



Lineer Olmayan İkili Schrödinger Denklemi için Ağsız Bir Yöntem**

Bahar KARAMAN*¹, Yılmaz DERELİ¹

¹ Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir, Türkiye

*yazışılan yazar e-posta: bahar_karaman@eskisehir.edu.tr

(Alınış / Received: 16.07.2019, Kabul / Accepted: 22.11.2019, Yayınlanma / Published: 30.11.2019)

Özet: Bu çalışma ağsız bir yöntem olan radyal tabanlı fonksiyonlarla kollokasyon (RBFC) yöntemi ile lineer olmayan ikili Schrödinger denklemlerinin (CNLS) sayısal çözümlerinin elde edilmesi üzerinedir. Zaman ayrıştırması için ileri fark ve kalan terimler içinde fonksiyonun ardışık zaman adımındaki ortalama değerleri kullanılmıştır. CNLS denklemi için kullanılan yöntemin kararlılık analizi incelemesi Von-Neumann kararlılık metodu kullanılarak yapılmıştır. Metodun geçerliliğini göstermek için tek soliton dalga hareketi ve iki solitonun etkileşimini içeren dört farklı test problemi ele alınmıştır. Her bir test problemi için sayısal sonuçlar grafikler ve tablolar yardımıyla gösterilmiştir. Ayrıca önerilen yöntemin geçerliliğini, verimliliğini ve etkinliğini göstermek için elde edilen sayısal sonuçlar analitik ve literatürde var olan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: RBFC Metodu, Lineer Olmayan ikili Schrödinger Denklemi, Von-Neumann Kararlılık Analizi

A Meshless Method for the Coupled Nonlinear Schrödinger Equations

Abstract: The current investigation studies a meshfree method based on radial basis functions collocation method (RBFC) to obtain numerical solutions of the coupled nonlinear Schrödinger (CNLS) equations. Forward difference is used for the temporal discretization and the average value of the function in consecutive time step is used for other terms. The stability analysis of the proposed method is investigated by using Von-Neumann stability technique for the governing equations. To accuracy of the proposed method, test problems which include the single soliton motion and two interaction are used. For every test problems, all obtained numerical results are presented in tables and figures. The obtained numerical experiments are compared with analytical and published numerical solutions to confirm the accuracy and efficiency of the suggested scheme.

Key words: RBFC method, Coupled nonlinear Schrödinger equations, Von-Neumann stability analysis

1. Giriş

Bilim ve mühendisliğin pek çok alanında hatta kimi zaman günlük yaşantımızda da ortaya çıkan fiziksel problemlerin çözümünün bulunması aşamasında ilk olarak problemlerin özelliklerini taşıyan matematiksel bir modelin kurulmasına ihtiyaç vardır. Bu denklem ve sistemlerin analitik ve sayısal çözümlerini bulmak için ise çeşitli metotlar önerilmiştir. Fakat bu denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerini bulmak her zaman kolay değildir. Bu yüzden bu denklemlerin çözümü için analitik yaklaşım yöntemi veya sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden

Homotopi Pertürbasyon Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Adomian Ayırıştırma Metodu, Sonlu Farklar Yaklaşım Metodu sıklıkla kullanılmaktadır.

Son yıllarda oldukça ilgi çeken ve sıklıkla kullanılan ağsız yöntemler 30 yıl içerisinde oldukça önem kazanmış ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için uygun bir alternatif haline gelmiştir. Bu yöntemler, sonlu elemanlar, sonlu farklar, sonlu hacimler ve spektral yöntemler gibi klasik ağ tabanlı hesaplama yöntemlerinde ana problem olan ağ yapısından kaçınırlar. Bu yüzden bir ağsız yöntem, tanımlanan alanda ağ yapısı oluşturmadan sistemin aritmetik denklemlerini kurulmasını sağlamakta ve bu denklemleri çözerek bilinmeyenleri elde etmeye yaramaktadır. Ayrıca, iterasyon gerektiren çözümler için de çok uygun bir yöntemdir [1].

Bu çalışmada ise lineer olmayan ikili Schrödinger denkleminin (CNLS) sayısal çözümünün ağsız bir yöntem olan RBFC metodu ile bulunması hedeflenmiştir. CNLS denklemi çok çeşitli fiziksel durumlarda ortaya çıkmaktadır. Fiber iletişim sisteminde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, kristaller veya fotorefraktifler içindeki ışın yayılımını ve su dalgası etkileşimlerini modellemektedir. Son yıllarda CNLS denkleminin sayısal çözümünün bulunması oldukça dikkat çekmiştir. Birçok araştırmacı bu denklemleri çözmek için çeşitli sayısal yöntemler araştırmıştır. Örneğin, [2 – 11] çalışmalarında konum ve zamana göre farklı doğruluklara sahip sonlu fark yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. [12] ve [13] çalışmalarında ise lineer olmayan Schrödinger denklemi için sırasıyla RBFC ve en küçük karelerle kolokasyon yöntemleri kullanılarak sayısal çözümler bulunmuştur.

Bu çalışmada, CNLS denklemi için başlangıç ve sınır değer problemi aşağıdaki formdadır:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(|u|^2 + \beta|v|^2) = 0, (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (1)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho(|v|^2 + \beta|u|^2) = 0, (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad v(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad v(a, t) = v(b, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \quad (4)$$

burada $i = \sqrt{-1}$, γ , β ve ρ bazı reel katsayılarıdır. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks değerli x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı fonksiyonlardır. γ parametresi optik fiberde dağılımı, β ise çift kırılmalı optik fiberde birleştirme parametresi olarak tanımlanmaktadır. $\gamma = \rho = \beta = 1$ olduğunda (1) – (2) denklemleri Manakov denklemleri olarak adlandırılmaktadır. $\beta = 0$ olduğunda (1) – (2) denklemleri lineer olmayan Schrödinger denklemine (NLS) ayrışmaktadır. Bu çalışmada $\gamma = \rho = \beta = 1$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Kansa yöntemi olarak da bilinen RBFC metodu modern yaklaşım teorisinde spektral doğruluk, ağ yapısı gerektirmemesi, yüksek boyutlar için keyfi geometri ile çalışması ve uygulanabilirliği açısından en sık kullanılan yöntemlerdendir.

Çoklu kuadratik (MQ) metodu ilk kez Hardy tarafından 1971 yılında dünyanın yerçekimi alanını modellemek için bir interpolasyon yöntemi olarak geliştirilmiştir [14]. Aslında MQ metodu Kansa metodunun özel bir halidir. 1982 yılında Franke [15] iki boyutlu dağınık veriler için çok sayıda interpolasyon yöntemini test etti ve MQ yönteminin en etkileyici yöntemlerden biri olduğunu ispat etmiştir. Bu durum araştırmacıların Radyal tabanlı fonksiyonlar üzerine çalışmalar yapmasında etkili olmuştur. Madcy ve Nelson [16] ve Micchelli [17] RBFC metoduna teorik bir yön vermişler ve bu yöntem ile elde edilen matrisin tersinin olduğunu kanıtlamışlardır. 1990 yılında, Kansa [18] kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için Kansa metodunun uygulanmasına öncülük etmiştir. Franke ve Schaback [19] kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için RBFC yöntemine teorik bir temel vermiştir. Ayrıca Franke ve Schaback [20] tarafından RBFC yöntemi kullanılarak elde edilen interpolasyonun varlığı, tekliği ve sürekli bir fonksiyona yakınsaması ispatlanmıştır. Wu ve Schaback [21] RBFC yöntemini kullanılarak dağınık veri interpolasyonunun tahmini yerel hatalarını türetmiştir.

2.1 Radyal tabanlı fonksiyonlar

Radyal tabanlı fonksiyonlar (RBF) fonksiyon interpolasyonu [22-24], kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü [19,25], türbülans analizi [26], sinir ağları [27] ve meteoroloji [28] gibi pek çok uygulama alanına sahiptir. RBF'ler yüksek doğrulukta bir yaklaşımın yapılmasını elverişli kılmaktadır. Ayrıca, global olarak desteklenen RBF'lerin kullanımı da büyük doğrusal sistemler oluşturulmasında önemli rol oynar. RBF'lerin zayıf koşul gerektirmesi, tam ve köşegen baskın olması da çözümün tekliğini garantiler.

Tanım 2.1. $\Phi: R^s \rightarrow R$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Tek değişkenli $\phi : [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu var ve

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| \quad (5)$$

koşulu sağlanıyorsa Φ fonksiyonuna Radyal tabanlı fonksiyon denir. Burada $\|\cdot\|$, R^s üzerinde Öklidyen normdur.

Tanım 2.1. bir RBF'nin seçilecek bir x_i noktasının merkez noktaya olan uzaklık fonksiyonu olduğunu söylemektedir. $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r_i)$ şeklindedir. Burada $r_i = \|\mathbf{x} - x_i\|$, \mathbf{x} ve x_i noktaları arasındaki Öklidyen normdur.

RBF'ler bir c şekil parametresi içerebilir. Eğer bir RBF şekil parametresi içeriyorsa sonsuz düzgün RBF, sadece uzaklığa bağlı ise parçalı düzgün RBF olarak adlandırılır. Sayısal sonuçların değerlerinin doğruluğunu etkileyen şekil parametresi c 'nin seçilimi büyük önem taşımaktadır. Birçok çalışmada şekil parametresinin seçilimi araştırılmıştır [29 – 33]. Tarwater [29] şekil parametresinin değerini arttırarak hatanın ortalama karesinin en aza düştüğünü ve sonrasında keskin bir şekilde arttığını göstermiştir. Carlson ve Foley [30] yaptıkları çalışmada şekil parametresinin seçiliminin probleme bağlı olduğunu yani yaklaşık olarak elde edilecek fonksiyonun davranışının şekil

parametresinin seçimini büyük ölçüde etkilediğini keşfetmişlerdir. Hızla değişen fonksiyonlar için küçük bir c değerinin kullanılması, düzgün fonksiyonlar için ise büyük bir c değerinin kullanılması gerektiğini göstermişlerdir. Madych [31] c 'nin değerini arttırarak RBF interpolasyonunun doğruluğunda önemli bir iyileştirme yapılabileceğini ispatlamıştır. Schaback [32] ise yapmış olduğu çalışmasında c 'nin optimal değerini elde etmek için kernel matrisinin koşul sayısını hesaplamıştır. Cheng vd. [33] tarafından yapılan çalışmada ise c 'nin değeri çok büyük olduğunda RBF interpolasyon hatasının üstel bir yakınsaması olduğunu ispatlamışlardır. Ancak, çözümün bozulduktan sonra c 'nin belli bir limit değerine sahip olduğunu göstermişlerdir. Genel olarak c 'nin değeri arttıkça, çözülecek sistemin matrisi kötü koşullu hale gelir ve bu yüzden koşul sayısı, doğru bir çözüm için şekil parametresinin optimal değerinin belirlenmesinde kullanılabilir. Fakat şekil parametresinin en iyi değerinin seçilimi hala açık bir problemdir.

Bu çalışmada ise şekil parametresinin optimal değerini elde etmek için, [32]'de belirtilen yaklaşım kullanılmıştır. Literatürde tanımlanmış pek çok Radyal tabanlı fonksiyon vardır. Bu çalışmada Gaussian (G), Çoklu Kuadratik (MQ) ve Wendland (W) fonksiyonları kullanılmıştır. Gaussian ve Çoklu Kuadratik fonksiyonlar global destekli oldukları için, elde edilen kernel matrisi full matris olur. Bu fonksiyonlar aşağıda verildiği şekilde tanımlanmıştır.

$$G: \phi(r) = e^{-c^2 r^2}$$

$$MQ: \phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$W: \phi_{l,k}(r) = \mathcal{J}^k(1-r)_+^l, \quad k \in N, \quad l = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + k + 1$$

burada d uzayın boyutu ve

$$\mathcal{J}\phi(r) = \begin{cases} \int_r^\infty s\phi(s)ds, & r > 0 \\ \mathcal{J}\phi(-r), & r < 0 \end{cases}$$

ve

$$(1-r)_+^l = \begin{cases} (1-r)^l, & 0 < r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$$

şeklindedir [34]. $\phi_{l,k}$ fonksiyonunun derecesi $l + 2k$ olur. Çalışmada kullandığımız çeşitli dereceden Wendland fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$$W_{4,2}(r) = (1-r)_+^6(3 + 18r + 35r^2),$$

$$W_{5,3}(r) = (1-r)_+^8(1 + 8r + 25r^2 + 32r^3),$$

$$W_{6,4}(r) = (1-r)_+^{10}(5 + 50r + 210r^2 + 450r^3 + 429r^4),$$

$$W_{7,5}(r) = (1-r)_+^{12}(9 + 108r + 566r^2 + 1644r^3 + 2697r^4 + 2048r^5).$$

Burada $W_{l,k} = \phi_{l,k}$ 'dır. Bundan sonraki bölümlerde Wendland fonksiyonu için $W_{l,k}$ notasyonu kullanılacaktır. Wendland fonksiyonundaki r , $\delta > 0$ olacak şekilde $\frac{r}{\delta}$ ile değiştirilebilir. Böylece fonksiyon $[0, \delta]$ üzerinde sıkılaştırılmış destekli (compactly supported) olacak biçimde ölçeklendirilmiş olur. δ ölçeklendirme faktörü olarak adlandırılmaktadır ve seçimini açık bir problemdir. Çalışmamızda δ ölçeklendirme

faktörünün optimal değerini belirlemek için, kernel matrisinin şart sayısı hesaplanmıştır [32]. Bu dönüşümün bir sonucu olarak, kernel matrisi bir bant köşegen matris olur ve matrisin boyutu ölçeklendirme faktörünün değerine bağlıdır. Elde edilen kernel matrisinin bant matris olması, Wendland sıkılaştırılmış destekli fonksiyonlar ile hesaplamada avantaj sağlamaktadır.

2.2 CNLS denklemleri için zaman ayrıştırması

(1) – (2) nolu denklem sisteminde $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks fonksiyonları, $u_r(x, t)$, $u_s(x, t)$, $v_r(x, t)$ ve $v_s(x, t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$u(x, t) = u_r(x, t) + iu_s(x, t) \quad (6)$$

$$v(x, t) = v_r(x, t) + iv_s(x, t) \quad (7)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlara ayrılabilirler.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + i \frac{\partial u_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + i \frac{\partial v_s}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + i \frac{\partial u_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + i \frac{\partial v_s}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}, \quad |u| = \sqrt{u_r^2 + u_s^2}, \quad (10)$$

şeklindedir. (8) – (10) eşitlikleri (1) – (2) numaralı denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$i \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + i \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)(u_r + iu_s) = 0 \quad (11)$$

$$i \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + i \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + (v_r^2 + v_s^2 + u_r^2 + u_s^2)(v_r + iv_s) = 0 \quad (12)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin sıfıra eşit olması için reel ve sanal kısımların ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerektiğinden (1) – (2) numaralı denklem sistemi

$$-\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)u_r = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)u_s = 0 \quad (14)$$

$$-\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)v_r = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)v_s = 0 \quad (16)$$

formunda bir denklem sistemine dönüşür. Bu denklemin başlangıç ve sınır koşulları, $(u_0)_r, (u_0)_s, (v_0)_r$ ve $(v_0)_s$ sırasıyla u_0 ve v_0 fonksiyonlarının reel ve sanal kısımları olmak üzere,

$$u_r(x, 0) = (u_0)_r(x), \quad u_s(x, 0) = (u_0)_s(x), \quad a \leq x \leq b \quad (17)$$

$$v_r(x, 0) = (v_0)_r(x), \quad v_s(x, 0) = (v_0)_s(x), \quad a \leq x \leq b \quad (18)$$

$$u_r(a, t) = u_r(b, t) = 0, \quad u_s(a, t) = u_s(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (19)$$

$$v_r(a, t) = v_r(b, t) = 0, \quad v_s(a, t) = v_s(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (20)$$

şeklindedir. (13) – (16) denklem sistemi aşağıdaki gibi matris-vektör formu biçiminde yazılabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + sAU(x, t) = 0 \quad (21)$$

$$U(x, 0) = F(x), \quad a \leq x \leq b \quad (22)$$

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (23)$$

burada

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} u_r(x, t) \\ u_s(x, t) \\ v_r(x, t) \\ v_s(x, t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_r(x) \\ f_s(x) \\ g_r(x) \\ g_s(x) \end{pmatrix}, \quad s = (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)$$

şeklindedir. (21) – (23) denklem sisteminde zamana göre türeve ileri fark yaklaşımı, kalan terimlere de fonksiyonun ardışık zaman adımındaki ortalama değerleri kullanılırsa

$$\left(\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \right) + A \left(\frac{(U_i)_{xx}^{n+1} + (U_i)_{xx}^n}{2} \right) + s_i^{n+\frac{1}{2}} A \left(\frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} \right) = 0 \quad (24)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$s_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(u_r^{n+\frac{1}{2}} \right)_i^2 + \left(u_s^{n+\frac{1}{2}} \right)_i^2 + \left(v_r^{n+\frac{1}{2}} \right)_i^2 + \left(v_s^{n+\frac{1}{2}} \right)_i^2 \quad (25)$$

$$\left(u_r^{n+\frac{1}{2}} \right)_i = \frac{(u_r^{n+1})_i + (u_r^n)_i}{2} \quad (26)$$

$$\left(u_s^{n+\frac{1}{2}}\right)_i = \frac{(u_s^{n+1})_i + (u_s^n)_i}{2} \quad (27)$$

$$\left(v_r^{n+\frac{1}{2}}\right)_i = \frac{(v_r^{n+1})_i + (v_r^n)_i}{2} \quad (28)$$

$$\left(v_s^{n+\frac{1}{2}}\right)_i = \frac{(v_s^{n+1})_i + (v_s^n)_i}{2} \quad (29)$$

şeklindedir. (26) – (29) eşitlikleri (25)'de yerine yazıldığında

$$s_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{(u_r^{n+1})_i + (u_r^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(u_s^{n+1})_i + (u_s^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(v_r^{n+1})_i + (v_r^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(v_s^{n+1})_i + (v_s^n)_i}{2}\right)^2 \quad (30)$$

biçiminde olur. Bu denklem sisteminde lineer olmayan terimleri lineerleştirmek için $\frac{\partial u_r}{\partial t}$, $\frac{\partial u_s}{\partial t}$, $\frac{\partial v_r}{\partial t}$, $\frac{\partial v_s}{\partial t}$ 'ye ileri fark yaklaşımı uygulanırsa

$$u_r^* = u_r^{n+1} \approx u_r^n - \Delta t((u_s^n)_{xx} + (u_r^n + u_s^n + v_r^n + v_s^n)u_s^n) \quad (31)$$

$$u_s^* = u_s^{n+1} \approx u_s^n + \Delta t((u_r^n)_{xx} + (u_r^n + u_s^n + v_r^n + v_s^n)u_r^n) \quad (32)$$

$$v_r^* = v_r^{n+1} \approx v_r^n - \Delta t((v_s^n)_{xx} + (u_r^n + u_s^n + v_r^n + v_s^n)v_s^n) \quad (33)$$

$$v_s^* = v_s^{n+1} \approx v_s^n - \Delta t((v_r^n)_{xx} + (u_r^n + u_s^n + v_r^n + v_s^n)v_r^n) \quad (34)$$

$$s_i^n = \left(\frac{(u_r^*)_i + (u_r^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(u_s^*)_i + (u_s^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(v_r^*)_i + (v_r^n)_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{(v_s^*)_i + (v_s^n)_i}{2}\right)^2 \quad (35)$$

kabul edilir ve (35) eşitliği (24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}\right) + A \left(\frac{(U_i)^{n+1}_{xx} + (U_i)^n_{xx}}{2}\right) + s_i^n A \left(\frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2}\right) = 0 \quad (36)$$

lineer denklemi elde edilir.

2.3 RBFC metodunun CNLS denkleminde uygulanışı

Problemin çözüm bölgesi olan $[a, b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ olacak şekilde N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ kolokasyon noktalarından x_i , $i = 2, \dots, N - 1$ iç bölgedeki noktalar, $a = x_1$ ve $b = x_N$ sınırdaki noktalardır. Kansa

metodu [18] olarak da bilinen RBFC metodunda, U fonksiyonunun n . ve $(n + 1)$. adımdaki çözümlerine

$$U_i^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad U_i^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \quad (37)$$

yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların x 'e göre ikinci merteye türevleri

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j''(x_i) \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j''(x_i) \quad (39)$$

biçimindedir. (37) – (39) denklemlerinde yapılan yaklaşımlar (36) denkleminde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) + \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j''(x_i) + \frac{\Delta t s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) - \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j''(x_i) - \frac{\Delta t s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), i \\ &= 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (40)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (41)$$

şeklinde $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem λ_j^{n+1} bilinmeyen katsayı ve λ_j^n bilinen katsayı olmak üzere matris biçiminde aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & B_1 & \mathbf{0} & \\ B_2 & A_2 & & \\ \hline \mathbf{0} & & A_1 & B_1 \\ & & B_2 & A_2 \end{array} \right)}_A \begin{pmatrix} \lambda_{u_r} \\ \lambda_{u_s} \\ \lambda_{v_r} \\ \lambda_{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

burada $k = 1, 2$ için A_k ve B_k matrisleri $N \times N$ karesel matrislerdir ve

$$[A_k \ B_k] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi_1 & \dots & \phi_N & \phi_1 & \dots & \phi_N \\ & & C_k & & & D_k \\ \phi_1 & \dots & \phi_N & \phi_1 & \dots & \phi_N \end{array} \right), \quad k = 1, 2$$

şeklindedir. Bu matrislerin elemanları ilk ve son satırı ϕ şekil fonksiyonları, $N - 2$ tane satırda $(N - 2) \times (N - 2)$ boyutlu C_k ve D_k karesel matrislerden oluşmaktadır. $k = 1, 2$ için C_k ve D_k matrislerinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$C_1 = 2\phi_j(x_i)$$

$$D_1 = \Delta t \phi_j''(x_i) + \Delta t s_i^n \phi_j(x_i), \quad j = 1, \dots, N, i = 2, \dots, N - 1$$

$$C_2 = -\Delta t \phi_j''(x_i) - \Delta t s_i^n \phi_j(x_i)$$

$$D_2 = 2\phi_j(x_i)$$

Denklemin sisteminin bilinen kısmı ise

$$F_k = \begin{pmatrix} 0 \\ G_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $k = 1, 2, 3, 4$ için G_k vektörünün girdileri aşağıda verildiği gibidir.

$$G_1 = -\Delta t (\lambda_{u_s})_j^n \phi_j''(x_i) - \Delta t s_i^n (\lambda_{u_s})_j^n \phi_j(x_i)$$

$$G_2 = \Delta t (\lambda_{u_r})_j^n \phi_j''(x_i) + \Delta t s_i^n (\lambda_{u_r})_j^n \phi_j(x_i)$$

$$G_3 = -\Delta t (\lambda_{v_s})_j^n \phi_j''(x_i) - \Delta t s_i^n (\lambda_{v_s})_j^n \phi_j(x_i)$$

$$G_4 = \Delta t (\lambda_{v_r})_j^n \phi_j''(x_i) + \Delta t s_i^n (\lambda_{v_r})_j^n \phi_j(x_i), \quad j = 1, \dots, N, i = 2, \dots, N - 1$$

biçimindedir. Bu sistem çözümlenerek hesaplanan λ_j^{n+1} yerine yazılırsa $(n + 1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur. Buradan $|u| = \sqrt{u_r^2 + u_s^2}$ ve $|v| = \sqrt{v_r^2 + v_s^2}$ hesaplanarak $(n + 1)$. adımdaki u ve v zarf çözümleri de elde edilir. Başlangıç değeri U^0 , başlangıç koşulu $F(x)$ kullanılarak bulunur.

3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde önerilen metodun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için dört test problemi ele alınmıştır. Bu test problemleri için Q_1, Q_2 ve E korunum kanunları ve L_2, L_∞ hata normları hesaplanarak literatürde yer alan analitik çözüm ve bazı sayısal sonuçlar ile karşılaştırmaları yapılmıştır.

CNLS denklemini

$$Q_1 = \int_a^b |u(x, t)|^2 dx, \quad Q_2 = \int_a^b |v(x, t)|^2 dx, \quad (42)$$

$$E = \gamma \int_a^b (|u(x, t)|^2 + |v(x, t)|^2) dx - \frac{1}{2} \int_a^b (|u(x, t)|^4 + |v(x, t)|^4) dx - \beta \int_a^b |u(x, t)|^2 |v(x, t)|^2 dx \quad (43)$$

şeklinde üç korunuma sahiptir [10]. Bunlar sırasıyla kütle ve enerji korunumlarına karşılık gelir. L_2 ve L_∞ hata normları ise analitik ve sayısal çözümler arasındaki farklar kullanılarak hesaplanmıştır ve

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^N |u_i^{\{analitik\}} - u_i^{\{sayısal\}}|^2} \quad (44)$$

$$L_\infty = \max_{\{1 \leq i \leq N\}} |u_i^{\{analitik\}} - u_i^{\{sayısal\}}| \quad (45)$$

biçimindedir.

3.1 Tek Soliton Dalga Hareketi

CNLS denkleminin tek soliton dalga çözümü

$$u(x, t) = \sqrt{0.2} \operatorname{sech}(\sqrt{0.2}(x - t)) e^{i(0.5x - 0.05t)} \quad (46)$$

$$v(x, t) = -\sqrt{0.2} \operatorname{sech}(\sqrt{0.2}(x - t)) e^{i(0.5x - 0.05t)} \quad (47)$$

şeklinde [36]. Burada başlangıç ve sınır koşulları analitik çözümden

$$u(x, 0) = \sqrt{0.2} \operatorname{sech}(\sqrt{0.2}x) e^{i0.5x} \quad (48)$$

$$v(x, 0) = -\sqrt{0.2} \operatorname{sech}(\sqrt{0.2}x) e^{i0.5x} \quad (49)$$

$$u(-30, t) = u(60, t) = 0 \quad (50)$$

$$v(-30, t) = v(60, t) = 0 \quad (51)$$

şeklinde elde edilmiştir. Problemin zarf soliton çözümleri ise

$$|u| = |v| = \sqrt{0.2} \operatorname{sech}(\sqrt{0.2}(x - t)) \quad (52)$$

biçimindedir. Bu çözümler sabit 1 hızında değişmeden sağa doğru hareket eden tek solitonları temsil etmektedirler. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümlerine ait yapılan sayısal hesaplamalarda ki sonuçlar aynı olduğundan bu çalışmada sadece $u(x, t)$ çözümüne ait sayısal sonuçlar verilmiştir.

Korunumların başlangıç anındaki değerleri $Q_1 = Q_2 = 0.8944271909$ ve $E = 0.3279566676$ şeklinde hesaplanmıştır. Tablo 1'de $u(x, t)$ sayısal çözümünün hata

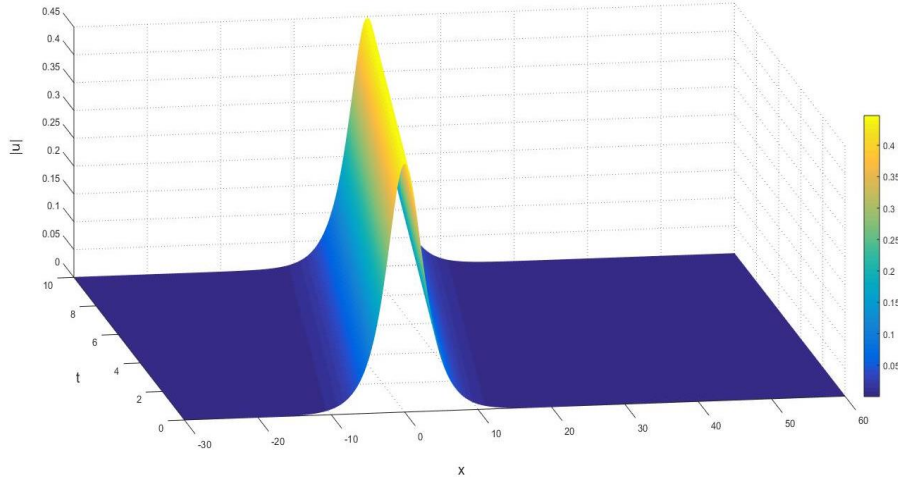
normlarının farklı taban fonksiyonları ve [11] nolu çalışma ile karşılaştırılması verilmiştir. Tablo 2’de ise $u(x, t)$ sayısal çözümüne ait korunumların değerleri listelenmiştir. Şekil 1’de $T = 10$ zamanındaki tek soliton simülasyonu gösterilmiştir. Şekil 2’de de bu simülasyona ait Contour yer almaktadır. Şekil 3 ve Şekil 4 $u(x, t)$ sayısal çözümünün reel ve sanal kısımlarının dalga hareketlerini göstermektedir.

Tablo 1. $T = 2$ zamanı için $u(x, t)$ sayısal çözümünün hata normlarının karşılaştırılması

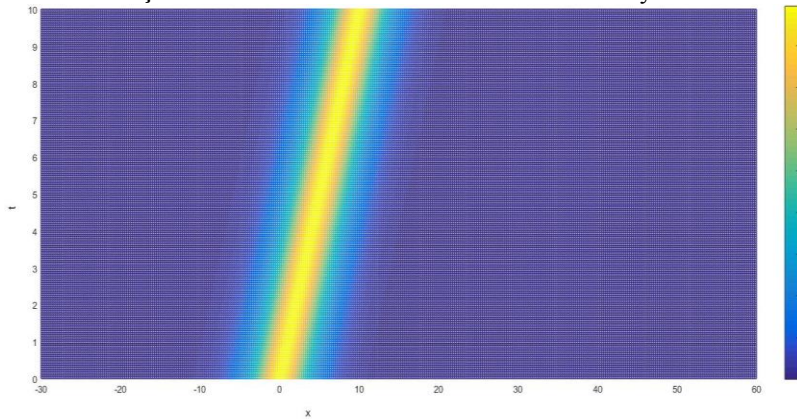
Metot	Δt	Δx	L_2	L_∞
G	0.4	0.4	4.9637e-03	2.8556e-03
MQ	0.4	0.4	4.9667e-03	2.8560e-03
$W_{7,5}$	0.4	0.4	4.9427e-03	8.2837e-03
[11]	0.4	0.4	-	8.1527e-03
G	0.1	0.2	3.1639-04	1.7994e-04
MQ	0.1	0.2	3.1537e-04	1.7837e-04
$W_{7,5}$	0.1	0.2	3.0454-04	1.7065e-04
[11]	0.1	0.2	-	5.5534e-04

Tablo 2. $T = 10$ zamanı ve $\Delta x = 0.5$ konum adımı için $u(x, t)$ sayısal çözümüne ait korunumlar

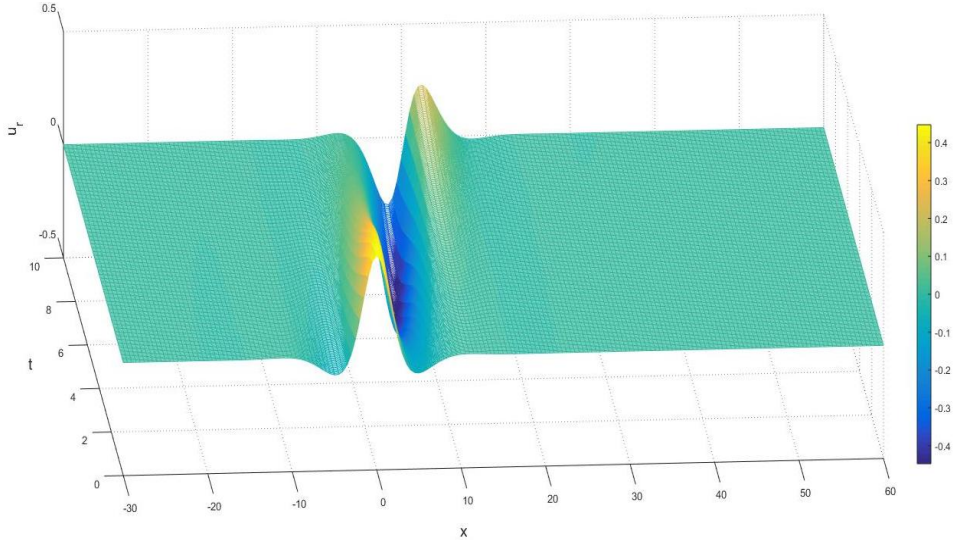
Metot	Δt	Q_1	E
G	0.05	0.8944271909	0.3279568601
MQ	0.05	0.8944271911	0.3279567350
$W_{7,5}$	0.05	0.8944271909	0.3279385162
G	0.025	0.8944271909	0.3279566667
MQ	0.025	0.8944271897	0.3279565427
$W_{7,5}$	0.025	0.8944271909	0.3279383268



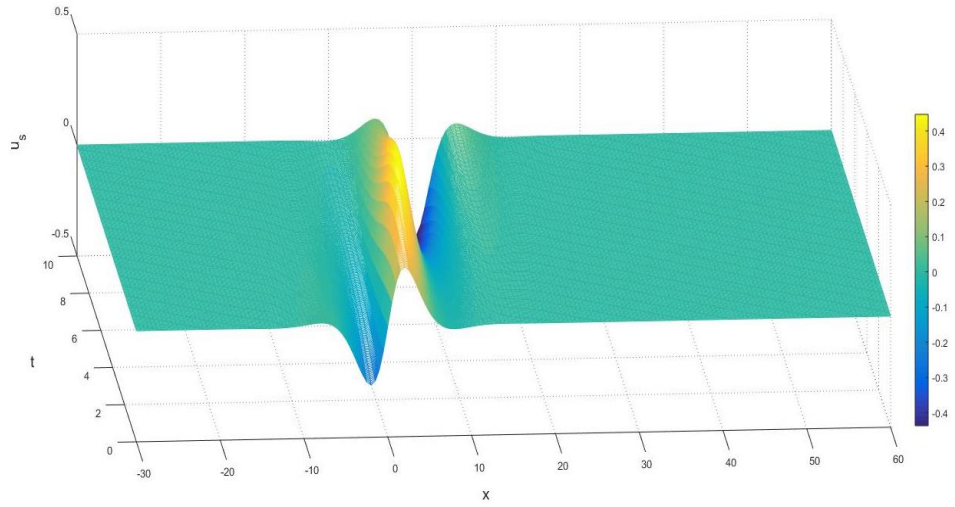
Şekil 1. $T = 10$ zamanında tek soliton simülasyonu



Şekil 2. $T = 10$ zamanında tek soliton simülasyonuna ait contour



Şekil 3. $u_r(x, t)$ sayısal çözümüne ait dalganın hareketi



Şekil 4. $u_s(x, t)$ sayısal çözümüne ait dalganın hareketi

3.2 İki Solitonun Etkileşimi

Bu bölümde 3 farklı test problemi ele alınmıştır. Bu üç test problemi de çarpışan iki solitonun etkileşimini göstermektedir.

3.2.1 Test problemi 1

Bu test probleminde çarpışan iki solitonun etkileşimi

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \sum_{j=1,2} \sqrt{k_j} \operatorname{sech}(\sqrt{k_j}x - x_j) e^{i\xi_j x} \quad (53)$$

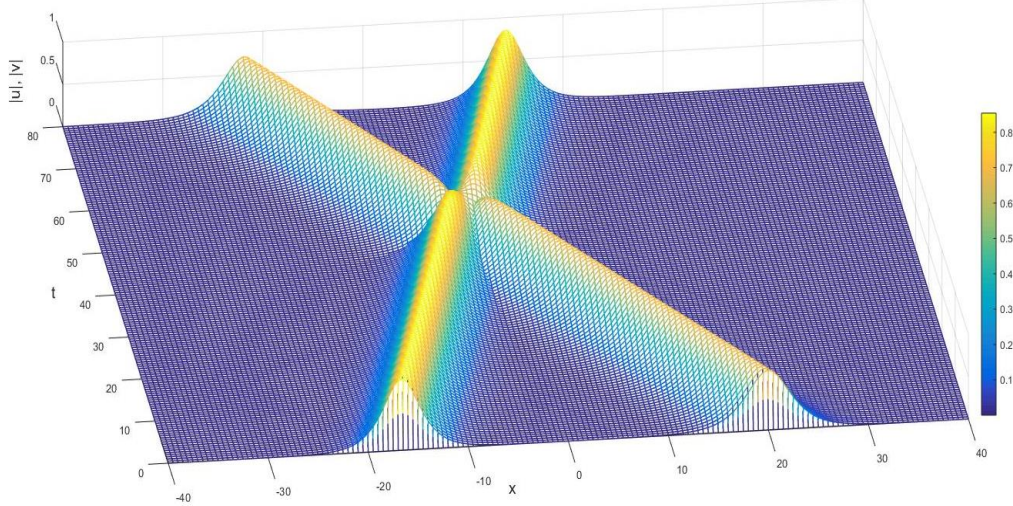
başlangıç koşulu kullanılarak $0 < t < 30$ zaman aralığı ve $0 < x < 60$ tanım aralığında $k_1 = k_2 = 1, x_1 = 20, x_2 = 45$ ve $\xi_1 = -\xi_2 = 0.5$ parametreleri için çözülmüştür.

Şekil 5’de zıt yönde ilerleyen bu iki solitonun çarpışmaları ve çarpıştıktan sonraki etkileşimi verilmiştir. Şekil 6’da ise sayısal çözüm için Contour gösterilmiştir. Bu

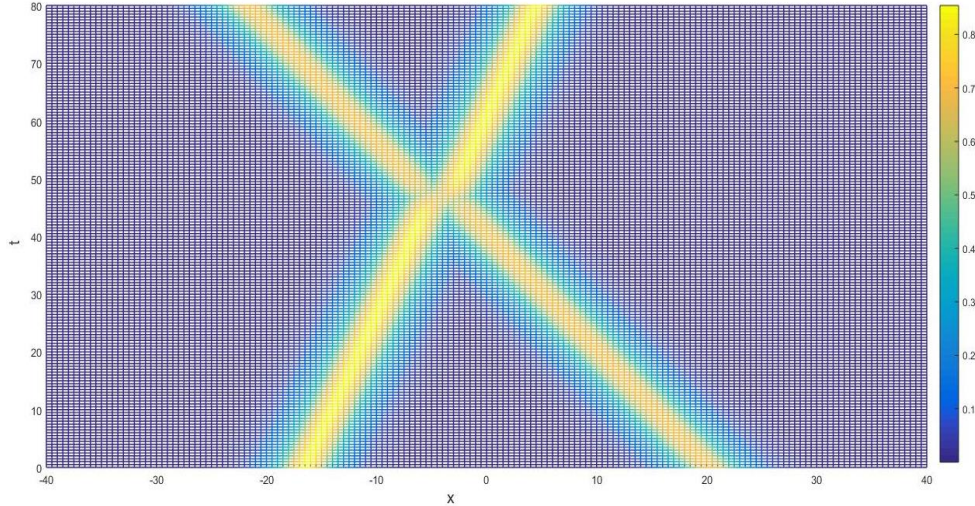
şekillerden görüldüğü gibi çarpışmadan sonra bu iki dalga birbirinden ayrılarak zaman içinde eski formunu geri kazanmaktadır. Tablo 3’de ise $T = 0$ ve $T = 30$ zamanındaki korunumların değerleri verilmiştir.

Tablo 3. $\Delta t = 0.05$ ve $\Delta x = 0.5$ için $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

T	Q_1	E
0	3.9997	-0.6670
30	3.9997	-0.6848



Şekil 5. İki solitonun etkileşimi



Şekil 6. İki solitonun etkileşimine ait Contour

3.2.2 Test Problemi 2

Bu problemde, çarpışan iki solitonun etkileşimi

$$u(x, 0) = \sqrt{2}k_1 \operatorname{sech}(k_1x - x_1) e^{i\xi_1x} \quad (54)$$

$$v(x, 0) = \sqrt{2}k_2 \operatorname{sech}(k_2x - x_2) e^{i\xi_2x} \quad (55)$$

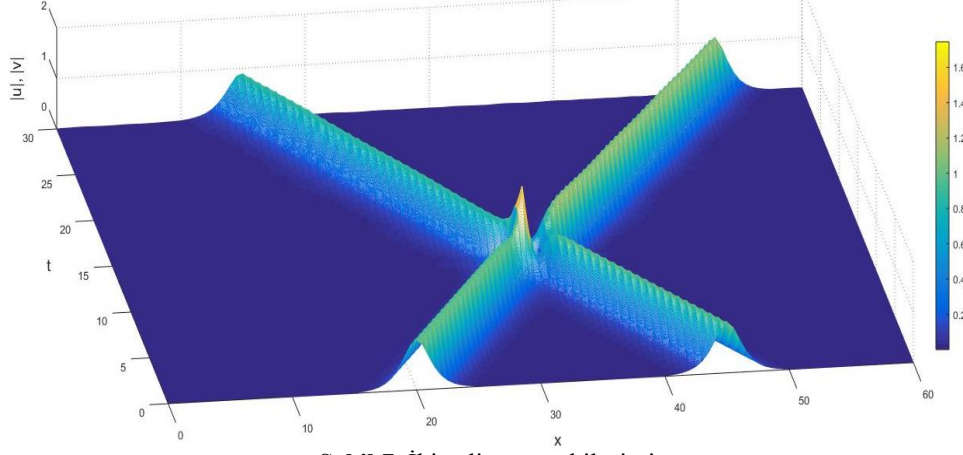
başlangıç koşulu altında $[-40,40] \times [0,80]$ aralığında $k_1 = 0.6, k_2 = 0.5, x_1 = -x_2 = 10, \xi_1 = 0.125$ ve $\xi_2 = 0.25$ parametreleri için çözülmüştür.

Zıt yönde ilerleyen bu iki solitonun çarpışmalarının simülasyonu ve Contour grafikleri Şekil 7 ve Şekil 8’de verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi bu iki solitonun zıt yönde

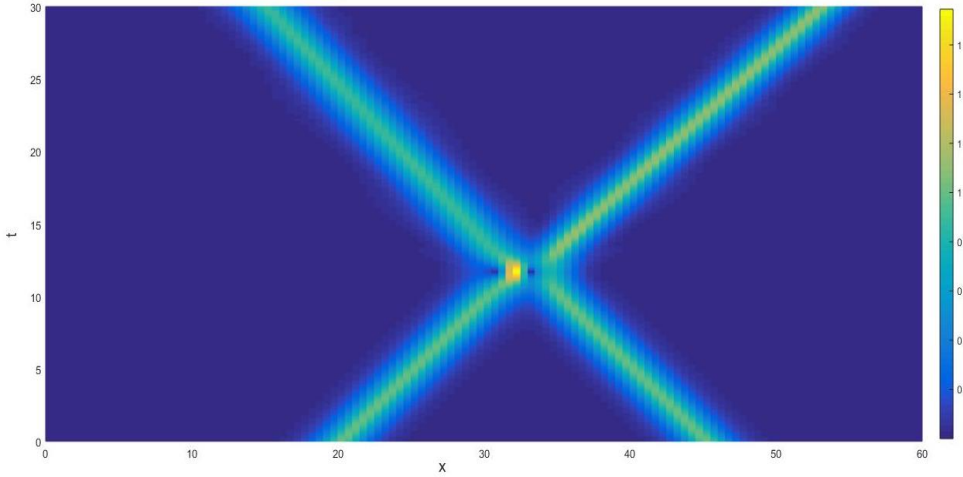
ilerleyerek çarpıştıkları ve birbirinden ayrılarak zaman içinde orijinal şekillerini aldıkları gözlenmiştir. Tablo 4’de başlangıç anı ve $T = 80$ zamanındaki korunumların değerleri verilmiştir.

Tablo 4. $\Delta t = 0.5$ ve $\Delta x = 0.5$ için $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

T	Q_1	E
0	2.4000	-0.2922
80	2.4000	-0.3037



Şekil 7. İki solitonun etkileşimi



Şekil 8. İki solitonun etkileşimine ait Contour

3.2.3 Test Problemi 3

Bu test probleminde, çarpışan iki solitonun etkileşimi için

$$u(x, 0) = \text{sech}(x + D) e^{3ix} \quad (56)$$

$$v(x, 0) = \text{sech}(x - D) e^{-3ix} \quad (57)$$

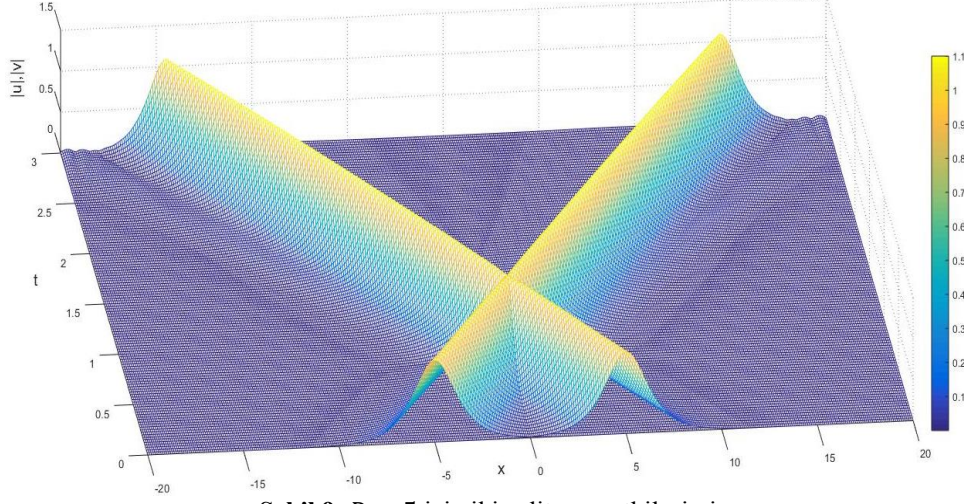
başlangıç koşulu kullanılarak $[-20, 20] \times [0, 5]$ aralığında çözülmüştür. Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla $-D$ ve D noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki solitonu temsil eder. Burada $D = 5$ ve $D = 10$ değerleri için hesaplamalar yapılmıştır. Bu test probleminde sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözüme ait sonuçlar verilmiştir.

İki dalganın etkileşiminin simülasyonu ve Contour grafikleri Şekil 9 – 12’de verilmiştir. Tepe noktaları $D = 5$ ve $D = 10$ değerlerinin her ikisi içinde başlangıç

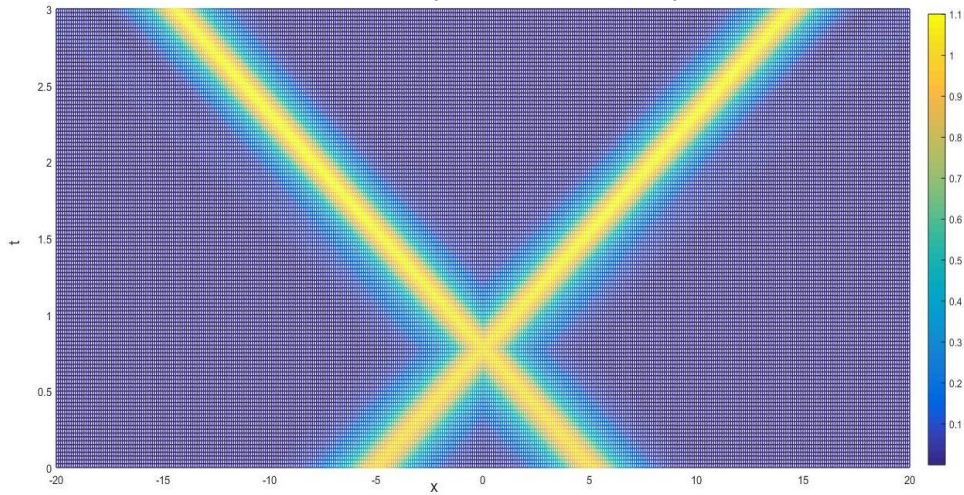
anındaki korunumların değerleri $Q_1 = 2.000$ ve $E = 31.7576$ olarak bulunmuştur. $T = 3$ zamanındaki korunumların değerleri Tablo 5'de verilmiş ve korunumların korunduğu gözlenmiştir.

Tablo 5. $T = 3$ zamanında $\Delta t = 0.02$ ve $\Delta x = 0.1$ için $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

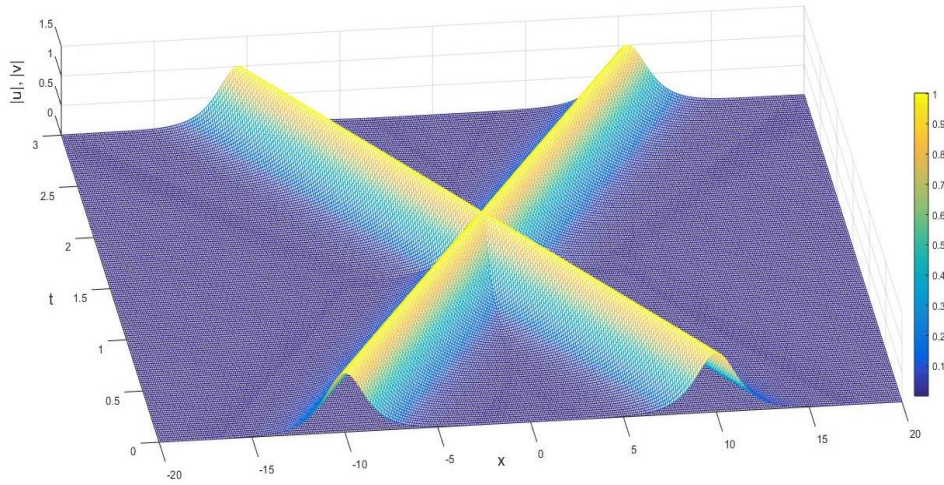
D	Q_1	E
5	1.999	31.7817
10	2.000	31.7837



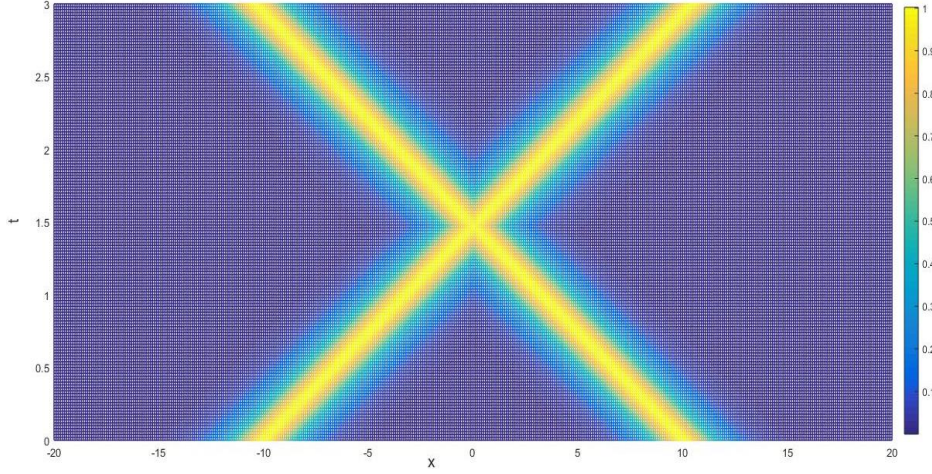
Şekil 9. $D = 5$ için iki solitonun etkileşimi



Şekil 10. $D= 5$ için iki solitonun etkileşimine ait Contour



Şekil 11. $D= 10$ için iki solitonun etkileşimi



Şekil 12. $D = 10$ için iki solitonun etkileşimine ait Contour

4. Kararlılık Analizi

CNLS denklemi için RBFC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi Von-Neumann kararlılık analizi metodu kullanılarak yapılmıştır. Von-Neumann kararlılık analizi metodu uygulanırken ilk önce (21) denklemindeki lineer olmayan terim yerine sabit bir q katsayısı alınarak, denklem lineer hale getirilir. Lineer denklem aşağıdaki biçimdedir.

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \frac{A \partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + qAU(x, t) = 0 \quad (58)$$

(58) denkleminin Crank-Nicolson metodu ile elde edilen fark denklemi ise

$$\left(\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \right) + A \left(\frac{(U_i)_{xx}^{n+1} + (U_i)_{xx}^n}{2} \right) + qA \left(\frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} \right) = 0 \quad (59)$$

şeklindedir. (60) eşitliğine RBFC metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) + \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j''(x_i) + \frac{q\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) - \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j''(x_i) - \frac{q\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \end{aligned} \quad (60)$$

$i = 2, 3, \dots, N - 1$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (61)$$

eşitliği elde edilir. Von Neumann kararlılık analizi metoduna göre, $i = \sqrt{-1}$, $\theta \in R$, $Y \in R^{4 \times 1}$ ve $\xi \in R^{4 \times 4}$ amplifikasyon çarpanı (amplification matrix) olmak üzere

$$\sum_j^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) = \xi^n \Upsilon e^{i\theta x} \quad (62)$$

kabul edelim. (62) eşitliği (60) – (61)'de yerine yazılırsa

$$\xi = [I + aA]^{-1}[I - aA] \quad (63)$$

elde edilir. Burada

$$I + aA = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\Delta t(q - \theta^2)}{2} \quad (64)$$

$$I - aA = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

biçimindedir. λ_j 'ler ξ matrisinin özdeğerleri olmak üzere $|\lambda_j| \leq 1$, $j = 1,2,3,4$ koşulu sağlandığı müddetçe sistem kararlıdır. ξ matrisinin özdeğerleri $|\lambda_{1,3}| = |\lambda_{2,4}| = 1$ olduğundan sayısal yöntem koşulsuz kararlıdır.

5. Sonuç ve Yorum

Bu çalışmada CNLS denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için ağsız bir yöntem olan RBFC metodu kullanılmıştır. Bu denklem için dört farklı test problemi ele alınmıştır. Her bir test probleminde elde edilen sayısal sonuçlar ile literatürdeki diğer çalışmalar kıyaslandığında iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. İki soliton etkileşiminde dalgaların çarpışmadan belli bir zaman sonra eski formlarını aldıkları gözlenmiştir. Von-Neumann kararlılık metodu ile önerilen yöntemin kararlılık analizi incelemesi yapılmış ve yöntemin koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir.

Kaynakça

- [1] G. R. Liu, *Mesh free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press. R. W., 2003.
- [2] X. Hu, L. Zhang, "Conservative compact difference scheme for the coupled nonlinear Schrödinger equation system," *Numer. Methods Partial Differ. Eq.*, 30, 749-772, 2014.
- [3] M. İsmail, T. Taha, "Numerical simulation of coupled nonlinear Schrödinger equation," *Math. Comput. Sim.*, 56, 547-562, 2001.
- [4] M. İsmail, S. Alamri, "Highly accurate finite difference method for coupled nonlinear Schrödinger equation," *Comput. Math. Appl.*, 81, 333-351, 2004.
- [5] M. İsmail, T. Taha, "A linearly implicit conservative scheme for the coupled nonlinear Schrödinger equation," *Math. Comput. Sim.*, 74, 302-311, 2007.
- [6] A. Kurtianitis, F. Ivanauska, "Finite difference solution methods for a system of the nonlinear Schrödinger equations," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 9 (3), 247-258, 2004.
- [7] B. Reichel, S. Leble, "On convergence and stability of a numerical scheme of coupled nonlinear Schrödinger equations," *Comput. Math. Appl.* 55, 745-759, 2008.
- [8] J. Sun, X. Gu ve Z. Ma, "Numerical study of the soliton waves of the coupled nonlinear Schrödinger system," *Phys. D*, 196, 311-328, 2004.
- [9] Z. Sun, D. Zhao, "On the L_∞ convergence of a difference scheme for coupled nonlinear Schrödinger equations," *Comput. Math. Appl.*, 59, 3286-3300, 2010.
- [10] T. Wang, T. Nie ve L. Zhang, "Analysis of a symplectic difference scheme for a coupled nonlinear Schrödinger system," *J. Comput. Appl. Math.*, 231, 745-759, 2009.

- [11] J. Chen ve L. Zhang. Numerical approximation of solution for the coupled nonlinear Schrödinger equations. *Acta Math. Sin.*, 33, 435-450, 2017.
- [12] A. Kaplan ve Y. Dereli. "A meshless method and stability analysis for the nonlinear Schrödinger equation," *Waves Random Complex Media*, 27(4), 602-614, 2017.
- [13] Y. Dereli. "The meshless kernel-based method of lines for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation" *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 36, 1416-1423, 2012.
- [14] R. L. Hardy, R.L., "Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces," *J. Geophys. Res.*, 76, 1905-1915, 1971.
- [15] R. Franke, "Scattered data interpolation: Tests of some methods," *Math. Comp.*, 38, 181-200, 1982.
- [16] W. R. Madcy ve S. A. Nelson, "Multivariable interpolation and conditionally positive definite functions II," *Math. Comput.*, 54, 211-230, 1990.
- [17] C. A. Micchelli, "Interpolation of scattered data: distance matrix and conditionally positive definite functions," *Construct. Approx.*, 2, 11-22, 1986.
- [18] E. J. Kansa, "Multiquadrics scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics, II: Solutions to hyperbolic, parabolic and elliptic partial differential equations," *Comput. Math. Appl.*, 19, 149-161, 1990.
- [19] C. Franke ve R. Schaback, "Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions," *Appl. Math. Comput.*, 93, 73-82, 1998.
- [20] C. Franke ve R. Schaback, "Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions," *Adv. Comput. Math.*, 8, 381-399, 1998.
- [21] Z. Wu ve R. Schaback, "Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data," *IMA J. Numer. Anal.*, 13, 13-27, 1993.
- [22] N. Dyn. "Interpolation of scattered data by radial functions," in: *Topics in Multivariate Approximation*, Academic Press, 47-61, 1987.
- [23] N. Dyn. "Interpolation and approximation by radial and related functions," New York: Academic Press, 211-234, 1989.
- [24] R. Schaback. "Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function," in: *Approximation Theory VIII, Vol. 1: Approximation and Interpolation*, Singapore: World Scientific, 491-514, 1995.
- [25] B. Fornberg ve N. Flyer. "Solving PDEs with radial basis functions," *Acta Numerica*, 24, 215-258, 2015.
- [26] M. Batan. "En küçük kareler destek vektör makineleriyle serbest yüzeyli akımlarının havalandırma veriminin modellenmesi," Yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.
- [27] C. C Lee, P. C. Chung, J. R. Tsai ve C.I Chang. "Robust radial basis function neural networks," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B Cybern.*, 29(6), 1999.
- [28] A. Mellit, A. M. Pavan ve M. Benganem. "Least squares support vector machine for short term prediction of meteorological time series," *Theor. Appl. Climatol.*, 111, 297-302, 2013.
- [29] A. E. Tarwater, "A parameter study of Hardy's multiquadric method for scattered data interpolation," Lawrence Livermore National Laboratory, Technical report, UCRL-54670, 1985.
- [30] R. E. Carlson, ve T. A. Foley, "The parameter in multiquadric interpolation," *Comput. Math. Appl.*, 21, 29-42, 1991.
- [31] W. R. Madych, "Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolations," *Comput. Math. Appl.*, 24, 121-138, 1992.
- [32] R. Schaback, "Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation," *Adv. Comput. Math.*, 3, 251-264, 1995.
- [33] A. H. D. Cheng, M. A. Golberg, E. J. Kansa ve G. Zammito, "Exponential convergence and multiquadric collocation method for partial differential equations," *Numer. Methods for Partial Diff. Eq.*, 19, 571-594, 2003.
- [34] H. Wendland, *Scattered Data Approximation. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 17, 2005.
- [35] M. Wadati, T. Izuka ve M. Hisakado, "A coupled nonlinear Schrödinger equation and optical solitons," *J. Phys. Soc. Japan*, 61, 2241-2245, 199.