

## Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi\*

### Visualization in the Mathematical Generalization Process and its Importance

Rezan YILMAZ \*\*, Ziya ARGÜN\*\*\*

**ÖZ:** Araştırmanın amacı, matematik yapma yöntemlerinden biri olan genelleme sürecinde görselleştirmeyi ve önemini incelemektir. Bunun için, katılımcıların genelleme yapabilecekleri uygun ortamlar içinde hangi görselleştirmeleri nasıl kullandıkları ve ne tür görsel imajlara sahip oldukları araştırılmıştır. Nitel yaklaşımlarından durum çalışması (case study) ile 5 öğretmen adayının katılımcı olduğu çalışmada bulgular, katılımcıların görselleştirmelere sıklıkla ve farklı şekillerde başvurduğunu ve farklı görsel imajlara sahip olduğunu göstermektedir. Kullandıkları görselleştirmeler kavramlar ve kavramlar arasındaki ilişkileri tamamlamada önemli bir yere sahip olmuş ve genelleme sürecinin gelişimine tespit edilebilen etkilerde bulunmuştur. Bulgular ışığında genelleme sürecini daha anlaşılır hale getirmek için görselleştirme ve görsel imajlarla ilgili matematik öğretimine yönelik ve ileride yapılacak bilimsel araştırmalara dair öneriler sunulmuştur.

**Anahtar sözcükler:** genelleme, görselleştirme, görsel imaj, matematik eğitimi.

**ABSTRACT:** The purpose of this study was to investigate the visualization in mathematical generalization process and its importance. To do this, we searched which visualizations were used by the participants in appropriate situations, how they set forth these and what kind of visual images they had. We employed case study technique as a quantitative research method on five participants that were pre-service mathematics teachers. The results showed that the visualization was widely employed by the participants, but in different styles and different visual images were presented in the process. Visualizations had an important place on the relations between concepts, had observable effects on the development of the processes. In the light of the results, some suggestions were given about visualization and visual images to make clear this process for mathematics learning and future academic researches.

**Keywords:** generalization, visualization, visual image, mathematics education.

## 1. GİRİŞ

Matematik öğretiminin etkili yollarından birisinin matematik yaptırma olduğu matematik eğitimcileri tarafından çokça vurgulanmaktadır. Matematik yaptırma yöntemlerinden genellemenin öğretimdeki önemi ise iyi bilinmektedir. Genelleme süreci matematiksel kavramları tanımayı ve bu kavramlarla ilişkiler kurmayı gerektirmektedir. Bu nedenle, kurulacak ilişkiyi temsil eden doğru bir zihinsel imajın, bu kavramların ilişkilendirilmesinde önemli bir paya sahip olduğu düşünülmektedir. Çalışma, zihinsel imajların anlamlı şekilde kurgulanmasında farklı bir bakış olarak görülebilecek olan görselleştirmenin, genelleme süreci içindeki yerini ve önemini görmek amacıyla taşınmaktadır.

### 1.1. Genelleme

Matematikte genellemeler, teoremlerin formülasyonuna öncülük eder ve makul örüntülerin ortaya çıkarıldığı örneklerin yapılandırılmaları ile başlayan muhakemelerin ve yanıtların bir zigzaglı tümevarım yolunun sonucudur (Sriraman, 2004). Matematik eğitimi literatürü, genellemeyi belirli durumlardan sağlanan veya belirli durumlara neden olan bir süreç

\* Bu çalışma ilk yazarın doktora tezinin bir bölümüdür.

\*\* Yrd.Doç.Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi OFMA Matematik Eğitimi, rezzany@omu.edu.tr

\*\*\* Prof.Dr., Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi OFMA Matematik Eğitimi, ziya@gazi.edu.tr

olarak tanımlamaktadır (Davydov, 1990; Krutetski, 1976; Polya, 1954). Piaget (1970), genellemeyi üst sıra operasyon olarak görmüş ve reflektif soyutlamayı geliştiren bir süreç olarak tanımlamıştır. Skemp (1986), matematiksel genellenin sofistike ve güçlü bir aktivite süreci olduğunu söylemektedir. Sofistikedir, çünkü içeriğini geçici olarak ihmal eder ve metodu şekli üzerinde yansımaya gerektirir. Güçlüdür, çünkü sadece karşılaşılan yeni durumların özümlemesi talebine cevap vermekle kalmaz, aynı zamanda bu taleplerin ilerisi için de ortaya konulan şemaların tam ve bilinçli olarak yeniden yapılanmalarına katkı sağlar. Krutetski (1976), öğrencilerin genellemeleri doğru formüle edebilmeleri için özel içeriklerden soyutlamaları ve benzerlikleri, yapıları ve ilişkileri seçmeleri gerektiğini ileri sürmektedir.

Mitchelmore (2002) genellemeyi, soyutlama veya kavram ile anlamdaşlık, mevcut bir kavramın genişlemesi ve mevcut olan kavramla ilgili bir teorem şeklinde sınıflamıştır. Garcia-Cruz & Martinon (1998) lineer örüntülerde genelleme seviyelerini şu şekilde belirlemişlerdir: 1. Seviyede (Prosedürel Aktiviteler); kişi ardışık ve yinelemeli karakterlerin farkına varmaktadır. Bu stratejiler geliştiremezler ancak bu rutin davranışlar daha sonra (diğer seviyede) geliştirilen kuralların değerlendirmelerini kontrol ederken kullanılır. 2. Seviyede (Prosedürel Anlama, Lokal Genelleme); kişi yerel bir genelleme tespit etmektedir. Bu, problemde problemde farklılık göstermesine rağmen verilen yeni bir problem içindeki nümerik veya resim dizisinde yerine getirilen bir hareketten değişmeyi elde etmek anlamına gelmektedir. 3. Seviyede (Kavramsal Anlama, Global Genelleme); kişi bir strateji geliştirir. Bu, onun yeni ama benzer bir problemde benzer değişimi elde etmesi ve benzer hareketi uygulaması anlamına gelmektedir. Geliştirilen ve daha önceki problemde kullanılan kural artık hareket için uyarıcı olacak şekilde bir obje olmuştur.

Ellis (2007) genellemeyi, genelleme eylemleri (ilişkilendirme, araştırma, genişletme) ve refleksiyon genellemeleri (belirleme veya açıklama, tanımlama, etki) şeklinde sınıflandırmıştır. Genelleme eylemleri kişilerin aktiviteleri ve konuşmaları içinde sonuçlanan zihinsel aktiviteler olarak tanımlanmaktadır. Kişilerin açıkladıkları ifadeler ise refleksiyon genellemeleri olarak adlandırılmıştır.

## 1.2. Görselleştirme

Görselleştirme, yapılandırma, temsillendirme ve zihinsel imajlar arasında karmaşık bir dönüşüm sürecidir (Wheatly, 1998). Daha önceden bilinmeyen fikirler, gelişen ve değişen anlamalar ve bilgiler arasında bağıntı kurma sırasında ortaya çıkar ve betimleme yapmak amacıyla resimlerin, imajların ve diyagramların kullanılmasıdır. Bu süreç zihnimizdeki şemaların, kağıt üzerinde veya teknolojik araçlarla yansımaları, yorumlanmasıdır (Bishop 1989; Hershkowitz, 1989; Zimmermann & Cunningham, 1991). Bu tanım matematik öğreniminde görselleştirmenin, matematiksel problemleri araştırmak ve matematiksel kavramlara ve aralarındaki ilişkilere anlam vermede güçlü bir araç olduğunu vurgulamaktadır. Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996) ise görselleştirmeden, bireyin içsel bir yapılanma ve hisleri ile kazanıma eriştiği bir şey arasında güçlü bir bağlantı kurma davranışı şeklinde bahsetmişlerdir. Kişi uzamsal bir düzenleme oluşturduğu zaman zihninde bu oluşuma rehberlik yapan bir görsel imaj bulunmaktadır. Bu nedenle görselleştirme, matematikle uğraşmada hem uzamsal bir doğanın tüm yazılımlarını ve hem de görsel olan zihinsel imajların yapılanma ve dönüşüm süreçlerini içerir (Presmeg, 1997). Görselleştirme, bilginin çokluğu durumunda karmaşıklığı azaltmaya imkan vermektedir. Ancak görselleştirme hakkındaki sınırlılıklar, zorluklar ve görselleştirmeye karşı olan gönülsüzlük sık sık tartışılmıştır (Arcavi, 2003; Eisenberg, 1994; Stylianou ve Silver, 2004).

Matematik, nesnelendirme ve gerçek durumlardan soyutlama, temsillendirme ve bu temsillerin çoğunun görsel olduğuyla ilgilidir (Bishop, 1989). Bu anlamda, görselleştirme bilgiyi

anamlı yapılar olarak organize etmekle kalmaz aynı zamanda bir çözümün analitik gelişimine rehberlik eden önemli bir faktördür. Presmeg (1992) görselleştirmeden, anlamak için bir destek veya sonuca ulaşmak için bir araç olarak bahsetmiş ve bu nedenle de bir diyagramın değil, bir kavramın ya da bir problemin görselleştirilmesinden bahsedebileceğini söylemiştir. Bunun için, problemin zihinsel bir imajına başvurulur ve bir problemi görselleştirme diyagram veya görsel imaj terimlerinde problemi anlama manasına gelir. Böylece, bu süreç çözüm metodunun gerekli bir parçası olarak görsel imajı içermektedir.

Presmeg (1986), öğrencilerde saptadığı beş farklı çeşitte görsel imajı şu şekilde sıralamaktadır: somut imaj, günlük objelerin parçalarının zihinde biraraya gelip oluşturduğu bütünsel bir resim şeklindeki; örüntü imajı, görsel-uzamsal şemada tasvir edilen sade ilişkiler şeklindeki; formüllerin hafıza imajı genellikle zihin gözüyle gördüğümüz ve tahta veya defterde yazılı şeklindeki formüllerin hafızamızda oluşması şeklindeki; kinestetik imaj, kas gücü aktiviteleri gerektiren şeklindeki ve dinamik imaj ise, hareketli şeklindeki imajdır.

Guzman (2002), kişinin görselleştirmesinin, sadece gözlerimizin optik süreçlerini gerektiren bir süreç değil, psikolojik duyunun da içinde olduğu vizyon diye adlandırdığımız daha derin bir fenomen olduğundan bahsetmekte ve bu anlamda görselleştirmeyi dört çeşitte sınıflandırmaktadır. Bunlar; objelerin görsel manipülasyonunun soyut matematiksel ilişkilere dönüştürülebildiği temsiller şeklindeki izomorfik görselleştirme, soyut objeler arasındaki ilişkileri yeterince taklit eden ve belirli karşılıklı ilişkilere sahip bazı elemanların tahmin, araştırma, ispat gibi süreçlerdeki imajların oluşumuna destek sağladığı subjektif şeklindeki homomorfik görselleştirme, daha önce incelendiği için davranışını daha iyi bildiğimiz veya daha kolay elde ettiğimiz ve analogik bir yoldan birbirleri ile ilişkili olan objeleri zihinsel olarak yerine koyarak yaptığımız analogik görselleştirme ve son olarak düşünme süreçlerimize yardımcı olan, diyagramlarla temsil edilmiş zihinsel objelerimizin ve karşılıklı ilişkilerin görsellendiği diagramatik görselleştirme.

## 2. YÖNTEM

Çalışma, genelleme sürecinde görselleştirmenin önemini incelemek için, neden veya nasıl sorularına cevap arandığında tercih edilen ve bazı gerçek hayata ilişkin içeriklerde güncel fenomenlere odaklanıldığında kullanılıp bir karar veya kararlar kümesini açığa çıkaran nitel araştırma yöntemi desenlerinden durum çalışması ile yapılmıştır (Schramm, 1971; Yin, 2003). Araştırma, bir devlet üniversitesinde öğrenim gören dördüncü sınıf öğrencileri arasından, 2008-2009 eğitim öğretim yılı güz döneminde açılan bir dersi alan matematik öğretmenleri adayları üzerinde yapılmıştır. Öncelikle öğrencilerin dersteki genelleme süreçleri incelenerek bu süreçlerdeki yorumlamaları ve bu yorumlamadaki görselleştirmeleri dikkate alınmıştır. Bunun sonucunda 13 öğrenci ile bir pilot çalışması yapılmış (Yılmaz, Argün ve Özer, 2009) ve bu çalışma sonunda veriler değerlendirilerek ikisi erkek 5 öğrenci ile durum çalışmasına başlanılmıştır. Katılımcıların seçiminde, derin bir incelemeye tabi tutulacak sınırlı sayıda ancak aynı ölçüde de bilgi bakımından zengin durumların çalışmasını öngördüğü için aşırı ve aykırı durum örneklemesinden yararlanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek 2006).

### 2.1. Veri Toplama Araçları

Çalışmada, öncelikle katılımcıların dersteki genelleme süreçlerindeki görselleştirmeleri dönem süresince gözlenmiş ve düşünme şekilleri hakkında bilgi alınmıştır. Bu anlamda yapılan gözlem, görselleştirme odaklı yapılandırılmamış gözlemlerdir. Daha sonra, genelleme süreçlerindeki görselleştirmelerini daha detaylı incelemek için gözlem değerlendirmelerine ve yapılan pilot çalışmaya göre seçilen beş katılımcı ile görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler,

katılımcıların matematiksel genelleme süreci içinde görselleştirmeyi nasıl ve ne kadar kullandıklarını, ne tür görsel imajlara yer verdiklerini incelemek adına yarı-yapılandırılmış şekilde oluşturulmuştur. Bunun için kendilerinden “*Karşılıklı kenarları paralel olan herhangi  $A_1A_2A_3...A_{2n}$  ( $n \geq 2$ ) şeklindeki  $2n$ -genler için  $n$ -genlerin ağırlık merkezleri, verilen  $2n$ -geni  $A_1A_2A_3...A_n$ ,  $A_1A_2A_3...A_{n+1}$  vb. alt parçalara böler ve buradaki oluşacak çokgenler yine  $2n$ -gen şeklinde olup karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir*” (Villiers, 2007) genellemesini yapmaları beklenmiştir. Bunun için katılımcılardan her birine, 3 aşama içinde toplam 4 durum verilmiştir (Tablo-1). Buradaki şekiller ve başlıklar öğrenci ile paylaşılmamıştır.

**Tablo 1: Genelleme Süreci İçinde Katılımcılara Verilen Durumlar**

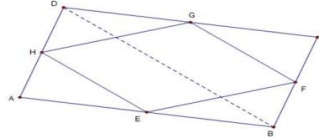
### I. AŞAMA

#### 1. Durum

1. ABCD karşılıklı kenarları paralel olan bir dörtgen olsun. E,F,G,H noktaları ise sırasıyla AB, BC, CD, DA kenarlarının orta noktaları olsun.

Buradaki EFGH şekli için ne söyleyebiliriz?

Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz?

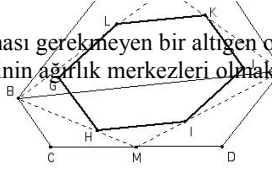


#### 2. Durum

2. ABCDEF karşılıklı kenarları paralel olan ama eşit olması gerekmeyen bir altıgen olsun. G,H,I,J,K ve L noktaları ise sırasıyla ABC, BCD, CDE, DEF, EAF ve FAB üçgenlerinin ağırlık merkezleri olmak üzere;

Buradaki GHIJKL şekli için ne söyleyebiliriz?

Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz?

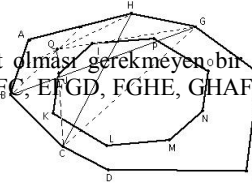


#### 3. Durum

3. ABCDEFGH karşılıklı kenarları paralel olan ama eşit olması gerekmeyen bir sekizgen olsun. I,J,K,L,M,N,O,P noktaları ise sırasıyla HABG, ABCH, BCDA, CDEB, DEFC, EFGD, FGHE, GHAF dörtgenlerinin ağırlık merkezleri olmak üzere;

Buradaki IJKLMNOP şekli için ne söyleyebiliriz?

Karşılıklı kenarları için ne söyleyebiliriz?



### II. AŞAMA

#### 4. Durum

4. Benzer şeyleri ongen ve onikigen için de söyleyebilir miyiz?

### III. AŞAMA

5. Burada fark ettiğiniz bir şey var mı?

## 2.2. Verilerin Analizi

Verilerin analizi için içerik analizi kullanılmıştır. Bunun için, ilk olarak yazılı doküman haline getirilen video kaydı görüntülerine ait veriler, ilgili literatüre dayalı olarak açık kodlama ile kodlanmış ve kavramlar belirlenerek bu kavramların özellik ve boyutları anlaşılmaya çalışılmıştır. Bunun için genelleme süreçleri içinde anlamlı olabilecek kavramsallaştırmalar ve görselleştirmeler ile ilişkili bulunan durumlar sınıflandırılmış ve bu yolla alt gruplara ayrılmıştır. Katılımcıların genelleme süreçleri içindeki görselleştirmeleri karşılaştırmalı olarak incelenmeye çalışılmıştır. Daha sonra eksensel kodlama ile elde edilen kategoriler ve bunların alt kategorileri ilişkilendirilmeye çalışılmış ve sürekli karşılaştırmalar sonucu ortak temalar oluşturulmuştur.

(Strauss & Corbin 1990; Yıldırım ve Şimşek 2006). Belirlenen ortak temalar frekanslarına dikkat edilerek tablo haline getirilmiştir. Verilerin analizi sırasında çalışmanın güvenilirliğini artırmak amacıyla ortaya konan kategoriler ve temalar, matematik eğitimi alanında nitel araştırma konusunda doktora yapan iki araştırmacının görüşü alınarak yeniden değerlendirilmiş ve ortak görüş sağlanmıştır.

### 3. BULGULAR

Verilerin analizi sonucunda katılımcılar genelleme sürecinin ilk aşamasında görselleştirmeleri üç durum için de gerçekleştirmişlerdir. Genelleştirme seviyeleri dikkate alındığında bunlar 1.seviyedeki ilişkilendirme ve araştırma süreçlerinde görülmüştür. Son iki aşama olan 2. ve 3. seviyelerde ise görselleştirmeye gerek duymadıkları gözlenmiştir. Katılımcıların araştırma içinde kullandıkları görselleştirme çeşidi izomorfik görselleştirme olmuş ve bunları genelleme eylemlerinin birinci seviyesinde işlemsel aktiviteler olarak kullanmışlardır. Ortaya çıkan 15 izomorfik görselleştirmenin 5'i ilişkilendirme süreci içinde objeleri ilişkilendirirken, geri kalan 10'u ise araştırma süreci içinde aynı ilişkiyi araştırırken görülmüştür.

Katılımcılar genelleme sürecinin tüm seviyelerinde ancak farklı yerlerinde farklı görsel imajlara yer vermişlerdir. Kullanılan görsel imajlar ise somut, kinestetik, formül ve örüntü imajlarıdır. Tablo 2 de genelleme sürecinde sahip olunan görsel imajlar, seviyelerine dikkat edilerek bütünsel şekilde ele alınmış ve frekansları ile verilmiştir.

Araştırmada katılımcıların 33 kez görsel imaj kullandıkları ve bunların 15'inin somut imaj, 11'inin formül imajı, 6'sının kinestetik imaj, 1'inin de örüntü imajı olduğu tespit edilmiştir. Diğer bir ifade ile %46'sı somut, %33'ü formül, %18'i kinestetik, %3'ü örüntü imajıdır. Bunların 11'ine aynı ilişkiyi araştırırken yer verilmiş olup, 10'u aynı çözümü veya sonucu araştırma, 5'i objeleri ilişkilendirme, 5'i durum ile ilişkilendirme, 1'i devam ettirerek genişletme ve 1'i de genel prensibe ulaşma süreçlerinde görülmüştür. Diğer bir ifade ile %34'üne aynı ilişkiyi araştırırken, %30'una aynı çözüm veya sonucu araştırırken, %15'ine objelerle ilişkilendirirken, %15'ine durumlarla ilişkilendirirken, %3'üne devam ettirerek genişletirken ve %3'üne ise genel prensibe ulaşmada rastlanmıştır. Aynı ilişkiyi araştırma sürecinde en çok somut imajın, aynı çözümü veya sonucu araştırma sürecinde ise formül imajının daha fazla kullanıldığı sonucu görülmüştür.

Katılımcıların yer verdiği somut imajlar, çoğunlukla kavramların zihinlerde oluşturduğu resimleri anlatan görüntüler şeklinde olmuştur. Bu zihinsel resimler katılımcıların kimi zaman iki ya da daha fazla mevcut obje arasındaki benzerliklerin bir çağrışımını yaparken süreç içinde objelerin ilişkilendirilmesinde, kimi zaman iki veya daha fazla obje arasındaki sabit ilişkiyi belirlemek için aynı ilişkiyi araştırma süreci içinde ortaya çıkmıştır. Somut imajlar katılımcıların görselleştirmelerinde önemli bir paya sahip olduğundan, kavramla ilgili net bir somut imaja sahip olanlar görselleştirme konusunda daha başarılı olmuşlardır. Net bir somut imaja sahip olmayan katılımcılar ise düşüncelerinden emin olamamışlardır. Katılımcılardan yanlış somut imaja sahip olan kişi olmamıştır.

Katılımcıların zihinlerinde canlandırdıkları formül imajları ise ağırlıklı olarak yapılan eylemlerin sonucunun her zaman geçerli olup olmadığını belirlemek için aynı çözümün veya sonucun araştırılması sırasında ortaya çıkmıştır. Bu imaj iki ya da daha fazla durum arasında çağrışımı kurmak için durum ile ilişkilendirme sürecinde de kullanılmıştır. Katılımcılar süreç içinde düşüncelerinin devamını sağlamak adına aynı ya da benzer oranlar elde etmeye çalışmışlar ve formül imajını net şekilde ifade edemeyen katılımcılar için bu durum düşüncelerinden emin olamamalarına neden olmuştur.

**Tablo 2: Genelleme Sürecinde Katılımcıların Sahip Oldukları Görsel İmajlar ve Seviyeleri**

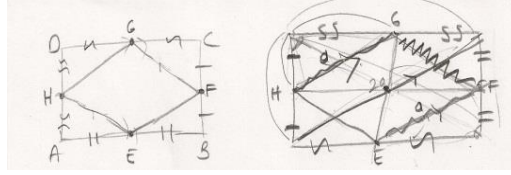
			Somut imaj	Formül imajı	Kinestetik imaj	Örüntü imajı	Dinamik imaj	Toplam	
Genelleme Eylemleri	Seviye 1	İlişkilendirme	Durumları ilişkilendirme	-	4	1	-	-	5
			Objeleri ilişkilendirme	5	-	-	-	-	5
	Araştırma	Araştırma	Aynı ilişkiyi araştırma	10	-	1	-	-	11
			Aynı prosedürü araştırma	-	-	-	-	-	0
			Aynı örüntüyü araştırma	-	-	-	-	-	0
			Aynı çözüm veya sonucu araştırma	-	7	3	-	-	10
	Seviye 2	Genişletme	Uygulanabilirlik alanını genişletme	-	-	-	-	-	0
			Ayrıntıları uzaklaştırma	-	-	-	-	-	0
			İşlem	-	-	-	-	-	0
			Devam ettirme	-	-	-	1	-	1
Refleksiyon Genellemeleri	Seviye 3	Belirleme veya açıklama	Fenomeni devam ettirme	-	-	-	-	-	0
			Özdeşlik	-	-	-	-	-	0
	Tanımlama	Genel Prensip	-	-	1	-	-	1	
		Objeler Sınıfı	-	-	-	-	-	0	
	Etki	Önsel veya Strateji	-	-	-	-	-	0	
		Modifiye edilmiş fikir	-	-	-	-	-	0	
Toplam			15	11	6	1	0	33	

Katılımcılardan Özge'nin süreç içinde direkt alıntılarının verildiği ve değerlendirildiği bazı örnekler aşağıda verilmektedir.

### 3.1. I.Aşama

#### 3.1.1. 1.Durum

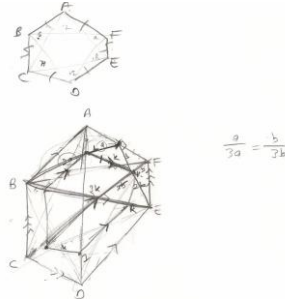
Özge, ilk durum için karşılıklı kenarların paralel olacağı yorumunu yapmış ancak bundan emin olmamıştır. İzomorfik şekilde görselleştirdiği somut imajı Şekil 1'deki gibidir. Objeler olarak ele aldığı dörtgenin kenar orta noktalarını ilişkilendirmiş, oluşan dörtgenin karşılıklı kenarlarının öncelikle eşit olmadığını düşünmüş ancak daha sonra köşegenleri obje olarak aldığı bu objeleri ilişkilendirerek geri bağlantı kurmuştur. 'Şu köşegeni düşünsek... Bu bunu ikiye bölmüş, bu bunu ikiye bölmüş. O zaman Thales'ten bunlar da paralel olur. O zaman bu da zaten paralel oluyor. Bu a ise burası 2a. Burası 2a ise burası orta nokta olduğu için a oluyor. O zaman bunlar birbirine eşit ve paralel. Aynı şey şunlar için de geçerli. Şu karşılıklı kenarları düşünecek olursak köşegeni çizeriz. Yine Thales'ten burası b ise burası 2b. Şurası da 2b. Sonuçta karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.' diyerek Thales Teoremi ile buradaki durumu ilişkilendirmiştir. Zihnindeki formül imajına göre kenar ve köşegen objeleri arasındaki oranları düşünerek karşılıklı kenarların hem paralel ve hem de eşit olacağı yorumunu yapmıştır.



Şekil 1. Özge'nin 1. Durum Temsili

### 3.1.2. 2.Durum

Özge, oluşturduğu ilk izomorfik görselleştirmesine göre 'Ben bunu biraz daha büyük yapsam... Böyle hiçbir şey anlayamam. Şöyle bir şey çizelim...' diyerek yeniden görselleştirmiş ve somut imajı olarak ifade ettiği şekil üzerinde düşünmeye başlamıştır (Şekil 2). Oluşturduğu altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel olacağını ifade etmiş ve bunun açıklarken 'burada bir şeyi kullanmamız gerekiyor ama...' diyerek ilk durumda düşündüğü dörtgene geri bağlantı yapmıştır. Düşündüğü altıgenle bu dörtgen arasında 'Hani buradaki gibi paralellikleri kullanabilir miyim? Yine Thales'i kullanarak...' diyerek aynı ilişkiyi araştırmaya çalışmış ve 'Şu uzunlukla şu uzunluk arasında bağlantı kurabilir miyim diye düşünüyorum.' demiştir. 'Yine buradaki gibi Thales'in yardımcı olacağını düşünüyorum. Yani buradaki gibi şunların paralel olacağını düşünüyorum...' diyerek ilk dörtgenle aynı çözüm veya sonucu araştırmaya çalışmıştır. Ağırlık merkezi kavramını düşündüğünde zihnindeki formül imajının sonucu olarak '1 e 3 oranında. Yani... şöyle şu kestiği parçanın bir birimi tüm üçgenin kenarı. Şu da b ye 3b oranı. Yani... bir oran var Thales'i kullanarak... Mesela burası k ise burası 3k dir. O zaman paraleldir.' diyerek buradan 1/3 oranını elde etmiştir. Daha sonra oluşacak altıgenin karşılıklı kenarlarının paralel ve eşit olacağı yorumunu yapmıştır.



Şekil 2. Özge'nin 2. Durum Temsili

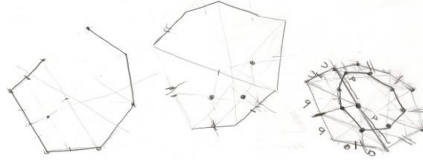
### 3.1.3. 3.Durum

Özge, üçüncü durumda önce zihnindeki somut imajı olan sekizgeni kâğıtta görselleştirme sırasında zorlanmış ve bu durumu 'Sekizgeni nasıl çizeceğim... Anladım ama şekli oluşturamıyorum., Şekli çizemeyince onun üzerinde yorum da yapamıyorum.' diye ifade etmiştir. Düşündüğü sekizgeni birkaç kez çizmeye çalışmıştır. Ancak zorlanınca havada çizerek düşünmeye başlamış ve '4 tane köşeden 1 tane dörtgen oluşur. 1,2,3,4,5,6.' diyerek parmaklarıyla kinestetik imajını ortaya koyarak sekizgeni ve köşelerde oluşacak dörtgenleri sayarak çizmeye çalışmıştır (Şekil 3). Bunu yaparken yine sayısından emin olamamış ve tekrar kağıt üzerinde düşünerek 'Şu bir dörtgen... dörtgenlerden yola çıkarak bir şeyler yaparsak... Şekli tam çizemedim ama, bu şekil üzerinde konuşalım mı?' demiş ve izomorfik görselleştirme yapmıştır (Şekil 4). Elde ettiği sekizgenin karşılıklı kenarlarını düşünürken ikinci durumda düşündüğü altıgene geri bağlantı yaparak aynı ilişkiyi araştırmaya çalışmıştır. 'Yani yapmak istediğim aynı şu altıgen de olduğu gibi. Bir yerde üçgen bulup, kenarların oranlarını bulmak gerek. Oranları kullanarak paralelliği görmeye çalışıyorum.' demiş ve 'altıgende yaptığımızda

*paralel çıktığına göre sekizgende de yaparsak bence paralel diye düşünüyorum. Yani 6 dan 8 e geçerse, paralel çıkacağını düşünüyorum'* diye eklemiştir. Benzer şekilde karşılıklı kenarların eşitliğini düşünme sürecinde ise yine altıgende düşündüğü oranları ele alıp zihnindeki formül imajı ile bu oranlara benzer oranlar elde etmeye çalışmıştır. Böylece önceki durumla aynı çözümü ve sonucu belirlemeye çalışarak araştırma yapmıştır. Bunun sonucunda ise *'Karşılıklı kenarların uzunlukları da birbirine eşit çıkacaktır. Çünkü altıgende yaptığımızda eşit çıktı. Altıgende gördüğüm için böyle düşünüyorum. Altıgende olduğu için sekizgende de olacağını hissedebiliyorum dersek daha iyi olur.'* demiştir. Düşüncelerinden çok da emin olamamış ve *'Sezinleyebiliyorum ama mantıksal olarak göstermek gerekiyor.'* diye eklemiştir.



Şekil 3. Özge'nin 3. Durum Görüntüsü



Şekil 4. Özge'nin 3. Durum Temsili

## 3.2. II.Aşama

### 3.2.1. 4.Durum

Özge, benzer durumların ongen ve onikigen için de geçerli olup olmadığı düşüncesini *'Eğer sekizgen için sezgi yoluyla hissedebiliyorsam ongen için de düşünebilirim.'* şeklinde ifade etmiş ve buradaki durumların orijinalinden daha geniş bir alanda uygulanması sürecine bağlı olarak uygulanabilirlik alanını genişletmiştir. Bunu, *'Ongen için düşündüğümde, sadece sekizgen için değil, ondan önce altıgen için geçerli idi, dörtgen için de yaptık. Karşılıklı kenarlar paralel ve eşit çıktı. Bunu sekizgene genelleştirebilirsek, sekizgen içinde aynı şeyleri söyleyebiliriz.'* şeklinde belirtmiştir. Ayrıca *'Hep çift şeylerden bahsediyoruz burada, 4, 6...'* diyerek alınan çokgenin çift sayıda kenara sahip olması gerektiğini düşünmüş ve yeni durumları ortaya çıkarmak adına elde ettiği düşüncüyü tekrarlayıp devam ettirerek onikigen içinde geçerliliğini ifade ederek genişletme yapmıştır. *'Ongen için... Şimdi altıgen için üçgenler oluşturduk, sekizgen için dörtgenler oluşturduk, ongen için de acaba beşgenler mi oluşturacağız? Bence ongen içinde beşgen oluşturacağız.'* demiş ve genişletme yaparken önceki durumlarla ilgili düşüncelerine paralel olarak örüntü imajını kullanarak aralarındaki ilişkiyi elde etmeye çalışmıştır (Şekil 5).



Şekil 5. Özge'nin 4. Durum Temsili



### 3.3. III.Aşama

Özge, önceki durumda tanımladığı örüntü üzerindeki yorumlamasına göre, '*Karşılıklı kenarları paralel olan ve çift sayıda kenarlı olan geometrik şeklimizde içinde oluşturulan, mesela altıgensen üçgen, sekizgensen dörtgen, yani yarısını aldık, kenar sayısının yarısı kadar oluşturulan geometrik şekillerin ağırlık merkezlerini hesaba katarak ilk başta alınan şeklin içinde oluşturulan geometrik şeklin karşılıklı kenarları birbirine paralel olur ve ayrıca diğer ilk başta alınan şekilden farklı olarak ta eşit olur.*' ifadesini kullanmış ve '*Dörtgen için, altıgen için sekizgen için söyledik. Sonuçta genele doğru gidince  $2n$  için de ben söyleyebilirim.  $2n$  sayıda kenarı olan geometrik şeklimizde, köşelerini hesaba katarak oluşturulan  $n$  kenarlı geometrik şekilde ağırlık merkezlerini hesaba katarak oluşturulan  $2n$  kenarlı geometrik şeklin karşılıklı kenarları birbirine eşit ve paralel olacaktır.*' diyerek düşündüğü genellemenin kuralını elde etmiş ve böylece genel bir prensibe ulaşmıştır. Özge bunu söylerken kinestetik imajı olarak elini havada çokgenin kenarlarını çiziyormuş gibi hareket ettirmiştir (Şekil 6). Daha sonra sezgisel olarak elde ettiği genellemeyi tanımlamıştır.



Şekil 6. Özge'nin 3.Aşama Görüntüsü

## 4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, matematiksel genelleme sürecinde görselleştirmenin yeri ve önemi araştırılmıştır. Genelleme sürecine bir bütün olarak bakıldığında izomorfik görselleştirmenin kullanıldığı ve bunu ise bu sürecinin ilk seviyeleri olan ilişkilendirme ve araştırma sırasında yapıldığı görülmüştür. Genelleme adımlarının ikinci seviyesi olan genişletme sürecinde yerel genelleştirme yaparken katılımcılardan birisi gerek duymadığından, diğeri ise bu tür tecrübelerle sahip olmadığından görselleştirme kullanmamışlardır. Sözü edilen ikinci katılımcı ise düşüncelerini cebirsel işlemlerle de desteklememiş ve bu durum düşüncelerinden emin olamamasına sebep olmuştur. Genelleştirme adımlarının üçüncü seviyesinde olan refleksiyon genellemelerinde ise katılımcıların global genelleştirmeler yaparken görselleştirme kullanmaya gerek duymadıkları ortaya çıkmıştır. Sonuçta yapılan görselleştirmelerin, katılımcıların çoğunlukla süreci tamamlamalarında önemli bir yere sahip olduğu görülmüştür.

Süreç içinde katılımcılardan bazıları öncelikle sezgisel (informal) olarak düşüncelerini açıklamışlar ancak, daha sonra görselleştirerek bu düşüncelerinin yanlış olduğunun farkına varmışlardır. Bu durum Vinner'ın (1997) bazı durumlarda sezgisel şekildeki düşüncelerin bizi sadece yanlış şekilde yönlendireceği fikrini vurgulamakta, yanlış olan düşüncelerini görsel şekilde tamamlamaları ise süreç içinde görselleştirmenin önemini göstermektedir. Genelleme sürecine bütün olarak bakıldığında katılımcıların çoğu görselleştirme kullandıkları adımlarda genellikle çözüme görsel olarak başlamışlar daha sonra ilişkiler içinde cebirsel işlemlerle devam etmişlerdir. Bazen kullandıkları görselleştirmeyi cebirsel olarak doğrulanmadan sürece devam etmişler. Bu durum ise Arcavi'nin (2003) her zaman güvenilir olmayan görsel tekniklerin, analitik tekniklerden bilişsel olarak daha destekleyici olduğu fikri ile paralel şekilde düşünülebilir.

Katılımcılar en çok somut imajlarına yer vermişler ve bunlar çoğunlukla kavramların zihinlerde oluşturduğu resimleri anlatan görüntüler şeklinde olmuştur. Bu zihinsel resimler katılımcıların kimi zaman iki ya da daha fazla mevcut obje arasındaki benzerliklerin bir

çağrışımını yaparken süreç içinde objelerin ilişkilendirilmesinde, kimi zaman iki veya daha fazla obje arasındaki sabit ilişkiyi belirlemek için aynı ilişkiyi araştırma süreci içinde ortaya çıkmıştır. Somut imajlar katılımcıların görselleştirmelerinde önemli bir paya sahip olduğundan, kavramla ilgili net bir somut imaja sahip olanlar görselleştirme konusunda daha başarılı olmuşlardır. Net bir somut imaja sahip olmayan katılımcılar ise düşüncelerinden emin olamamışlardır. Katılımcılardan yanlış somut imaja sahip olan kişi olmamıştır.

Katılımcıların çoğunlukla ortaya koydukları ikinci imaj ise zihinlerinde canlandırdıkları formül imajları olmuştur. Bu durum, yapılan eylemlerin sonucunun her zaman geçerli olup olmadığını belirlemek için aynı çözümün veya sonucun araştırılması sırasında ortaya çıkmıştır. Bu imaj iki ya da daha fazla durum arasında çağrışımı kurmak için durum ile ilişkilendirme sürecinde de ortaya çıkmıştır. Katılımcılar süreç içinde düşüncelerinin devamını sağlamak adına aynı ya da benzer oranlar elde etmeye çalışmışlar ve formül imajını net şekilde ifade edemeyen katılımcılar düşüncelerinden emin olamamışlardır.

Ben-Chaim, Lapan & Houang (1989) induktif, dedüktif ve orantılı muhakemenin gelişiminde görselleştirmenin rolünü vurgulamış ve belirli durumlardaki gözlemlerin bir örüntüsünden yapılan genellemeyle oluşturulan bir süreçte induktif muhakemenin temel bileşen olduğundan bahsetmişlerdir. Yapılan araştırmada sürece bütün olarak bakıldığında genellenimin gelişiminde adayların farklı görsel imajlara sahip olmalarının, görselleştirmeleri daha fazla kullanmalarına neden olduğu sonucu elde edilmiştir. Böylece sezgisel anlamda sahip oldukları düşüncelerini görsel imajları ile bütünleştirerek bunları görselleştirmişler ve ileriki adımlardaki düşüncelerinin muhakemesinde kullanmışlardır. Burada ortaya çıkan bu durum Ben-Chaim ve ark.'nın düşüncelerine paralel şekilde gerçekleşmiştir.

Matematik eğitiminde genelleme süreçlerinin düzgün yapılması, bunun için de kavramlar ve aralarındaki ilişkilerin bilinçli şekilde yerleştirilmesi gerekmektedir. Araştırmanın sonucu bunun gerçekleşmesinde görselleştirmenin önemli bir rolünün olduğu şeklindedir. Dolayısıyla, matematik derslerinde öğrencilerin görselleştirme yetilerinin geliştirilmesine yönelik etkinliklere ve görsel düşünmelerine fırsat verilmesi yerinde olacaktır. Öğrenciler kavramlarla ilgili resimsel betimlemeleri kullanması konusunda teşvik edilirse, genellenen kavramlarla ilgili görsel imaja sahip olup olmadıkları, eğer sahiplerse bu imajın doğruluğu veya yanlışlığı daha iyi anlaşılabilir ve böylece kavramın doğru yapılması sağlanabilir. Genellenen kavrama dair net bir imaja sahip olunmayan veya yanlış imaja sahip olunan durumlarda da uygun görseller kullanılarak süreç desteklenebilir.

Öğretmenlerin kavramlarla ilgili görselleri kullanırken veya temsilleri oluştururken duyarlı olmaları, öğrencileri alakasız detaylarla bağlayıp, yanlış imaj oluşumuna neden olmamaları için bir imajın veya bir diyagramın birebir somut şekilde verilmemesine dikkat etmeleri yerinde olacaktır. Bu durum, standart biçimde verilecek şekil veya diyagramın içinde farkına varılması istenen kavramın algılanmasını engelleyen, esnek olmayan düşünceleri beraberinde getirebileceğinden, kavramların görselleştirmelerle desteklenmesi sürecinde dikkatli olunması gerekebilir.

Öğrencilerin karşılaştıkları önemli zorlukların, genelleme sürecinin ilişkilendirme ve araştırma aşamasında ortaya çıktığı dikkate alındığında, kullanılacak uygun görselleştirmelerin kullanımının özellikle süreçlerdeki bu boşlukları tamamlamada faydalı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca görsel imajlar olarak çoğunlukla somut imajlara başvurulduğu sonucu ele alındığında, seçilecek görsellerin bu imajları desteklemesi, sürecin gelişiminde olumlu etkilere neden olabilecektir.

## 5. KAYNAKLAR

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Ben-Chaim, D., Lapan, G., & Houang, R.T. (1989). The role of visualisation in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11 (1)*, 49-60.
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus On Learning Problems In Mathematics*, 11 (1), 7-16.
- Davydov, V. V. (1990). Types of generalisation in instruction: logical and phsycological problems in the structuring of school curricula. In: J. Kilpatrick (Ed.). *Soviet studies in mathematics education*, (2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 26 (4), 109-113.
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of The Learning Sciences*, 16 (2), 221–262.
- Garcia-Cruz, J. A., & Martinon, A. (1998). Levels of generalizations in linear patterns. *Proceeding of the 22 nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 329-336.
- Guzman, M. (2002). *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. Paper presented at the Proceedings of the 2 nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Greece.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two side of the coin. *Focus on learning Problems in Mathematics*. 11 (1), 61-76.
- Krutetski, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Mitchelmore, M. (2002). *The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge*. Paper presented at the 2nd Proceeding of The East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Singapore.
- Piaget J. (1970). *The Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge & Keeegen Paul Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Resoning: Induction and Analogy in Mathematics* (2nd. Ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Presmeg, (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.
- Presmeg (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies In Mathematics*, 23, 595-610.
- Presmeg, (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Malwah, NJ: Erlbaum.
- Schramm, (1971). *Notes on Case Studies of Instructional Media Projects*, Working paper for the Academy for Educational Development, Washington, DC.
- Skemp (1986), *The Pphysiology of Learning Mathematics* (2nd. Ed.). Harmondsworth: Penguin Press
- Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, unframes and the formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 205-222.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research*. Thousand Oaks, London & New Delhi: Sage Puplication.
- Stylianou, D.A., & Silver, E.A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353-387.
- Villiers, M. (2007). A hexagon result and its generalization via proof. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4 (2), 188-192.
- Vinner, S. (1997). *From intuition to inhibition – Mathematics, education and other endangered species*. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of The International Group for the Phsycology of Mathematics Education*. (1), 63-78.
- Wheatley, G. (1998). Imagery and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2), 7-16.

- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Nitel Araştırma Yöntemleri*, Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, R., Argün Z., & Keskin, M. Ö. (2009). What is the role of visualization in generalization processes: The case of preservice secondary mathematics teachers. *Humanity and Social Sciences Journal* 4 (2) , 130-137.
- Yin R. K. (2003). *Case Study Research, Designs and Methods*. (3rd Ed.). California: Sage Publications.
- Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies a study of students' understanding of the group D4, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 435-437.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991) *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

### Extended Abstract

Mathematical thinking involves identifying mathematical concepts and establishing a relationship between them. Generalizations are important processes in building these relationships during mathematical thinking. Also, the valid mental image which represents this relationship has a key position. So, we thought to study about visualizations which can be seen as a different aspect to construct these images significantly.

In this study we aimed to search the visualization and its importance in mathematical generalization process. To do this, we first formulated instructions that are appropriate for generalizing and then determined the visualizations used by the participants, how they established these, what kind of visual images they had. The study employed case study technique which was a quantitative research method. Classroom observations and semi-structured interviews were data collection methods. The study was performed in two steps consisting of a pilot and main research. The pilot study was carried out with 13 participants selected from 24 undergraduate students during the Fall term in 2008-2009. The main research was conducted with 5 participants selected at the end of the pilot study. The collected data were coded and content analysis was performed to identify and search out the hidden reality by clustering the similar data around the certain concepts and themes.

In this study, the participants applied to the visualizations in their first three stages of generalizations. They needn't to visualize in the other stages. When we take their generalization levels into considerations, visualizations were occurred in relating and searching processes in level-1. The participants visualized isomorphically and used these visualizations as procedural activities in first level of generalizing actions. This situation set forth the importance of visualization on setting out the generalization and building a one to one relation. There were 15 isomorphic visualizations. 5 of them were in process of relating objects and 10 of them were in process of searching for the same relationship. They had concrete, pattern, kinesthetic and memory imagery of formulae as visual images in different places and there is no stage without any visual images. There were 33 visual images. %46 of them were concrete, %33 of them were memory imagery of formulae, %18 of them were kinesthetic, %3 of them were pattern imagery. They set forth %34 of them during searching for the same relationship, %30 of them during searching for the same solution or the result, %15 of them during relating objects, %15 of them during relating situations, %3 of them were during extending with continuing and %3 of them were during definition processes.

The event of having mostly concrete imagery and visualizing their intuitive ideas by integrating visual images had an important role on reasoning of advancing ideas. Concrete images generally emerged as scenes that represent pictures related to concepts in the minds of the participants. They emerged them mostly during searching the same relationship and during relating objects. And visualizations provided them to continue this process surely when their concrete images about the concept and the relations between these concepts were blurred. Also these visualizations provided them some improvements during the searching for the same solutions and their extending processes in generalization.

The formulae images, which the participants visualized in their mind, emerged primarily during searching the same solution and result and during relating situations. Given that most of the participants felt the necessity to support their ideas algebraically even if they used visualization within the process, this situation stimulated uncertainty in expressing opinions for the participants who were lacking in formulae

images. By contrast, the participants who had a clear formulae image carried on with the process more confidently.

In mathematical education, it is necessary to construct the generalization process properly. To do this, concepts and their relations between them must be constructed consciously. When we take care the results for the importance of the visualization, it will be appropriate to admit of the activities for the improvement of their abilities about visualization and visual thinking and also to encourage them for their representations about the concepts.

When it is taken into consideration as a result that important difficulty which the students encounter emerge during relating and searching in generalization process, it has been thought that the usage of appropriate visualizations will be especially beneficial to fill this gap in the process. Moreover, when we consider the conclusion of concrete are the most commonly used images among all visual images, visuals' support of these images will be able to lead to positive effects to the development of the generalization process.

---

### **Kaynakça Bilgisi**

Yılmaz, R. ve Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [Hacettepe University Journal of Education]*, 28(2), 564-576.

### **Citation Information:**

Yılmaz, R., & Argün, Z. (2013). Visualization in the mathematical generalization process and its importance [in Turkish]. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [Hacettepe University Journal of Education]*, 28(2), 564-576.