal üretime uygulanmak üzere formüle edilmiş modellerin dışında, diğer alanlarda geliştirilen bir çok model, tarımsal ürünlerde büyümeyi modellemek için kullanılabilir. Bununla birlikte, doğrusal-olmayan kuramsal modellerin tarımsal ürünlerde kullanımı uygulamada bazı zorlukları beraberinde getirmektedir. Bunun başlıca nedeni doğrusal-olmayan modellerin büyüme verilerine uydurulmasında kullanılan istatistiksel metodolojinin, modellerin matematiksel yapısıyla çok ilişkili olması ve bunun bazen iyi anlaşılamamasıdır.

Doğrusal-olmayan modellerin tayini ve tahmini, doğrusal modellere göre daha zordur ve sonuçlar değişik yöntemler kullanılarak iterasyonla belirlenmektedir (Draper ve Smith, 1981). Eğer bir model, yeniden-parametrelendirme sonucunda doğrusallaştırılamıyor ise, parametre tahminleri sapmasızlık, normallik, ve minimum varyans gibi arzulanan özelliklere sahip olamayacaktır; bu sebeple de Marquardt (1963) yöntemi gibi karmaşık tahmin yöntemlerine gereksinim duyulabilecektir (Ratkowsky, 1983 ve 1990). Kısmi türevler istatistiksel paketler tarafından çoğunlukla sayısal yöntemlerle hesaplanmaktadır. Analitik çözümlerin yerine kullanılan bu sayısal yaklaşımlar genellikle yaklaşık sonuçlar üretmektedir. Böyle durumlarda, sayısal yaklaşımlar yerine kısmi türevlerin doğrudan kullanılması genellikle daha etkin ve daha kesin parametre tahminleri sağlamaktadır. Bundan dolayı, bu çalışmanın amacı negatif eksponensiyal, Brody, Gompertz, Lojistik, Bertalanffy ve Richards doğrusal-olmayan büyüme modellerine ait kısmi türevleri çıkarmak ve Morkaraman ırkı koyunlardan alınan vücut ağırlığı - yaş verileri için, parametre tahminlerinin nasıl yapılacağını, SAS programını kullanarak göstermektir. Modellerin matematiksel özellikleri ve parametrelerin çiftlik hayvanlarının büyümesine ilişkin anlamlı yorumları bazı yazarlarca tartışılmıştır (Efe, 1990; Akbaş, 1995; Akbaş ve ark., 1999; Kocabaş ve ark., 1997; Esenbuğa ve ark., 2000)

Materyal ve Yöntem

Materyal

Ele alınan doğrusal-olmayan modeller Çizelge 1'de verilmiştir. Bütün modellerde, y bağımlı büyüme değişkenini, t bağımsız değişkeni (genellikle yaş), ve α, β, k, ve m

tahmin edilecek parametreleri sembolize ederken, exp doğal logaritma tabanı ve ε toplamlı hata terimidir.

Çizelge 1. Doğrusal-olmayan büyüme modelleri.

Model	Matematiksel ifade
Negatif Eksponensiyal	$y(t) = \alpha(1-\exp(-kt)) \quad +\varepsilon$
Brody	$y(t) = \alpha(1-\beta\exp(-kt)) \quad +\varepsilon$
Gompertz	$y(t) = \alpha\exp(-\beta\exp(-kt)) \quad +\varepsilon$
Lojistik	$y(t) = \alpha/(1+\beta\exp(-kt)) \quad +\varepsilon$
Bertalanffy	$y(t) = (\alpha^{1-m} - \beta\exp(-kt))^{1/(1-m)} +\varepsilon$
Richard	$y(t) = \alpha/(1+\beta\exp(-kt))^{1/m} +\varepsilon$

Doğrusal-olmayan modellerin uygulanması için Atatürk Üniversitesi Araştırma Çiftliğinde yetiştirilen 56 adet Morkaraman koyunundan elde edilen 36 aylık yaş-vücut ağırlığı verileri kullanılmıştır. Modellerin uydurulmasında, hesaplamalar ağırlık değişkeninin ortalama değerleri üzerinden yapılmıştır.

Çizelge 2. Morkaraman kuzularında yaşa göre ortalama vücüt ağırlığının değişimi (n=56).

Yaş (Ay)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
Ağırlığı (kg)	4.1	19.8	31.5	37.9	41.9	45.8	47.3	48.7	49.7	50.2	51.2	51.8	52.2

Yöntem

Doğrusal-olmayan bir model genel olarak

$$y_i = f(t_i, \beta) + \varepsilon_i, \qquad i=1,...,n \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır; burada y, cevap değişkeni; t, bağımsız değişken; β, β_j (j=1,...,p) parametrelerine ait vektör; ε_i, şansa bağlı hata terimi; n, gözlem sayısı; ve p, parametre sayısıdır. β_j'ların tahmincileri, kalıntı kareler toplamı fonksiyonunun,

$$KT_{\mathrm{Rez}} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta}) \right]^2 \tag{2}$$

ε_i'lerin ortalaması sıfır ve variyansı σ^2 olan normal dağılışa sahip bağımsız değişkenler olduğu varsayımına dayanarak minimize edilmesi suretiyle bulunur. y_i ve t_i sabit gözlemler olduğundan, hata kareler toplamı β'nin bir fonksiyonudur. β'nin en küçük kareler tahminleri, 2 numaralı denklemi sıfıra eşitleyerek her bir parametreye göre türevini almak suretiyle bulunur; ve bu değerler KT_{Rez}'nı minimum yapar. Bu işlem p sayıda normal denklemin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ için çözülmesini gerektirir. Bu normal denklemler,

$$\sum_{i=1}^{n} \{ y_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta}) \} \left[\frac{\partial f(t_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right] = 0 \qquad j=1,...,p \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Model, parametrelerinde doğrusal olmadığı zaman normal denklemler de doğrusal değildir. Bunun sonucunda, Çizelge 1'de yer alan doğrusal-olmayan modeller için, 3 numaralı denklemde ifade edilen p sayıda normal denklemi çözmek suretiyle parametrelerin en küçük kareler tahminlerine ait kapalı formda çözümler elde etmek te imkansızdır. Bu durumda, KT_{Rez}'nı minimize etmek için bir iterasyon yönteminden yararlanılır (Draper ve Smith, 1981; Ratkowsky, 1983).

Modellerin, vücut ağırlığı verilerine uydurulmasında ve parametrelerin tahmininde SAS (1985) programına ait NLIN (doğrusal-olmayan regresyon) prosedürü kullanılmıştır. İterasyon için Marquardt yöntemi tercih edilmiştir. Çünkü, Marquardt yöntemi, Gauss-Newton ve Steepest descent yöntemleri arasında bir uzlaşmayı temsil etmektedir ve bu yöntemlerin dezavantajı olan çok ciddi sınırlamaları ortadan kaldırarak her iki yöntemin en iyi yönlerini birleştirmektedir (Draper ve Smith, 1981). Marquardt iterasyon yöntemi, tahmin edilecek parametreler ve başlangıç değerleri, tek bir bağımlı değişkene sahip model, ve modelin herbir parametreye göre kısmi türevlerinin belirtilmesini gerektirir (SAS, 1985). Doğrusal model için uygun olan bilinen istatistiksel yöntemler, doğrusal-olmayan modeller için genel anlamda uygun değildir ve F istatistiği herhangi bir önem seviyesinde bir sonuca ulaşmak için kullanılamaz (Draper ve Smith, 1981). Bu sebeple modeller, açıklanamayan varyans esas alınarak birbirleriyle karşılaştırılmaktadır. Kısmi türevlerin NLIN prosedüründe kullanılması DER opsiyonu (DER.parametre=ifade) ile gerçekleştirilmiştir

Tahminlenen modellerin örneğe giren bütün hayvanlar için homojen olup olmadığı F-dağılışından yararlanılarak test edilmiştir. Modeller her hayvana ayrı ayrı ve her zaman noktasında tekrarlanan ölçümler olarak birleştirilmiş veriye uyduruldaktan sonra, F istatistiği:

$$F = \frac{\dfrac{KT_{birleş} - KT_{Ayrı}}{SD_{birleş} - SD_{Ayrı}}}{\dfrac{KT_{Ayrı}}{SD_{Ayrı}}}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Burada, $KT_{Ayrı}$ ve $SD_{Ayrı}$ her hayvana uydurulan modelin kareler toplamları ve serbestlik dereceleri toplamları, $KT_{Birleş}$ ve $SD_{Birleş}$ birleştirilmiş veri seti için hesaplanan kareler toplamı ve serbestlik derecesidir. Bütün hayvanların aynı ağırlıklara sahip oldukları düşünülse bile $KT_{Birleş}$ değerinin $KT_{Ayrı}$ değerinden küçük olması beklenir, çünkü ayrı denklemlerin toplam serbestlik dercesi daha fazla olacaktır. Kareler toplamları arasındaki farkın şans eseri beklenenden daha büyük olup olmadığı araştırılmaktadır. Bireysel eğriler arasında fark olmadığını ifade eden H_0 hipotezini test ederken payın serbestlik derecesi $SD_{Birleş}$–$SD_{Ayrı}$ ve paydanın serbestlik dercesi $SD_{Ayrı}$ şeklindedir.

Sonuçlar ve Uygulama

Kısmi Türevler

Daha anlaşılabilir olması amacıyla, Çizelge 1'de yer alan doğrusal-olmayan modellerin α, β, k, ve m parametre gösterimleri, sırasıyla β_0, β_1, β_2, β_3 ile değiştirilmiştir. Bu çalışmada yer verilen bütün modeller için parametreler şöyle tanımlanmıştır: β_0, asimtot veya bağımlı değişkenin potansiyel maksimumu; β_1, biyolojik sabit; β_2, bağımlı değişkenin potansiyel maksimumuna yaklaşma hızını kontrol eder; β_3, allometrik sabittir. Modellerin, her bir parametreye göre kısmi türevleri ($\partial y / \partial \beta_j$) Çizelge 3'te verilmiştir. Doğrusal-olmayan modellerin integral formları ve kısmi türevleri SAS programında geçerli sözdizimi kurallarına göre girilmelidir.

Başlangıç Değerlerinin Belirlenmesi

Marquardt iterasyon yönteminde, her bir parametre için bir başlangıç değerinin belirlenmesi gereklidir. Başlangıç değeri belirleme, doğrusal-olmayan modellerin parametre tahmininde karşılaşılan en zor problemlerden birisidir (Draper ve Smith, 1981). Bununla birlikte, parametreler için başlangıç değeri belirleme problemi, modellenen fenomen bağlamında parametrelerin tanımının iyi anlaşılması ile çözümlenebilir. Hatalı başlangıç değerleri, fazladan iterasyon, uzun işletim zamanı, yakınsamasız iterasyon, ve yanıltıcı kalıntı kareler toplamına yakınsayabilme (lokal minimum) gibi sorunlara yol açmaktadır (SAS, 1985).

Başlangıç değerlerinin belirlenmesinde en etkin sıralama, β_0, β_2, β_3, ve en son β_1 dir. Tanımındaki açıklıktan dolayı, kolaylıkla belirlenebilecek tek parametre β_0'dır. Literatürde, β_0 parametresi bağımlı değişkenin ulaşabileceği, genetik ve çevre bağlamında belirlenen mümkün maksimum değeri ifade etmektedir (Bertalanffy, 1957; Richards, 1959). Buna göre, vücut ağırlığı ve yaş ilişkisini modellerken β_0, bağımsız değişkenin gözlenen en büyük değeri olarak belirlenmiştir. Çizelge 1'deki bütün doğrusal-olmayan modeller için β_2 parametresi, bağımlı değişkenin mümkün maksimum değerine (β_0) yaklaşma hızı sabiti olarak tanımlanır. Bu tanımlama esas alındığında,

$$\frac{(y_2 - y_1)/(t_2 - t_1)}{\widetilde{\beta}_0}$$

ifadesi β_2 parametresi için güzel başlangıç değerleri sağlamaktadır (Fekedulegn, 1999). Burada, y_1 ve y_2, bağımlı değişkenin, bağımsız değişkenin geniş bir aralığı ifade eden t_1 ve t_2 değerlerine karşılık gelen değerleri; $\widetilde{\beta}_0$, β_0 parametresi için belirlenen başlangıç değeridir.

Biyolojik büyümeyi ifade eden değişkenleri modellerken, allometrik sabit β_3 Bertalanffy modeli için pozitif değerlidir (β_3>0). Biyolojik sabit β_1 için başlangıç değeri, bağımsız değişkenin sıfıra eşit olduğu, büyümenin başlangıç noktasında modelleri değerlendirmek yoluyla belirlenir. Çizelge 4'te, her bir model için β_1 parametresinin başlangıç değerini belirlemekte kullanılacak ifadeler verilmiştir; y(0), büyümenin başlangıcında bağımlı değişkenin değeridir.

Çizelge 3. Negatif eksponensiyal, Brody, Gompertz, Logistik, Richards ve Bertalanffy modellerine ait kısmi türevler.

Kısmi türev	Model
	Negatif Eksponensiyal $y(t) = \beta_0(1 - \exp(-\beta_2 t)) + \varepsilon$
$\partial y / \partial\beta_0$	$(1 - \exp(-\beta_2 t))$
$\partial y / \partial\beta_1$	--
$\partial y / \partial\beta_2$	$(\beta_0 t \exp(-\beta_2 t))$
	Brody $y(t) = \beta_0(1 - \beta_1 \exp(-\beta_2 t)) + \varepsilon$
$\partial y / \partial\beta_0$	$(1 - \beta_1 \exp(\beta_2 t))$
$\partial y / \partial\beta_1$	$(-\beta_0 \exp(\beta_2 t))$
$\partial y / \partial\beta_2$	$(\beta_0 \beta_1 t \exp(\beta_2 t))$
	Gompertz $y(t) = \beta_0 \exp(-\beta_1 \exp(-\beta_2 t)) + \varepsilon$
$\partial y / \partial\beta_0$	$\exp(-\beta_1 \exp(\beta_2 t))$
$\partial y / \partial\beta_1$	$-\beta_0 \exp(-\beta_1 \exp(\beta_2 t)) \exp(-\beta_2 t)$
$\partial y / \partial\beta_2$	$\beta_0 \beta_1 t \exp(-\beta_1 \exp(\beta_2 t)) \exp(-\beta_2 t)$
	Lojistik $y(t) = \beta_0 /(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t)) + \varepsilon$
$\partial y / \partial\beta_0$	$1/(1 + \beta_1 \exp(\beta_2 t))$
$\partial y / \partial\beta_1$	$(-\beta_0 \exp(-\beta_2 t))/(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^2$
$\partial y / \partial\beta_2$	$[(-\beta_0 \beta_1 t)/(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^2] \exp(\beta_2 t)$
	Bertalanffy $y(t) = (\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{1/1-\beta_3}$
$\partial y / \partial\beta_0$	$(\beta_0^{\beta_3})(\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t)^{(1/1+\beta_3)-1}$
$\partial y / \partial\beta_1$	$[(-\exp(-\beta_2 t)/(1 - \beta_3)][\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t)]^{(1/1-\beta_3)-1}$
$\partial y / \partial\beta_2$	$[\beta_1 t/(1 - \beta_3)] \exp(-\beta_2 t)[\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t)]^{(1/1-\beta_3)-1}$
$\partial y / \partial\beta_3$	$\{\exp[(1/(1 - \beta_3)) \ln(\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{(1/1-\beta_3)-1}]/(1 - \beta_3)\}$
	$\{[\ln[\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t)]/(1 - \beta_3)] - [\ln(\beta_0)(\beta_0^{1-\beta_3})/(\beta_0^{1-\beta_3} - \beta_1 \exp(-\beta_2 t))]\}$
	Richard $y(t) = \beta_0 /(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{1/\beta_3} + \varepsilon$
$\partial y / \partial\beta_0$	$(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{-1/\beta_3}$
$\partial y / \partial\beta_1$	$(-\beta_0 / \beta_3)(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{(-1/\beta_3)-1} \exp(-\beta_2 t)$
$\partial y / \partial\beta_2$	$(\beta_0 \beta_1 t / \beta_3)(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{(-1/\beta_3)-1} \exp(-\beta_2 t)$
$\partial y / \partial\beta_3$	$\beta_0 (1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t))^{-1/\beta_3} \ln(1 + \beta_1 \exp(-\beta_2 t)) \beta_3^{-2}$

Çizelge 4. Biyolojik sabit (β_1) için başlangıç değeri belirlemede kullanılacak ifadeler.

Model	Matematiksel İfade
Negatif Eksponensiyal	$y(0) = \widetilde{\beta}_0 (1 - \beta_1)$
Brody	$y(0) = (\widetilde{\beta}_0 - \beta_1)$
Gompertz	$y(0) = (\widetilde{\beta}_0 \exp(-\beta_1))$
Lojistik	$y(0) = \widetilde{\beta}_0 /(1 + \beta_1)$
Bertalanffy	$y(0) = \widetilde{\beta}_0 (1 - \beta_1)^{1/1-\beta_3}$
Richard	$y(0) = \widetilde{\beta}_0 /(1 + \beta_1)^{1/\beta_3}$

Parametre Tahminleri ve Analiz

Doğrusal-olmayan modellerin, vücut ağırlığı ve yaş ilişkisini tanımlayan parametrelerine ait en küçük kareler tahminleri Çizelge 5'te verilmiştir. Bertalanffy modeli için marquard iterasyon yönteminde bir yakınsayamama sorunu ortaya çıkmış olmasına karşın, sonuçlar Çizelge 5'te gösterilmiştir Bertalanffy ve Richard modellerindeki β_1 parametrelerinin dışında tüm tahminler istatistiksel olarak önemli ($P<0.05$) bulunmuştur. Bütün modeller için, β_0 parametresi 36'ncı ayda gözlenen en yüksek vücut ağırlığı değerinden küçük tahminlenmiştir. Bununla birlikte bu değer, negatif eksponensiyal, Brody ve Bertalanffy modellerinde β_0 için tahmin edilen %95'lik güven sınırları içerisinde kalmaktadır.

Çizelge 5. Vücut ağırlığı-yaş ilişkisi için nonlinear modellere ait parametre tahminleri

	Model					
Parametre	Negatif Eksponensiyal	Brody	Gompertz	Lojistik	Bertalanffy	Richard
β_0	51.3832	51.8614	50.5202	49.9731	51.0579	50.5202
β_1	--	0.9211	1.9953	4.6274	5.7884	0.000016
β_2	0.1525	0.1370	0.2217	0.3077	0.1768	0.2217
β_3	--	--	--	--	0.4640	0.000008

Doğrusal-olmayan modellerin parametrelerinin istatistiksel önemliliği, tahminlenen parametrelerin %95'lik asimtotik güven aralıkları değerlendirilerek belirlenmiştir. H_0:β_j=0 hipotezi, β_j'nın %95'lik asimtotik güven aralığı sıfır değerini içermediği zaman reddedilmiştir (Fekedulegn vd., 1999). Çizelge 6'da, Marquard algoritmasıyla türetilen en küçük kareler parametre tahminleri kullanılarak yaşlara göre hesaplanan vücut ağırlığına ait tahmin değerlerinin sapmaları ve kalıntı standart hata değerleri verilmiştir. Brody modeli diğer modellere göre en küçük kalıntı standart hataya (0.47 kg) sahip olmuştur.

Doğrusal-olmayan modellerin biyolojik büyümeyi ölçen bir veri setine uydurulmasında, tahminlenen parametrelerin istatistiksel olarak önemli bulunamaması üç şekilde yorumlanabilir: (1) Modelde yer alan bir yada daha çok parametre gerçekten yararlı olmayabilir. Yani daha az sayıda parametre içeren diğer bir model daha uygun olabilir. (2) Modeli uydurmak için kullanılan biyolojik büyüme verileri, bütün parametrelerin doğru tahminini sağlayacak yeterlikte olmayabilir. (3) Model varsayımları, modellendirilmeye çalışılan biyolojik sistem tarafından karşılanmıyor olabilir. Burada, 2 numaralı durum, Gompertz, Bertalanffy ve Richard modelleri için doğrudur; çünkü erken dönemde bir bükülme noktasına ve uzak dönemde bir maksimum değer veya asimtota sahip olan bu sigmoyidal fonksiyonların, gelişme döneminde bir bükülme noktasına ve olgunluk dönemi ölçümlerine sahip olmayan vücut ağırlığı verilerine uyumu iyi olmamıştır. Ayrıca bu modeller için, önemsiz bulunan parametreler göz önüne alındığında 1 numaralı duruma paralel olarak kullanılan veri bağlamında, sigmoyidal formu ifadeye yarayan parametre fazlalığının gereksizliği de düşünülebilir.

Çizelge 6. Canlı ağırlığa ait gerçek değerler, uydurulan modellere ait tahmin değerlerinin sapmaları ve kalıntı standart hatalar.

Yaş (aylar)	Ağırlık (kg)	Negatif Eksponensiyal	Brody	Gompertz	Lojistik	Bertalanffy	Richard
0	4.1	-4.10	-0.01	2.77	4.78	1.20	2.77
3	19.8	-0.93	0.39	-1.69	-2.19	-0.94	-1.69
6	31.5	-0.69	-0.64	-1.69	-2.62	-1.16	-1.69
9	37.9	0.46	0.03	0.61	0.83	0.37	0.61
12	42.9	0.24	-0.27	1.04	1.91	0.42	1.04
15	45.8	0.37	-0.06	1.22	1.98	0.64	1.22
18	47.3	0.78	0.50	1.39	1.78	1.01	1.39
21	48.7	0.59	0.47	0.87	0.91	0.73	0.87
24	49.7	0.36	0.38	0.33	0.13	0.40	0.33
27	50.2	0.35	0.48	0.07	-0.28	0.29	0.07
30	51.2	-0.35	-0.12	-0.81	-1.25	-0.48	-0.81
33	51.8	-0.75	-0.46	-1.35	-1.84	-0.94	-1.35
36	52.2	-1.03	-0.68	-1.71	-2.23	-1.26	-1.71
KSH*(kg)		1.40	0.47	1.57	2.38	0.99	1.57

*: Kalıntı standart hata

Morkaraman koyunlarının vücut ağırlıklarının zamana göre değişiminin Brody modeli ile en iyi ifade edilmiş olması, vücut ağırlığı büyümesinin, belki de tüm yaşam zamanını kapsamamasından dolayı diğer bir çok biyolojik sistemde görüldüğünün aksine, bir bükülme noktasına ve sigmoyidal bir şekle sahip olmamasından kaynaklanmaktadır. Brody modelinin ikinci türevine (d^2y/dt^2) bakıldığında, bağımsız değişkenin değişim aralığı boyunca negatif ($d^2y/dt^2<0$) olduğu görülür. Bundan dolayı, bu modele göre bir biyolojik bağımlı değişkende ortaya çıkacak birim zamandaki artış (dy/dt), bağımsız değişkenin değişim aralığı boyunca azalacaktır.

Morkaraman koyunlarının ortalama ağırlıklarına uydurulan eğriler için F-dağılışı kullanılarak yapılan heterojenlik testi sonuçları Çizelge 7'de verilmiştir. Doğrusal-olmayan modellerden hiç birisi için 56 hayvan arasında homojenlik sağlanamamıştır (p<0.01). Bu sonuca göre bu çalışmada Morkaraman koyunlarından alınan veriler için hesaplanan parametre değerleri bireysel olarak uniform değildir. Aksine, her koyun daha iyi uyum sağlayan kendi parametre değerlerine sahiptir.

Çizelge 7. Morkaraman koyunlarının ağırlıklarını tahminleyen doğrusal-olmayan modellerin heterojenlik testi sonuçları.

	Ayrı		Birleştirilmiş			
Model	SD	KT	SD	KT	F	P
Negatif Eksponensiyal	616	1577.675	726	2635.870	3.75	0.000
Brody	560	657.565	725	1663.475	5.19	0.000
Gompertz	560	598.360	725	1636.615	5.88	0.000
Lojistik	560	500.695	725	1588.655	7.37	0.000
Bertalanffy	504	549.880	724	1623.545	4.47	0.000
Richard	504	442.480	724	1590.385	5.94	0.000

Tartışma

Bu çalışmanın birinci amacı, doğrusal-olmayan büyüme modellerinin parametre tahmininde gerekli başlıca unsurlar olan kısmi türevleri sağlamak, parametrelerin önemliliğini test etmek, ve bazı istatistiksel sonuçları tarımsal üretim perspektifinden yorumlamaktır. Elde edilen sonuçlara göre, doğrusal-olmayan modellerin kısmi türevlerinin bu modellere ait parametreleri tahmin etmedeki etkinliği, kalıntı kareler toplamının global minumuma öncelikli yaklaşımlar sağlamasıyla, ortaya konulmuştur. SAS sistemine ait NLIN prosedürü, iterasyonun bir global minimum kalıntı kareler toplamına yakınsayacağını garanti etmez. Bu yüzden, yakınsayamama veya istenmeyen bir lokal minimum kalıntı kareler toplamına yakınsama probleminden kaçınmak amacıyla bir alternatif yaklaşım olarak, her bir parametre için değerlerin belirli aralıklarda tanımlanmaları (grid) yoluna gidilmelidir. NLIN prosedürü, kalıntı kareler toplamını her bir kombinasyon için kontrol ederek, iterasyonu başlatacak en iyi başlangıç değerlerini tespit edecektir. Başlangıç değerleri, eldeki bilgiye dayanarak yapılmış ilkel tahminlerdir. Mesela, bu ilkel tahminler, aynı modelle daha önce yapılmış benzer bir çalışmadan elde edilen değerler ya da sadece araştırmacının kişisel deneyim ve bilgisinin bir sonucu da olabilir. Bu bağlamda, doğrusal-olmayan modellere ait parametrelerin anlamlı biyolojik tanımlarına dayanılarak, asimtot ve biyolojik sabit için matematiksel ifadeler elde edilmiştir. Bu matematiksel ifadelerin, örnek vücut ağırlığı verilerini modellerken, parametrelerin başlangıç değerlerinin belirlenmesinde faydalı olduğu sonucuna varılmıştır. Modellenen fenomen ve modele ait parametrelerin anlamını bilmek şartıyla, iterasyon prosedürünün ne zaman lokal bir minimum kalıntı kareler toplamına yakınsadığını anlayabilmek mümkündür. Tahminlenen parametre değerlerine ve asimtotik korelasyon matrisindeki büyüklüklere bakılarak ta, optimal olmayan bir çözüm teşhis edilebilir. Parametre tahminleri arasındaki büyük asimtotik korelasyonlar, bazı parametrelerin önemsiz olduğunu yada modelin fazla parametre içerdiği anlamına gelir. Bununla birlikte, Draper ve Smith (1981) parametre tahminlerine ait büyük korelasyonların, her zaman orijinal modelin çalışılan fiziksel duruma uygun olmadığı anlamına gelemeyeceğini bildirmiştir. Genel olarak, etkili parametre tahminlerine ulaşmak için, parametrelerin ne anlama geldiğinin, kısmi türevler dahil olmak üzere matematiksel modellerin, ve modellenen sistemin iyi bilinmesi büyük avantaj sağlayacaktır. Kısmi türevlerin SAS dışındaki istatistiksel paket programlarda kullanılabilmesi türevlerin yazılabilmesine olanak sağlanmış olmasına bağlıdır. Ancak başlangıç değerleri bütün programlarda kullanıcı tarafından belirlenmek durumundadır.

Kaynaklar

Akbaş, Y., 1995. Büyüme eğrisi modellerinin karşılaştırılması. Hayvansal Üretim 36:73-81.

Akbaş, Y., Taskın, T., Demirören, E., 1999. Farklı modellerin Kıvırcık ve Dağlıç erkek kuzularının büyüme eğrilerine uyumunun karsılastırılması. Turkish J. Vet. and Anim. Sci. 23 (Supplement 3): 537-544

Bertalanffy, L. Von., 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. Quantitative laws in metabolism and growth. Quantitative Rev. Biology 32: 218-231.

Draper, N. R., Smith, H., 1981. Applied regression analysis. 2. Ed. John Wiley & Sons Inc. NY.

Efe, E., 1990. Büyüme eğrileri. Fen Bil. Enst. Zootekni Anabilim Dalı (Doktora Tezi), Adana.

Esenbuga, N., Bilgin, Ö. C., Macit, M., Karaoglu, M., 2000. İvesi, Morkaraman ve Tuj Kuzularında Büyüme Eğrileri. Atatürk Üniversitesi Ziraat Fak. Dergisi: 31, 37-41.

Fekedulegn, D., Mac Siurtain, M.P. and Colbert, J. J., 1999. Parameter estimation of nonlinear growth models in forestry. Silva Fennica, 33(4):327-336.

Kocabaş, Z., Kesici, T., Eliçin, A., 1997. Akkaraman, İvesi x Akkraman ve Malya x Akkaraman kuzularında büyüme eğrisi. Türk Veterinerlik ve Hayv. Dergisi: 21(3): 267-275.

Kshirsagar, A. M., Smith, W.B., 1995. Growth Curves. Marcel Dekker, Inc., pp.1-57.

Marquardt, D. W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. J. Soc. Ind. Appl. Math. 11: 431-441.

Martin, G.L. ve Ek, A.R., 1984. A comparison of competition measures and growth models for predicting plantation red wine diameter and height growth. Forest Sci. 30: 731-743.

Perotto, D., Cue, R.I. and Lee, A.J., 1992. Comparison of nonlinear functions for describing the growth curve of three genotypes of dairy cattle. Can. J. Anim. Sci. 72: 773-782.

Ratkowsky, D. A., 1983. Nonlinear regression modelling. Marcel Dekker, New York. Ratkowsky, D. A., 1990. Hand book of nonlinear regression modelling. Marcel Dekker, New York.

Richards, F.J., 1959. A flexible growth function for emprical use. J. Exp. Bot. 10:290-300.

SAS Institute Inc. 1985. SAS/STAT user's guide, version 6, 4th Ed. SAS Institute Inc., Cary, NC.