İKİ DEĞİŞKENLİ DOĞRUSAL REGRESYONDA ZAMAN FAKTÖRÜ

*Mehmet GENCELİ**

İstatistik, Modern İstatistiğin öncülerinden Abraham Wald'ın verdiği tarife göre "belirsizlik durumlarında rasyonel, optimal kararlar alabilmemize yarayan bir yöntemler topluluğu"[1] olarak tanımlanırsa bu yöntemler topluluğunun iki görevi ortaya çıkar :

1) Verilerin toplanması, tasnif edilmesi,

2) Bu verilerden azamî bilgiyi sağlayarak olayların analizinin yapılması, bulunan sonuçların yorumlanarak kararlar alınması, diğer bir ifade ile geçmişin verilerinden hareketle gelecek için strateji seçilmesi.

Hakkında karar alınacak olaylar çoğu zaman "kesin" olay olma niteliğinden uzak olduğundan verilecek kararlar da tahminlere dayanır[2]. Bir olay hakkında karar verirken de diğer bazı olay veya olaylar bize yardımcı olduklarından çoğu kez bu olaylar arasında mantık çerçevesi içinde fonksiyonel bir ilişki ortaya konarak yapılan tahlil aracına başvurulur. Bu nedenle olaylar arasında fonksiyonel ilişki kurarak, bağımsız olayın yardımıyla bağımlı olay hakkında bilgi veren Regresyon Analizi, İktisat ve diğer dallarda çok sık başvurulan bir araçtır.

(*) İktisat Fakültesi, Genel ve İktisadî İstatistik Kürsüsü asistanı.

1) Sachs Lothar : Statistiche Auswertungsmethoden; Berlin, 1968, Springer Verlag, s. 24.

2) Kaiser H. F. : Directional Statistical Decisions, Pschychological Review 67 (1960), s. 161.

Amaç, bu ana kütlenin temsili bir örneğinden ana kütle regresyon denklemindeki α, β ve σ^2 parametrelerini en küçük kareler yöntemi ile

a) Sistematik hata ihtiva etmeyen

b) Tutarlı

c) Etkin ve yeterli olan[11] tahminlerini bulabilmektir.

Örneğin regresyon denklemini :

$y = a + bx + e$ (3), $e = y_i - \hat{y}$ olarak belirleyelim. En küçük kareler yönteminde amaç $\Sigma (y_i - \hat{y})^2 \rightarrow \min$, $S = \Sigma (y_i - a - bx_i)^2 \rightarrow \min$ olduğuna göre bu özelliği gerçekleyecek a ve b'nin değerleri :

$$a = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} ;$$

$$b = \frac{n \Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

olarak bulunur. En küçük kareler yönteminin sadece bir matematiksel işlem olduğuna ve herhangi bir varsayım gerektirmediğine de işaret edilmelidir. Ancak modelde hata terimleri, u_i'lerin normal olarak dağıldıkları varsayıldığından, burada en küçük kareler yöntemi ile Maksimum Muhtemellik Metodu aynı sonuç verecektir[12].

Diğer taraftan "hata terimleri" de bilinmediğine göre σ^2_u'nun tahmini gerekmektedir. Bunların tahmini niteliğindeki örnek denklemindeki kalıntıların[13] varyansı ise şu şekildedir :

---

11) Kenan Ural : İstatistik ve Karar Alma, İktisat Fakültesi Yayın no. 324, İstanbul, 1973, s. 119 - 121.

12) "Maximum Likelihood Method" karşılığı alınmıştır. Bkz.: Ak İktisat Ansiklopedisi, s. 607.

13) "Residuals' 'karşılığı alınmıştır.

$$\sigma^2_e = \frac{\Sigma (e_i - e^\circ)^2}{n} = \frac{\Sigma (e_i^2 - 2e\,e^\circ + (e^{\circ 2})}{n} \text{ dir;}$$

$$e^\circ = \frac{\Sigma e_i}{n} \text{ ve } \Sigma e_i = 0 \text{ olduğundan,}$$

$\sigma^2_e = \dfrac{\Sigma e_i^2}{n}$ haline dönüşecektir. Ancak $e_i = y_i - a - bx_i$ olduğundan ve e_i lerin hesabından önce α ile β'nın tahminleri örnekten hesaplandıkları için σ^2_e, $\dfrac{n}{n-2}$ ile tashih edildikten sonra σ^2_u nun sistematik hata ihtiva etmeyen bir tahmini olur ve $S^2y.x$ ile gösterilir :

$$\sigma^{\circ 2}_u = E\left(\frac{\Sigma e_i^2}{n-2}\right) \qquad (\sigma^\circ)^2 = S^2{}_{Y \cdot X} = \frac{\Sigma (y_i - a - bx_i)}{n-2};$$

$$S_{Y \cdot X} = \sqrt{S^2_{Y \cdot X}}$$

$S^2_{Y \cdot X}$, tahminlerin standart hatası olarak adlandırılır[14].

Bu durumda, bir örneğe istinaden yapılacak ana kütle regresyon denklemindeki parametrelerin tahmini işlemi şu üç aşamadan oluşmaktadır :

1) Parametrelerin tahmini olan katsayıların hesaplanması,
2) Bunlara ait anlamlılık testleri,
3) Güven sınırlarının belirlenmesi.

Anlamlılık testleri yardımıyla örnekten hesaplamış olduğumuz a ve b katsayılarının kabul veya red bölgelerinden hangisine isabet ettiğini bulabilmek mümkündür. a ve b'ye ait testler ayrı ayrı yapılabileceği gibi birlikte de yapılabilir.

---

14) Halûk Cillov: İstatistik Metodları, İktisat Fakültesi Yayın no. 308, İstanbul 1972, s. 197.

Testler ayrı yapılmak istenilirse Student dağılımından, birlikte yapılmak durumunda da F - dağılımından faydalanılır.

Yapılacak testler :

$H_o : \alpha = 0$ ve $H_A : \alpha \neq 0$

$H_o : \beta = 0$ ve $H_A : \beta \neq 0$ dır ve bunlara tekabül eden t - değerleri ise :

$$t = \frac{b - \beta}{S_b}; \quad \beta = 0; \qquad t = \frac{a - \alpha}{S_a}; \quad \alpha = 0;$$

$$t = \frac{b}{S_b} \qquad t = \frac{a}{S_a}$$ şeklindedir.

s^2_b ise $s^2_b = E\,[b - E\,(b)]^2$ nin çözümü ile elde edilir ve

$$s^2_b = \frac{\sigma^2_u}{\Sigma\,(X - \bar{X})^2}$$ bulunur. Ancak σ^2_u bilinemediği için, σ^2_u s^2_{YIX} ile ikame edilerek $s^2_b = \frac{s^2_{YIX}}{\Sigma\,(X - \bar{X})^2}$ sonucuna ulaşılır[15]

Diğer taraftan s^2_b ve s^2_a nın hesaplanması

$$s^2_b = \frac{n \cdot S^2_{YIX}}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \quad \text{ve} \quad s^2_a = \frac{s^2_{YIX}(\Sigma X^2)}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$ ile de

yapılabilir[16]. Bu formüller yardımıyla hesaplanacak t - değerleri Student tablosundan (n — 2) serbestlik derecesine göre[17] bulunacak tablo değerleri ile karşılaştırılarak H_o kabul veya reddedilir.

---

15) Kane : op. cit., s. 236.
16) Merrill ve Fox : op. cit., s. 332.
17) Çünkü burada σ^2_u yerine $s^2_{Y.X}$ kullanılmaktadır, ve α ile β tah-

$H_o : \beta = 0$ testi için diğer bir yol da korelasyon katsayısı r'in daha önce hesaplanmış olması halinde $r^2 = 1 - \frac{S^2_{Y|X}}{\sigma_y^2}$ formülünden faydalanarak $t = \frac{b\,\sigma_x \sqrt{n-2}}{S_{Y|X}}$ yazmaktır[18].

Ayrıca, daha önce varyans analizi yapıldığı takdirde, bunun için yapılan hesaplamalardan faydalanabilmek amacıyla β'nın anlamlılığı için F - testi de uygulanabilir[19]. Bilindiği gibi F - oranı, her birimin kendi serbestlik derecesine bölündüğü iki x^2 değişkeninden meydana gelen bir oran olup F - dağılımına uygundur[20]. Buradan, $F = \frac{b^2 \Sigma (X - \bar{X})^2}{S^2_{Y|X}}$ yardımı ile bulunacak F değeri, (1, n — 2) serbestlik derecelerine göre bulunacak tablo değeri ile karşılaştırılır.

α ve β'nın birlikte test edilmeleri de mümkündür. Hipotez : $H_o : \alpha = 0, \beta = 0$ ve $H_A : \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0$ olacaktır. Bu test için de gene F - oranından faydalanılır, ancak bu kere F'in pay ve paydaları farklıdır.

α_o ve β_o'ı, α ve β'nın hakiki fakat bilinmeyen değerleri olduklarını varsayarak $K_1 = \Sigma u_i^2 = \Sigma [Y_i - (\alpha_o + \beta_o X_i)]^2$ vazedelim. K_1/σ^2 oranı da n serbestlik derecesini haiz bir x^2 - dağılımıdır. K_2 ise $K_2 = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \Sigma [Y_i - (a + bX_i)]^2$ olsun. K_2/σ^2 oranı da (n — 2) serbestlik derecesinde bir x^2 - dağılımıdır. K_3 ile de Y_i lerin tahminleri $\hat{Y}_i$'ler ile $E(Y_i)$ arasındaki farkların karelerinin toplamını gösterelim. $K_3 = \Sigma [(a + bX_i) - (\alpha_o + \beta X_i)]^2 =$

---

min edildiklerinden, $\sigma^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{n-2}$ dolayısiyle serbestlik derecesi (n - 2) alınmaktadır.

18) Hays and Winkler : Statistics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971 ,s. 637.
19) Kane : op. cit., s. 235.
20) Huang : op. cit., s. 47 ve sonrası.

$\Sigma\ [(a - \alpha_o) + (b - \beta)X_i]^2$. K_3'ün de σ^2 ye bölümü, (2) serbestlik derecesinde bir x^2 - dağılımı verecektir.

Dağılımlara varyans açısından bakılırsa

$\Sigma\ (Y_i - Y')^2 = \Sigma\ (Y_i - Y^\circ)^2 + \Sigma\ (Y^\circ - Y')^2$ eşitliği vardır. $E(Y) = Y^c$ den faydalanılarak $K_1 = K_2 + K_3$ yazılabilir. K_3 ve K_2 yi birbirine oranlarsak $\dfrac{K_3/2\sigma^2}{K_2/(n-2)\,\sigma^2}$ elde edilir. Pay ve payda x^2 - dağılımı olduğundan bu oranı F oranı olarak kabul ederek $F = \dfrac{K_3/2}{K_2/(n-2)}$ oranını yazabiliriz. Hesaplanan F - değeri, [2, (n — 2)] serbestlik derecelerine göre bulunacak F - tablo değerleri ile karşılaştırılarak H_o red veya kabul edilir.

Test sonucu $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, ise, sıra gene tahminlerin güven sınırlarını bulmaya gelmektedir. α ve β tahminlerine ait güven sınırları :

$$a \pm t \,.\, S_a \qquad \text{ve} \qquad b \pm t \,.\, S_b$$

yardımı ile bulunacaktır[21] .

II

En küçük kareler yöntemi ile bulunan a ve b katsayılarının sistematik hata ihtiva etmemesi ve test edilebilmesi, $y = f(x)$ fonksiyonel ilişkisinin incelendiği örnek birimlerinin normal dağıldıkları ve Klâsik Regresyon Modeli'nin varsayımlarını gerçekledik-

21) Burada kastedilen geniş anlamda tahmin (estimation) dur. Geniş anlamda tahmin bir ana kütlenin bilinmeyen sayısal değerlerini bir örnekten hesaplanan değerler yardımıyla bulmaktır. Dar anlamda tahmin (prediction) ise bağımlı değişkenin beklenen değerinin projeksiyonu, yani veri bir X_0 değişkeni için $E\ (Y^\circ_0) = a + b \times X_0$ dur. Bkz.: Kendall and Buckland; a Dictinary of Statistical Terms, Oliver and Boyd, London, 1973, s. 51 ve Huang; op. cit., s. 48.

leri esasına dayanmaktadır. Ancak zaman serilerinin örnek birimlerini teşkil etmeleri halinde varsayımlar gene gerçeklenebilecek midir? Çünkü artık burada $y = f(x)$ fonksiyonel ilişkisi, yerini $y = f(z)$, $z = g(t)$, $y = f(g(t))$ ilişkisine bırakmıştır.

Tabiatiyle zaman içinde müşahede edilen veriler arasmda da bir ayırım yapılmaktadır. Örneğin belli bir anda n kişiyi müşahede ederek bunların harcamalarını tesbit etmek zamanla ilgili olmakla beraber "cross section birimler"[22] niteliğinde olup zamanın bir fonksiyonu değildir, ancak bir kimsenin belirli zamanlarda harcamasını müşahede etmek bir zaman serisi meydana getirir.

$y = f(g(t))$ fonksiyonel ilişkisinin de varsayımları gerçeklediği kabul edilecek midir? Çünkü bir zaman serisinin (X, Y) şeklindeki ikililerinden oluşan bir örnek tesadüfî örnek olmayabilir, bu da modelin varsayımlarının gerçeklendiği hususunda şüphe uyandırabilir. Nitekim $E(u_i, u_{i-1}) \neq 0$ olması halinde en küçük kareler yönteminin uygulanması yeterli olmayan sonuçlar doğurur[23].

Cochran ve Orcutt (1949) regresyon denklemlerinin tesadüfî kısmında otokorelasyon bulunması halinde tesadüfîlik varsayımının bozulacağına, böyle durumlarda da en küçük kareler yönteminin test ve tahmin için yeterli olmayacağına işaret etmişlerdir[24]. Zaman serileri açısından, $E(u_i, u_{i-1}) = 0$ ve eşit varyans (homoscedasticity) varsayımları son derece önemli olmaktadır, çünkü varsayımların gerçekleşmemesi halinde en küçük kareler yöntemi istikrarlı sonuç vermediği gibi $E(u_i, u_{i-1}) > 0$ halinde $(\sigma^{\circ})^2$ ve S_b^2 düşük olacaktır[25]. Diğer taraftan Cochran ve Orcutt zaman serilerinin ele alındığı birçok ekonomik ilişkilerde hata terimlerinde yüksek bir otokorelasyonun varlığına da işaret etmişlerdir[26].

Ayrıca Durbin - Watson (1950) da hata terimlerinin bağımsız olmaması halinde, α ve β nın tahminlerinin sistematik hata ihtiva

---

22) Hays and Winkler; op. cit., s. 637.
23) Kane; op. cit., s. 369.
24) Cochran ve Orcutt : op cit., s. 32.
25) Kane ; op. cit., s. 369.
26) Corchran ve Arcutt : op. cit., s. 36.

etmemekle beraber varyanslarmm minimum olmadığını ve t, F testlerinin yapılamıyacağını önermişlerdir[27].

Böyle ekonomik ilişkilerde fonksiyonel bağıntıyı tesbit ederek tahminde bulunurken zaman bakımından iki husus ortaya çıkmaktadır :

1) Zamanın varsayımlar üzerindeki etkisini ölçmek

2) Etki menfi ise, varsayımları geçerli kılacak yöntemler uygulamak.

A) *Otokorelasyonun ölçülmesi* :

Cochran ve Orcutt otokorelasyonun ölçüsü olarak $D = \sigma^2/S^2$ şeklinde gösterilen bir oran kullanmışlardır. Burada :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (X_{i+1} - X_i)^2 \qquad S^2 = \frac{1}{n} \Sigma (X_i - \bar{X})^2$$

ve $\bar{X} = \dfrac{\Sigma X}{n}$ dir. D, birbirini takip eden terimler arasındaki farkların karelerinin serinin varyansına olan oranı olup, Von - Neumann oranı olarak adlandırılmaktadır[28]. σ^2 aslında farkların karelerinin ortalamasıdır. n terimin birbirinden (n — 1) kadar farkı olacağından (n — 1) ile bölünmüştür. D'nin kritik değeri 2 dir. 2 civarındaki değerler otokorelasyon bulunmadığına veya ihmal edilebilecek derecede az olduğuna delalet eder. D'nin küçük (büyük) çıkması, pozitif (negatif otokorelasyonu) gösterir[28]. X_i lerin normal dağıldıkları ana kütle aritmetik ortalaması μ ile varyansının bilindiği varsayımları altında D'nin anlam sınırları Hart tarafından hesaplanmıştır[30]. $n>60$ için normal dağılım tablosu Hart'ın tablosu yerine ikame edilebilir.

---

27) Durbin J. and Watson G. S., Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, I, Biometrica, 37, (1950), s. 409.

28) Bkz.: Von - Neumann: Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Differences to the Variance, Annals of Mathematical Statistics, 12 (1941), s. 367 - 395.

29) Theil Henri : Principles of Econometrics, John Wiley, New York, 1971, s. 219.

30) Thiel : ibid., s. 219.

Lakin Von - Neumann oranı genellikle karşılaştığımız otokorelasyon problemleri için pratik bir yol değildir, çünkü Hart'm tablosu tesadüfî müşahedeler olan u_i lere dayanmaktadır. Halbuki Crist'in işaret ettiği gibi[31] u_i ler yerine bunların tahminleri olan $\hat{u}_i$ ler kullanılmaktadır. D ise ancak u_i ler bilindiği takdirde kullanılabilir[32]. Bu nedenle Theil, D oranı ve Hart tablosu yerine değiştirilmiş Von - Neumann oram D' kullanmıştır[33]. D' oranının limitleri ise Press ve Brooks (1969) tarafından hesaplanmıştır :

$$D' = \frac{\Sigma(\hat{u}_{i+1} - \hat{u}_i)^2}{(n - k - 1)\, S^2}$$

Burada, k, açıklayıcı değişken sayısıdır.

Otokorelasyonu ölçmek için Durbin - Watson testi tatbikatta çok daha yaygındır; çünkü bu test Durbin - Watson'un ifade ettiği gibi "hatalar bilinemiyeceğine göre test kalıntılara dayanmaktadır"[34], yani $\hat{u}_i$ lere istinat etmektedir.

Durbin - Watson kalıntılara dayanan bir d oranından hareket etmektedirler[35]. Aslında d oranı, D oranından n/n — 1 kadar farklılık gösterir.

$$d = \frac{\sum_{2}^{n} (\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})}{\sum_{1}^{n} (\hat{u}_i)^2} = \frac{\sum_{2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\Sigma(e_t)^2}$$

$$e_t = (Y_t - Y_t^{\circ})$$

Bu testte, test tek taraflı veya çift taraflı yapılabilir. d'nin kritik değeri 2 dir. 2 civarındaki bir d değeri otokorelasyon olmadığı

---

31) Christ : Econometric Models and Methods, John Wiley, New York, 1972, s. 524.
32) Huang : op. cit., s. 139.
33) Theil : op. cit., s. 222.
34) Durbin - Watson : op. cit., s. 409.
35) Bkz. Kane : op. cit., s. 376 ve Christ : op. cit., s. 500 ve sonrası.

şeklindeki H_o ın kabulünü gerektirir. d'nin, tablo değerlerinin alt ve üst limitleri olan d_l ve d_u ile karşılaştırılmalarının sonucunda, H_o ve H_A nın kabul ve red bölgelerinin hangisine gireceği aşağıdaki tabloda gösterilmiştir :

TABLO : 1

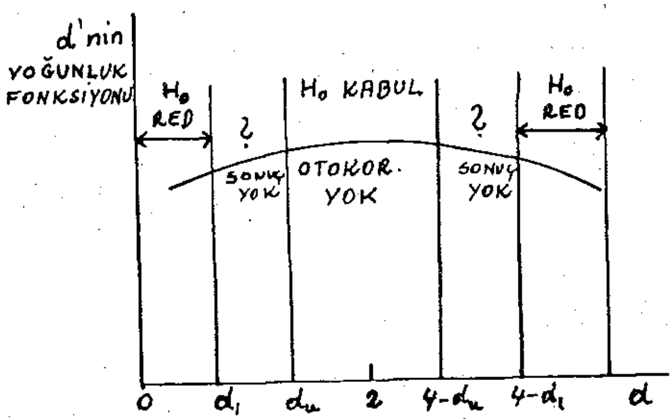
Durbin - Watson testi için H_o ve H_A'nın kabul bölgeleri

d	O	d_1	d_u 2	$4-d_u$	$4-d_1$ 4
	H_o : red, H_A : pozitif otokorelasyon mevcut	Test sonuç vermez	H_o : kabul, otokorelasyon yok	Test sonuç vermez	H_o : red, H_A : negatif otokorelasyon mevcut

Kaynak : Kane : op. cit., s. 367.

Buna tekabül eden d'nin yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki grafikteki gibidir.

GRAFİK : 2



Kaynak : Christ, op .cit., s. 526.

Durbin - Watson testi, Cochran - Orcutt'a nazaran üstün olmakla beraber gene de uygulanabilmesinde bazı sorunlar vardır :

1) Test otokorelasyonu ölçmeye yönelmiştir. Ancak otokorelasyonun saptanması halinde ne gibi bir işlem yapılacağı belirtilmemiştir.

2) (d_l, d_u) aralığında test sonuç vermez.

3) d_l, d_u nun değeri bağımsız değişken sayısına bağlıdır. Bilhassa birim sayısının az ve açıklayıcı değişken sayısı k nın az olmadığı durumlarda (d_l, d_u) aralığı büyümekte, bu da sonuç vermeyen bölgeyi genişletmektedir.

Nitekim Theil ve Nagar'a göre de (d_l, d_u) aralığı büyük güçlük meydana getirmektedir. "Araştırmacı, test sonuç vermez ibaresini H_0 un reddine gerek olmadığı şeklinde yorumlama eğilimindedir, bu da çok kere pozitif otokorelasyonun gözden kaçmasına sebep olur"[36].

Theil ve Nagar, Durbin - Watson testinin en büyük zayıflığını teşkil eder, $d_l < d < d_u$ durumunu izale etmeye çalışarak pozitif otokorelasyonu ölçmeye matuf tek taraflı bir test için, T : müşahede sayısı ve $\wedge$: katsayı adedine, yani açıklayıcı değişken + (varsa) sabit terime göre, yeni bir tablo düzenlemişlerdir. Bu tablo değerleri Durbin - Watson tablo değerlerine çok yakındır. Ancak Theil - Nagar'ın en büyük katkısı pozitif otokorelasyonu düzeltecek bir yöntem getirmeleridir.

Theil ve Nagar'da disturbanslar olan u'ların[37] varyansının sabit olduğu ve normal dağıldıkları varsayımı altında ana kütle regresyon denklemi

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \text{ dir}^{38}.$$

Yapılan sıfır hipotezinde u'ların birbirinden bağımsız olduğu varsayılmıştır.

---

36) Theil, H. and Nagar H. L. : Testing the Independence of Regression Disturbances, Journal of ASA, 56 ,(December 1961), s. 793 - 794.

37) Ana kütlede birimlerin genel eğiliminden farkları.

38) Theil - Nagar : op. cit., s. 794.

H_0 : kalıntılar birbirinden bağımsızdır.
H_A : birbirini takip eden disturbanslar arasında pozitif ilişki, yani otokorelasyon mevcuttur.

H_0 un testi, d'ye göre yapılmaktadır, Durbin - Watson testinin aynıdır. Ancak H_0 un reddi, H_A nın kabulü halinde, otokorelasyon bertaraf edilmelidir. Ancak, modelin sistematik kısmı kesinlikle bilinmediği takdirde bu çok tehlikeli bir işlemdir[39]. Bunun için otokorelasyonu bertaraf edecek işleme başvurmadan önce modelin sistematik kısmı tekrar gözden geçirilmelidir. H_A nın kabulü halinde, $E(u_t\ u_{t-1}) \neq 0$ olacağından modelin varsayımı bozulmaktadır. Böyle durumlarda Theil - Nagar, (0, 1) aralığında değerler alan bir ρ parametresi yardımıyla birimleri dönüşüme tabi tutmaktadır : ρ, disturbansların birinci mertebeden otokorelasyonu olup, parametre olması dolayısiyle de ancak tahmin edilebilmektedir.

ρ nun tahmini için en basit yol, ρ° nun Durbin - Watson istatistiği d yardımıyla, $\rho^\circ = 1/2$ d olarak belirlenmesidir[40]. Ancak bu yöntem subjektif olup istatistiki değildir[41].

Bu yöntem yerine $\rho = \dfrac{T^2(1 - 1/2\ d) + \Lambda^2}{T^2 - \Lambda^2}$ kullanılmasi[42] daha etkin sonuçlara yol açar.

ρ° ile düzeltilen yeni değişkenler ise

$Y'_t = Y_t - \rho^\circ Y_{t-1}$ ve $X'_t = X_t - \rho^\circ X_{t-1}$ olarak yazılmaktadır.

Regresyon denklemi ise bu değişkenler cinsinden

$$Y'_t = \alpha(1 - \rho) + \beta X'_t + V_t$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1 - \rho^\circ) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + V_t$$

şeklinde gösterilebilir.

---

39) Kane : op. cit., s. 370.
40) Theil - Nagar, op. cit., s. 804.
41) Kane : op. cit., s. 371.
42) Theil - Nagar : loc. cit.,

V_t : sabit varyanslı, birbirinden bağımsız olan sapmalardır.

$Y_t - \rho Y_{t-1} = Y_t - \rho Y_t + \rho Y_t - \rho Y_{t-1}$ şeklinde yazılırsa, buradan, $Y_t - \rho Y_t + \rho(Y_t - Y_{t-1})$ sonucuna ulaşmak mümkündür. Aynı şekilde X için de $X_t - \rho X_{t-1} = X_t (1 - \rho) + \rho \Delta X_t$ bulunabilir.

Böylece, pozitif otokolerasyon ihtiva etmeyen yeni değişkenler cinsinden regresyon denklemi şu şekilde gösterilebilecektir :

$$\{(1-\rho)Y_t + \rho\Delta Y_t\} = \alpha(1-\rho) + \beta\{(1-\rho)X_t + \rho\Delta X_t\} + V_t$$

En küçük kareler yönteminin uygulanması ile elde edilecek normal denklemler yardımı ile denklem kolaylıkla çözülebilir :

$$\text{I} \quad \Sigma\{(1-\rho)Y_t + \rho\Delta Y_t\} = N \,.\, \alpha(1-\rho) + \Sigma\{\beta(1-\rho\,\Delta X_t\}$$

$$\text{II} \quad \Sigma\{(1-\rho)Y_t + \rho\Delta Y_t\}\{X_t(1-\rho) + \rho X_t\} = \alpha(1-\rho)$$

$$\Sigma(1-\rho)X_t \quad \rho\Delta X_t + \{\beta(1- \; + \rho) X_t + \rho \,\Delta\, X_t\}^2$$

Buradan bulunacak sonuçlar artık

a) Sistematik hata ihtiva etmeyen
b) Tutarlı
c) Etkin ve yeterli olan tahminlerdir.

III

Zaman serileri açısından, regresyon denklemlerindeki $E(u_t\, u_{t-1}) = 0$ ve varyansların eşitliği varsayımları, varsayımların gerçeklenmeme olasılığı yüksek olduğundan, son derece önem kazanmaktadır. Bu bakımdan model, bu iki varsayım açısından teste tabi tutulmalıdır. Bu testler içinde Durbin - Watson Testi, bazı durumlarda sonuç vermemesine rağmen en yaygınlıkla kullanılan testtir. 2 civarındaki bir Durbin - Watson istatistiği d, otokorelasyon olmadığına işarettir. Ancak modelin tesadüfî kısmında saptanacak bir otokorelasyonun, sistematik kısmındaki bir eksiklikten de doğabileceği daima gözönüne alınmalıdır.

Diğer taraftan zaman serilerinde saptanan otokorelasyon çok kere pozitif otokorelasyon olduğundan, bu pozitif otokorelasyonu ortadan kaldırmak için bir yöntem getiren Theil-Nagar yöntemi bu yönde atılan büyük bir adımdır. Bu yöntemin en hassas noktasını ise ρ parametresinin tahmini teşkil eder. ρ'nun, aynı zamanda, iki seri arasındaki ilişkinin derecesini saptayan korelasyon katsayısını da etkileyeceği de hatırlanmalıdır.

Uygulamada daha az yaygınlıkla kullanılmakla beraber, varyansların eşitliği de test edilmek istenilirse, bunun için Bartlett[43] ve Goldfeld - Quandt Testleri[44] uygulanabilir.

Bartlett Testi aslında bir ana kütleden çekilen birim sayısı aynı veya farklı olan örneklerin varyanslarının homojenliğini ölçmek için kullanılır. Bu nedenle, zaman serilerinde "homoscedasticity" yi ölçmek üzere geliştirilmiş bulunan ve parametrik olan ve olmayan olmak üzere iki ayrı yoldan hesaplanabilen Goldfeld - Quandt Testi, Bartlett Testine oranla daha üstündür.

Tabiatiyle değinilen bu testler, bu yönde geliştirilmiş bir çok testten sadece birkaçıdır. Varsayımların gerçeklenip gerçeklenmediği diğer testler yardımı ile de kontrol edilebilir.

---

43) Barlett, M.S. : Properties of Sufficiency and Statistical Tests. Proc. Roy. Soc. A 160 (1937), s. 268 - 282.

44) Bkz.: M. M. Goldfeld and R. Quandt : Some Tests for Homoscedasticity; Journal of ASA., Vol. 60 (1965), s. 539 - 547.

KAYNAKLAR

Kitaplar :

Sachs LOTHAR; Statistiche Answertungsmethoden; Springer Verlag; Berlin 1968.

Menges GÜNTER; Statistik, Theorie I, Westdeutscher Verlag, Opladen, 1973.

MERRIL and FOX; Economic Statistics, John Wiley, New York, 1970.

Yamane TARO; Mathematics for Economists; Prentice Hall, New York, 1965.

Huang DAVID; Regression and Econometric Methods, John Wiley, New York, 1971.

Kane E. J.; Economic Statistics and Econometrics; Harper - Row, New York, 1969.

Kenan URAL; İstatistik ve Karar Alma, İstanbul, 1973.

Halûk CILLOV; İstatistik Metodları, İstanbul, 1972.

HAYS and WİNKLER; Statistics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

Theil HENRI; Principles of Econometrics, John Wiley, New York, 1971.

CHRIST; Econometric Models and Methods; John Wiley, New York, 1972.

Makaleler :

Kaiser H. F.; Directional Statistical Decisions ,Pschychological Review 67 (1960).

COCHRAN and ORCUTT ;Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Austocorelated Error Term, Journal of ASA, Volume 44, 1949.

Durbin J., and Watson G. S.; Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, I, Biometrica 37 (1950) ve Biometrika 38, (1951).

Theil, H. and Nagar H. L., Testing the Independence of Regression Disturbances, Journal of ASA, 56, December (1961).

M. GOLDFELD and R. E. QUANDT; Some Tests for Homoscedasticity ,Journal of ASA, Vol. 60 (1965).

EK : 1

% 5 anlam seviyesinde d - Durbin - Watson istatistiğinin alt ve üst sınırları

	K = 1		K = 2		K = 3		K = 4		K = 5	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	.95	1.54	.82	1.75	.69	1.97	.56	2.21
16	1.10	1.37	.98	1.54	.86	1.73	.74	1.93	.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	.90	1.71	.78	1.90	.67	2.10
13	1.16	1.39	1.05	1.53	.93	1.69	.82	1.87	.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	.97	1.68	.86	1.85	.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	.90	1.83	.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	.93	1.81	.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	.96	1.80	.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	.99	1.79	.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	.98	1.83
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.73
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

K : bağımsız değişken sayısı

Kaynak : Huang; Regresion and Econometric Methods, s. 255.

EK : 2

% 1 anlam seviyesinde d - Durbin - Watson istatistiğinin alt ve üst sınırları

	K = 1		K = 2		K = 3		K = 4		K = 5	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	.81	1.07	.70	1.25	.59	1.46	.49	1.70	.39	1.96
16	.84	1.09	.74	1.25	.63	1.44	.53	1.66	.44	1.90
17	.87	1.10	.77	1.25	.67	1.43	.57	1.63	.48	1.85
18	.90	1.12	.80	1.26	.71	1.42	.61	1.60	.52	1.80
19	.93	1.13	.83	1.26	.74	1.41	.65	1.58	.56	1.77
20	.95	1.15	.86	1.27	.77	1.41	.68	1.57	.60	1.74
21	.97	1.16	.89	1.27	.80	1.41	.72	1.55	.63	1.71
22	1.00	1.17	.91	1.28	.83	1.40	.75	1.54	.66	1.69
23	1.02	1.19	.94	1.29	.86	1.40	.77	1.53	.70	1.67
24	1.04	1.20	.96	1.30	.88	1.41	.80	1.53	.72	1.66
25	1.05	1.21	.98	1.30	.90	1.41	.83	1.52	.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	.93	1.41	.85	1.52	.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	.95	1.41	.88	1.51	.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	.97	1.41	.90	1.51	.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	.99	1.42	.92	1.51	.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	.94	1.51	.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	.96	1.51	.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	.98	1.51	.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	133.	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

K : bağımsız **değişken** sayısı.

Kaynak : Huang; Regression and Econometric Methods, s. 256.

EK : 3

Von - Neumann oranlarının % 5, % 1 ve % 0.1 anlamlılığına göre Hart tablosu

Müşahede sayısı	% 5 poz. otokorelas.	% 1 poz. otokorelas.	% 0.1 poz. otokorelas.	% 5 neg. otokorelas.	% 1 neg. otokorelas.	% 0.1 neg. otokorelas.
4	1.0406	.8341	.7864	4.2927	4.4992	4.5469
5	1.0255	.6724	.5201	3.9745	4.3276	4.4799
6	1.0682	.6738	.4361	3.7318	4.1262	4.3639
7	1.0919	.7163	.4311	3.5748	3.9504	4.2356
8	1.1228	.7575	.4612	3.4486	3.8139	4.1102
9	1.1524	.7974	.4973	3.3476	3.7025	4.0027
10	1.1803	.8353	.5351	3.2642	3.6091	3.9093
11	1.2962	.8706	.5717	3.1938	3.5294	3.8283
12	1.2301	.9033	.6062	3.1335	3.4603	3.7574
13	1.2521	.9336	.6390	3.0812	3.3996	3.6944
14	1.2725	.9618	.6702	3.0352	3.3458	3.6375
15	1.2914	.9880	.6999	2.9943	3.2977	3.5853
16	1.3090	1.0124	.7281	2.9577	3.2543	3.5386
17	1.3253	1.0352	.7548	2.9247	3.2148	3.4952
18	1.3405	1 0566	.7801	2.8948	3.1787	3.4552
19	1.3547	1.0766	.8040	2.8675	3.1456	3.4182
20	1.3680	1.0954	.8265	2.8425	3.1151	3.3840
21	1.3805	1.1131	.8477	2.8195	3.0869	3.3523
22	1.3923	1.1298	.8677	2.7982	3.0607	3.3228
23	1.4035	1.1456	.8866	2.7784	3.0362	3.2953
24	1.4141	1.1606	.9045	2.7599	3.0133	3.2695
25	1.4241	1.1748	.9215	2.7426	2.9919	3.2452
26	1.4336	1.1883	.9378	2.7264	2.9718	3.2222
27	1 4426	1.2012	.9535	2.7112	2.9528	3.2003
28	1.4512	1.2135	.9687	2.6969	2.9348	3.1794
29	1.4594	1.2252	.9835	2.6834	2.9177	3.1594
30	1.4672	1.2363	.9978	2.6707	2.9016	3.1402

EK : 4

% 5, % 1, % 0.1 anlamlılığa göre Press ve Brooks'un değiştirilmiş Von - Neumann oranı

Serbestlik	poz. otokor. için			neg. otokor. için		
derecesi	% 5	% 1	% 0.1	% 5	% 1	% 0.1
2	.025	.001	.000	3.975	3.999	4.000
3	.252	.052	.005	4.142	4.427	4.493
4	.474	.170	.037	3.827	4.295	4.496
5	.598	.292	.095	3.571	4.076	4.378
6	.701	.386	.163	3.413	3.881	4.233
7	.790	.464	.228	3.299	3.731	4.095
8	.861	.537	.285	3.206	3.618	3.973
9	.922	.601	.339	3.131	3.524	3.871
10	.975	.657	.390	3.069	3.445	3.784
11	1.020	.708	.438	3.016	3.378	3.710
12	1.060	.753	.482	2.970	3.319	3.645
13	1.096	.795	.523	2.930	3.268	3.587
14	1.128	.832	.561	2.895	3.222	3.535
15	1.157	.866	.597	2.863	3.181	3.488
16	1.183	.898	.630	2.835	3.144	3.445
17	1.207	.927	.661	2.809	3.110	3.406
18	1.228	.954	.691	2.785	3.079	3.370
19	1.249	.979	.718	2.764	3.051	3.337
20	1.267	1.003	.744	2.744	3.025	3.306
21	1.285	1.024	.769	2.725	3.000	3.277
22	1.301	1.045	.792	2.708	2.978	3.250
23	1.316	1.064	.814	2.692	2.957	3.225
24	1.330	1.082	.834	2.677	2.937	3.201
25	1.344	1.100	.854	2.663	2.918	3.179
26	1.356	1.116	.873	2.650	2.901	3.157
27	1.368	1.131	.891	2.638	2.884	3.137
28	1.380	1.146	.908	2.626	2.868	3.118
29	1.390	1.160	.925	2.615	2.854	3.100
30	1.400	1.173	.940	2.605	2.839	3.083

EK : 5

Theil - Nagar Testinde kullanılan Von - Neumann oranları

T : Müşahede sayısı	Katsayılar 2		3		4		5		6	
	% 1	% 5	% 1	% 5	% 1	% 5	% 1	% 5	% 1	% 5
15	1.07	1.36	1.24	1.53	1.43	1.73	1.65	1.94	1.88	2.16
16	1.08	1.37	1.24	1.53	1.42	1.71	1.62	1.90	1.83	2.11
17	1.10	1.38	1.25	1.53	1.41	1.69	1.59	1.87	1.79	2.06
18	1.12	1.39	1.25	1.53	1.40	1.68	1.57	1.85	1.75	2.02
19	1.13	1.40	1.26	1.53	1.40	1.67	1.56	1.83	1.72	1.99
20	1.15	1.41	1.26	1.53	1.40	1.67	1.54	1.81	1.70	1.96
21	1.16	1.42	1.27	1.53	1.40	1.66	1.53	1.80	1.68	1.94
22	1.17	1.43	1.28	1.54	1.40	1.66	1.53	1.78	1.66	1.92
23	1.19	1.44	1.29	1.54	1.40	1.65	1.52	1.77	1.65	1.90
24	1.20	1.45	1.29	1.54	1.40	1.65	1.51	1.77	1.64	1.89
25	1.21	1.45	1.30	1.55	1.40	1.65	1.51	1.76	1.63	1.87
26	1.22	1.46	1.31	1.55	1.40	1.65	1.51	1.75	1.62	1.86
27	1.23	1.47	1.32	1.55	1.41	1.65	1.51	1.75	1.61	1.85
28	1.24	1.48	1.32	1.56	1.41	1.65	1.51	1.74	1.60	1.84
29	1.25	1.48	1.33	1.56	1.41	1.65	1.50	1.74	1.60	1.83
30	1.26	1.49	1.34	1.57	1.42	1.65	1.50	1.73	1.60	1.82
31	1.27	1.50	1.34	1.57	1.42	1.65	1.50	1.73	1.59	1.82
32	1.28	1.50	1.35	1.57	1.43	1.65	1.50	1.73	1.59	1.81
33	1.29	1.51	1.36	1.58	1.43	1.65	1.51	1.73	1.59	1.81
34	1.30	1.51	1.36	1.58	1.43	1.65	1.51	1.72	1.58	1.80
35	1.31	1.52	1.37	1.58	1.44	1.65	1.51	1.72	1.58	1.80
36	1.31	1.52	1.38	1.59	1.44	1.65	1.51	1.72	1.58	1.79
37	1.32	1.53	1.38	1.59	1.44	1.65	1.51	1.72	1.58	1.79
38	1.33	1.53	1.39	1.59	1.45	1.65	1.51	1.72	1.58	1.79
39	1.34	1.54	1.39	1.60	1.45	1.66	1.51	1.72	1.58	1.79
40	1.34	1.54	1.41	1.61	1.46	1.66	1.52	1.72	1.58	1.78
45	1.37	1.56	1.42	1.61	1.47	1.67	1.53	1.72	1.58	1.78
50	1.40	1.58	1.44	1.63	1.49	1.67	1.54	1.72	1.59	1.77
55	1.43	1.60	1.47	1.64	1.51	1.68	1.55	1.72	1.59	1.77
60	1.45	1.62	1.48	1.65	1.52	1.69	1.56	1.73	1.60	1.77
65	1.47	1.63	1.50	1.66	1.53	1.70	1.57	1.73	1.60	1.77
70	1.49	1.64	1.51	1.67	1.55	1.70	1.58	1.73	1.61	1.77
75	1.50	1.65	1.53	1.68	1.56	1.71	1.59	1.74	1.62	1.77
80	1.52	1.66	1.54	1.69	1.57	1.72	1.60	1.74	1.62	1.77
85	1.53	1.67	1.55	1.70	1.58	1.72	1.60	1.75	1.63	1.77
90	1.54	1.68	1.56	1.70	1.59	1.73	1.61	1.75	1.64	1.78
95	1.55	1.69	1.57	1.71	1.60	1.73	1.62	1.75	1.64	1.73
100	1.56	1.69	1.58	1.72	1.60	1.74	1.63	1.76	1.65	1.78

Kaynak : Theil - Nagar, s. 802.