HASSAS ORTALAMALARIN GENİŞLETİLMESİ ÜZERİNE

Prof. Dr. Kenan Ural

Yapılan n gözlem için bir dizi halinde sıralanmış

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots \leq x_n$$

pozitif değerleriyle ilgili hassas ortalamalar, bilinen

$$M(r) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}, \qquad -\infty < r < +\infty \tag{1}$$

genel formülüyle hesap edilir. Ortalama M(r), gözlem değerlerinin en küçük ve en büyüğü arasında bulunur:

$$x_1 < M(r) < x_n$$

r = -1, 0, 1, 2 için sırasıyle aşağıdaki bilinen dört çeşit hassas ortalama elde edilir :

r = -1 için harmonik ortalama : $M(-1) = \dfrac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$

r = 0 için geometrik ortalama : $M(0) = (\Pi\, x_i)^{\frac{1}{2}}$

r = 1 için aritmetik ortalama : $M(1) = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

r = 2 için kareli ortalama : $M(2) = \left(\dfrac{\Sigma x_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

Bunların da büyüklük bakımından şu sırayı izlediklerine işaret edelim :

$$M(-1) < M(0) < M(1) < M(2).$$

Buraya kadar özetlenen kısımlara daha önceki bir incelememizde («Hassas ortalamalar üzerine» adlı yazı, İktisat Fakültesi Mecmuası, Cilt 27, Haziran 1968 - Eylül 1968) değinmiş ve formül (1) in çok daha genel şu formülün özel bir halini oluşturduğuna özellikle işaret etmiştik :

$$M(l, p) = \left(\frac{{}_p t_l}{\binom{n}{l}} \right)^{\frac{1}{r}} \qquad (2)$$

Hatırlanacak olursa $lp = r$ ile :

$$\begin{aligned}
{}_1t_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
{}_2t_1 &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\
&\vdots \\
{}_1t_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\
{}_2t_2 &= (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + \dots + (x_{n-1}x_n)^2 \\
&\vdots \\
{}_pt_l &= (x_1x_2 \dots x_l)^p + (x_1x_2 \dots x_{l+1})^p + \dots + (x_{n-l}x_{n-l+1} \dots x_n)^p
\end{aligned}$$

yazılır. $M(l, p)$ nin hesabında sadece tekrarsız basit kombinezonların yapıldığı görülür. Tekrarlı kombinezon ve variasyon işlemlerini de göz önünde tutmak suretiyle hassas ortalamaların hesabı daha da genişletilebilir. Gerçekten bu işlemler şöyle gösterilebilir:

Tekrarlı kombinezon . ${}^{tk}\binom{n}{l} = \frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!}$

Tekrarsız variasyon : $V_n^l = \frac{n!}{(n-l)!}$

Tekrarlı variasyon : ${}^{tk}V_n^l = n^l$

$l = 2$ için hesaplanacak değerler şöyledir :

Tekrarlı kombinezon : ${}^{tk}\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n+1)n$

Tekrarsız variasyon : $V_n^2 = n(n-1)$

Tekrarlı variasyon : ${}^{tk}V_n^2 = n\,n.$

Buna karşılık tekrarsız kombinezon için $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n\,(n-1)$ dir.

Örnek için n = 3 (a, b, c) ve $l=2$ alınırsa bu işlemlerin yapısı kolaylıkla görülür.

Tekrarsız kombinezon : ab, ac, bc.

Tekrarlı kombinezon : a^2, ab, ac, b^2, bc, c^2

Tekrarlı variasyon : ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Tekrarlı variasyon : a^2, ab, ac, b^2, ba, bc, c^2, ca, cb.

Burada önemli bir noktaya işaret etmek ilginç olacaktır: Tekrarsız variasyon elemanlarıyla hesaplanacak ortalama tekrarsız kombinezonlu elemanlarla bulunacak ortalamaya eşittir; bunu n = 3 ve $l=2$ için formül (2) esasına göre gösterebiliriz:

$$\left(\frac{ab+ac+bc+ba+ca+cb}{6}\right)^{1/2} = \left[\frac{2(ab+ac+bc)}{6}\right]^{1/2} = \left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^{1/2} \tag{3}$$

Tekrarlı variasyon için de şu söylenebilir: hesaplanacak ortalama basit aritmetik ortalamaya eşit olur. Aynı elemanlarla bu söylenenin doğru olacağını gösterelim:

$$\left(\frac{a^2+ab+ac+b^2+ba+bc+c^2+ca+cb}{9}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{9}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{9}} = \frac{a+b+c}{3} \tag{4}$$

Buna karşılık tekrarlı kombinezona göre hesaplanacak ortalama şöyle bulunabilir:

$$\left(\frac{a^2+ab+ac+b^2+bc+c^2}{6}\right)^{1/2} = \left[\frac{(a+b+c)^2-(ab+ac+bc)}{6}\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Şu hale göre burada incelenecek ortalama, şimdiye kadar incelenenlerden farklılık gösteren tekrarlı kombinezonlu ortalama olacaktır. Diğerlerinin neden ele alınmayacağına az önce değinildi ve sonuçları formül (3) ve (4) ile belirtildi.

Tekrarlı kombinezonla bulunacak ortalamanın genel ifadesine n gözlem için değinelim. Önce $l=2$ ve p=1 değerleriyle ilegili olarak formül (2) den şu sonuca varılır:

$$^{tk}M(2,1)=\left(\frac{{}_1t_2}{^{tk}\binom{n}{2}}\right)^{1/2}=\left(\frac{\Sigma x_i x_j}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{1/2}=\left(\frac{2\Sigma x_i x_j}{n(n+1)}\right)^{1/2}, i\leq j,\ i=1,2,\ldots,n \quad (6)$$

Eğer $l=3$ ve p=1 alınırsa ortalama şöyle olur:

$$^{tk}M(3,1)=\left(\frac{{}_1t_3}{^{tk}\binom{n}{3}}\right)^{1/3}=\left(\frac{\sum\limits_{i\neq j\neq k} x_i x_j x_k}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}\right)^{1/3}=\left(\frac{6\,\Sigma x_i x_j x_k}{n(n+1)(n+2)}\right)^{1/3}, i\leq j\leq k \quad (7)$$

Daha genel bir ifadeyle aşağıdaki formül yazılabilir :

$$^{tk}M(l,1)=\left(\frac{{}_1t_l}{^{tk}\binom{n}{l}}\right)^{1/l}=\left(\frac{\Sigma x_i x_j\ldots x_w}{\frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!}}\right)^{1/l}, i\leq j\leq\ldots\leq w\leq n \quad (8)$$

p genel değeri göz önünde tutulursa, $r=lp$ alınarak:

$$^{tk}M(l,p)=\left(\frac{{}_pt_l}{^{tk}\binom{n}{l}}\right)^{1/r}=\left(\frac{\Sigma(x_i x_j\ldots x_w)^p}{\frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!}}\right)^{1/r} \quad (9)$$

bulunur.

Şimdi de tekrarsız ve tekrarlı kombinezonlar esasına göre bulunacak ortalamalardan hangilerinin daha büyük olduğunu görelim.

Tekrarlı kombinezon şöyle yazılabilir :

$$\sum_{x=j=1} x_i x_j=\sum_{i\neq j} x_i x_j+\sum_{i=1} x_i^2 \quad (10)$$

Sağ tarafın ilk terimi tekrarsız kombinezoniu terimlerin toplamından başka bir şey değildir. Tekrarlı ve tekrarsız kombinezonlar için ortalamalar sırasiyle

$$\frac{\sum\limits_{i\neq j} x_i x_j + \sum x_i^2}{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{ve} \quad \frac{\sum\limits_{i\neq j} x_i x_j}{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{11}$$

olacaktır. Paydalar eşit kılınır ve aşağıdaki eşitsizlik yazılırsa:

$$(n-1) \cdot \frac{[\Sigma x_i x_j + \Sigma x_i^2]}{\frac{(n-1)n(n+1)}{2}} - (n+1) \cdot \frac{\Sigma x_i x_j}{\frac{(n-1)n(n+1)}{2}} > 0 \tag{12}$$

bazı sadeleştirmelerden sonra

$$(n-1) \cdot \Sigma x_i^2 - 2\, \Sigma x_i x_j > 0 \tag{13}$$

sonucuna varılır; bu da tekrarlı kombinezonla bulunacak ortalamanın tekrarsız kombinezonlu ortalamalardan daha büyük olduğunu belirtir.

Ayrıca son eşitsizlik şöyle de yazılabilir:

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} > \frac{\Sigma x_i x_j}{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{14}$$

Her iki tarafın kare kökü alınırsa :

$$\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}} > \sqrt{\frac{\Sigma x_i x_j}{\frac{n(n-1)}{2}}} \tag{15}$$

kareli ortalamanın bu defa tekrarsız kombinezonlu ortalamadan daha büyük bldüğu görülür.

Diğer taraftan formül (14) şu şekilde yazılabilir:

$$\binom{n}{2} \Sigma x_i^2 > n\, \Sigma x_i x_j$$

Her Iki tarafa $n\, \Sigma x_i^2$ ilâve edilirse:

$$\left[\binom{n}{2}+n\right]\sum x_i^2 > n\left[\sum_{i\neq j} x_i x_j + \sum x_i^2\right] \tag{16}$$

$$\binom{n}{2}\sum x_i^2 > n\sum_{i=j} x_i x_j \tag{17}$$

buradan da:

$$\frac{\sum x_i^2}{n} > \frac{\sum\limits_{i=j} x_i x_j}{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{18}$$

yazılır ve dolayısiyle ortalamanın tekrarlı kombinezonlu ortalamadan daha büyük olduğu anlaşılır.

Son olarak yine formül (13) den hareketle

$$(n-1)\Sigma x_i^2 > 2\,\Sigma x_i x_j$$

eşitsizliğin her iki tarafına

$$(n+1)\Sigma x_i^2 + 2n\,\Sigma x_i x_j$$

ekleyerek

$$2n[\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j] > (n+1)\,[\Sigma x_i^2 + 2\,\Sigma x_i x_j] \tag{19}$$

ve n ile çarparak

$$2n^2[\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j] > n(n+1)\,[\Sigma x_i^2 + 2\,\Sigma x_i x_j] \tag{20}$$

bulunur. Ayrıca bir seri için :

$$\left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_i x_j \tag{21}$$

eşitliği gözönünde tutulursa, eşitsizlik (20) şu şekilde düzenlenebilir ;

$$\frac{\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j}{\frac{n(n+1)}{2}} > \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 \tag{22}$$

ve buradan da iki tarafın kare kökü alınırsa ortalamalar hesaplanır:

$$\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j}{\frac{n(n+1)}{2}}} > \frac{\Sigma x_i}{n} \qquad (23)$$

Bu son formül de tekrarlı kombinezonlu ortalamanın aritmetik ortalamadan daha büyük olduğunu gösterir.

Bulunan ortalamalar büyüklüklerine göre sıralanırsa :

$$\sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n}} > \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=j} x_i x_j}{\frac{n(n+1)}{2}}} > \frac{\Sigma x_i}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma x_i x_j}{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (24)$$

yazılabilir.

Formül (9) a göre $l =$ t, 2, 3, 4 ve p=-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 değerleri için bulunacak ortalamaların tekrarsız kombinezonlu ortalamalarla karşılaştırılmalarını görmek üzere $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 6$ değerlerinden hareket edelim. Hesaplanacak ortalamalar aşağıdaki tabloda görülebilir. Hatırlatalım ki $^{tk}M(l,p)$ sembolü tekrarlı kombinezonlu ortalamayı ve $M(l,p)$ sembolü de tekrarsız kombinezonlu ortalamayı belirtmektedir.

ℓ	1		2		3		4	
p	$^{tk}M(\ell,p)$	$M(\ell,p)$	$^{tk}M(\ell,p)$	$M(\ell,p)$	$^{tk}M(\ell,p)$	$M(\ell,p)$	$^{tk}M(\ell,p)$	$M(\ell,p)$
-4	1,408	1,408	1,331	2,080	1,282	2,520	1,247	2,912
-3	1,558	1,558	1,454	2,165	1,388	2,567	1,338	2,912
-2	1,821	1,824	1,689	2,303	1,591	2,634	1,519	2,912
-1	2,285	2,285	2,166	2,539	2,057	2,740	1,962	2,912
0	2,912	2,912	2,912	2,912	2,912	2,912	2,912	2,912
1	3,500	3,500	3,592	3,341	3,679	3,158	3,756	2,912
2	3,937	3,937	4,031	3,683	4,186	3,404	4,291	2,912
3	4,254	4,254	4,406	3,917	4,536	3,588	4,667	2,912
4	4,495	4,495	4,657	4,078	4,786	3,711	4,891	2,912

Tablo değerlerinden izleneceği gibi $l > 1$ ve $p > 0$ için tekrarlı kombinezonla bulunan tüm ortalama değerleri tekrarsız kombinezonlarla bulunanlardan daha büyüktür: ${}^{tk}M(l,p) > M(l,p)$. Buna karşılık $l > 1$ ve $p < 0$ için durum ters yönde gelişir: ${}^{tk}M(l,p) \leq M(l,p)$.

SONUÇ

Hassas ortalamalarla ilgili olarak daha önce yaptığımız bir çalışmada genel formülün tekrarsız kombinezon esasına dayandığı görülmüştü. Bu defa tekrarlı kombinezon, tekrarsız ve tekrarlı variasyon işlemleri esasına göre hesaplanacak ortalamaların yapısı üzerinde durarak ortalamaların daha da genişletilmesi olanağı açıklandı. Bunlardan tekrarlı kombinezonla hesaplanacak olanların ne gibi sonuçlar sağlayacağı formüllerle gösterildi ve küçük bir örnek verilerek tekrarsız kombinezonlu ortalamalarla karşılaştırılması yapıldı.

Kaynaklar :

Heft I, Staempflie und Cie, 1947, Bern.

H. Jecklin und M. Eisenring : «Die elemantaren Mittelwerte» M.V.S.V. 47, Band, Hefr 1, Staempflie und Cie, 1947, Bern,

K. Ural : «Hassas Ortalamalar Üzerine» İktisat Fak. Mecmuası, Cilt 27, Haziran 1968 - Eylül 1968, İstanbul.