Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 43: 01-13 [2012]

5-8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ARİTMETİKTEN CEBİRE GEÇİŞ SÜREÇLERİNİN PROBLEM ÇÖZME BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

EXAMINATION OF THE 5th – 8th GRADE STUDENTS' TRANSITION PROCESS FROM ARITHMETIC TO ALGEBRA WITH REGARD PROBLEM SOLVING

Yaşar AKKAN*, Adnan BAKİ**, Ünal ÇAKIROĞLU***

ÖZET: Aritmetikten cebire geçiş sürecinde farklı problem çeşitleri ile ilgili çözüm stratejilerini kullanma becerilerinin öğrencilere kazandırılması, öğrencilerin ilköğretimin ikinci kademesi ile birlikte soyutlaşan matematiği kavrayabilmelerine ve cebirsel düşünmelerine katkı sağlamaktadır. Bu nedenle Türkiye'de yeniden yapılandırılan ilköğretim matematik öğretimi programında öğrencilerin farklı problem çeşitleri ile ilgili çözüm süreçlerinin aritmetikten cebire geçiş süreci açısından irdelenmesi önemlidir. Bu çalışmanın amacı; 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreci boyunca problem çözme süreçlerindeki farklılaşmaları değişim ve gelişim açısından incelemek ve karşılaştırmaktır. Gelişimci araştırma yöntemiyle yürütülen bu çalışma, Trabzon ilindeki bir ilköğretim okulunda öğrenim gören 24 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Veri toplama araçları literatür desteğiyle hazırlanan aritmetik-sözel ve cebirsel-simgesel problemlerdir. Elde edilen veriler, aritmetik, cebir-öncesi ve cebirle ilgili özellikleri içeren karakterizasyon tablolarına göre değerlendirilmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin öğrenim seviyesi arttıkça aritmetik çözümlerden cebirsel çözümlere olan geçiş olumlu yönde değişmek ve gelişmekle birlikte, bu değişim ve gelişim çok az olmuş, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler genel olarak aritmetik çözümleri kullanmışlardır.
Anahtar sözcükler: aritmetikten cebire geçiş, problem çözme, stratejiler, 5-8.sınıf

ABSTRACT: The different grade students' problem solving process takes an important place in the primary school mathematics curriculum mathematics is getting abstract in the second level of primary school. So it is important to examine the different problem solving strategies of students in through transition from arithmetic to algebra according to the new primary school mathematics curriculum in Turkey. So the aim of this study is to investigate the development and the change of problem solving processes on transition process from arithmetic to algebra about 5-8 grade students. The study is conducted by development research methodology at a primary school in Trabzon with the participation of 24 students. The data gathering tools are problems in arithmetic-verbal and algebraic-iconic forms which are developed by the literature support. The data gathered from students are analyzed through the characterization tables which includes arithmetic, pre-algebraic and algebraic characteristics. As a result, by the increase of the students' grades their solutions changed and improved from arithmetic to algebraic, but this change was very little. As well as the different grade students generally used arithmetic solutions for given two problems, only a few students used algebraic and pre-algebraic solutions.
Keywords: transition from arithmetic to algebra, problem solving, strategies, 5-8.grade

1. GİRİŞ

Öğrencilerin anlamlı öğrenmeleri; bilgiyi farklı ortamlarda uygulayabilmeleri, kavramlar arası ilişkileri kurabilmeleri, kavramsal ve işlemsel bilgiyi ilişkilendirebilmeleri, öğrenme alanları arasında ilişki kurabilmeleri ve bilgiyi çeşitli temsil biçimlerine dönüştürebilmeleriyle yakından ilgilidir. Özellikle öğrencilerin öğrenme alanları- "aritmetik (sayılar)" ile "cebir" öğrenme alanları - arasında ilişki kurabilmeleri üst düzey beceri olan ilişkilendirme becerisi için önemlidir. Çünkü matematiksel kavramlar birbirleriyle bağlantılı olduğundan, bu bağlantılarda olabilecek kopmaların ileri matematiksel kavramların öğreniminde zorluklara yol açabileceği bilinmektedir (Swadener &Soedjadi, 1988). Bu bağlamda, aritmetikle cebir farklı doğalara sahip olmalarına karşın aritmetikle cebir arasında kuvvetli bir zincir halkası vardır (Kieran, 1992; Van Amerom, 2002). Genellikle aritmetikten cebire geçiş, aritmetik ve cebir öğretimi sırasında kendiliğinden gerçekleşmez. Öğrenciler cebirsel fikirleri ile daha önceki yaşantılarında geliştirdikleri aritmetik fikirleri ilişkilendirir (Herscovics & Linchevski, 1994). NCTM standartlarında aritmetik ile cebir arasındaki ilişkiye yönelik bu husus: "*İlköğretim ikinci kademe (ortaokul) matematik müfredatı, somut ilköğretim birinci kademe matematik*

* Yrd. Doç. Dr., Gümüşhane Üniversitesi, akkanyasar61@hotmail.com
** Prof. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, abaki@ktu.edu.tr
*** Yrd. Doç. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, cakiroglu@ktu.edu.tr

müfredatı ile soyut lise matematik müfredatı arasındaki bir köprüdür. Burada en önemli geçişlerden biri aritmetik ile cebir arasındaki geçiştir. Bu nedenle 5-8 sınıflarda öğrenciler, daha sonra çalışacakları soyut cebir için bir temel oluşturabilecek cebirsel kavramları informal bir yolla alırlar… (NCTM,1989: s.102)" şeklinde ifade edilmektedir. Literatürde de öğrencilerin cebirle ilgili fikirlerini aritmetikle ilgili daha önceki deneyimlerinden yola çıkarak yapılandırdıklarına dair birçok araştırmaya rastlamak mümkündür (Booth, 1988; Cortes et al., 1990; Kieran, 1992; Kieran & Chalouh, 1993; Hersovics & Linchevski, 1994; Sfard & Linchevski, 1994; Sfard, 1995; Linchevski, 1995; Cooper et al., 1997; Van Amerom, 2002). Wagner'e (1983) göre, öğrencilerin cebirsel işlemleri ve yapıları anlamakta zorlanmalarının nedeni, aritmetiğin temel kavramı olan sayı kavramını iyi bir şekilde kavrayamamalarından kaynaklanmaktadır. Van Amerom (2002) aritmetiğin temelini sayı kavramının oluşturduğunu ve cebirin ise kökünü aritmetikten aldığını ifade etmiştir. Carpenter ve Levi (2000) erken yaşlarda öğrencilerin aritmetiğin önde gelen yapı ve özellikleriyle ilgili genellemeleri doğrulamayı ve yapmayı öğrenmelerinin cebirle ilgili birçok temelin oluşmasına katkı sağlayacağına vurgu yapmışlardır.

Cebir aritmetikten köklerini almakta ve güçlü bir aritmetik temele dayanmakta iken aritmetik de sembolleştirme, genelleştirme ve cebirsel düşünme için gerektiğinden fazla fırsatlar sunmaktadır. Fakat araştırmacılar öğrencilerin bu iki bilgi türü arasındaki farklılıkları- örneğin; sözdizimsel (Lodholz, 1993), stenografi (alfabenin harfleri, noktalama işaretleri, kelimeleri yerine semboller ve kısaltmalar kullanma) olarak harfleri kullanımı (Booth, 1988), manipülasyonlar (Booth, 1984), bilinmeyenler (Filloy ve Rajono, 1989) ve eşitlik (eşittir işareti) (Wagner ve Parker, 1993) vb. farklılıklar- birleştirmede başarısız olduğunu belirtmişler ve bununda öğretimde bilişsel boşluğa veya öğretisel araya neden olduğunu iddia etmişlerdir (Booth, 1988; Hersovics, 1989; Wagner ve Kieran, 1989; Kieran, 1990, 1992; Sfard, 1991; Hersovics ve Linchevski, 1994; English ve Halford, 1995; Rosnick, 1999). Nitekim aritmetikle cebir arasında bilişsel boşluk veya öğretisel ara olarak tanımlanan bu boşluk cebirsel kavramların gelişiminde öğrencilere engeller ve zorluklar (genel olarak; problem çözme sürecinde: sözel ifadeyi denkleme dönüştürme ve çözme aşamasında, genelleme yapma: örüntüleri genelleme, sembollerin kullanımı: eşittir işareti, parantez kullanımı vb., harflerin anlamı. nesne, bilinmeyen, değişken vb.) yaratmaktadır (Booth, 1988; Filloy ve Rojano, 1989; Sfard, 1994; Herscovics ve Linchevski, 1994; Williams ve Cooper, 2001). Örneğin, Wagner ve Kieran (1989) ve English ve Halford (1995) cebirdeki değişken kavramının aritmetiktekinden farklı olduğunu iddia etmiş ve bu temel farkında eğitimde bir araya neden olduğunu belirtmişlerdir. Benzer şekilde Booth (1988), Linchevski ve Hersovics (1996) ve Cooper vd. (1997) değişkenler ile ilgili anlam geliştirme sürecindeki farklılıkların öğretisel bir araya neden olduğunu iddia etmişlerdir. Booth (1988)**,** Filloy ve Rojano (1989) ve Herscovics ve Linchevski (1994) bilişsel aranın aritmetik denklemleri çözmek için gerekli olan bilgi (sayısal hesaplamalar) ile cebirsel denklemleri çözmek için gerekli olan bilgi (bilinmeyenleri içeren hesaplamalar) arasına yerleştirilebileceğini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda birçok matematik eğitimcisi aritmetik ile cebir arasında var olduğu iddia edilen bu boşluğun üstesinden gelmede "cebir öncesi" evresinin önemli olduğuna vurgu yapmıştır (Filloy ve Rojano, 1989; Kieran, 1992; Lodholz, 1993; Kieran ve Chalouh, 1993; Hersovics ve Linchevski, 1994; Linchevski, 1995; Van Amerom, 2002). Lodholz (1993) aritmetik ile cebir arasında var olan içeriği - ilköğretim birinci kademe aritmetik ile ilköğretim ikinci kademe ve daha üst seviyedeki cebir arasında ki boşluğu inşa edebilecek içeriği- cebir öncesi olarak tanımlamış ve bu bağlamda öğrencileri cebir yolu üzerinde tutmayı sağlayacak olan alanında aritmetik olduğunu ifade etmiştir. Kieran (1991) cebir öncesini, öğrencilerin fiziksel ve aritmetik deneyimleriyle cebiri temellendirerek cebirsel fikirleri inşa ettiği evre olarak tanımlamıştır. Kieran (1992) biraz daha özele indirgeyerek cebir öncesini, sayılar üzerine olan işlemlerden oluşan aritmetik denklemleri çözmek için gerekli olan bilgiden, değişken ve bilinmeyen üzerine yapılan işlemlerden oluşan cebirsel denklemleri çözmek için gerekli olan bilgiye doğru hareket olarak tanımlamıştır. Kieran ve Chalouh (1993) aritmetikle cebir arasında köprü vazifesi gören cebir öncesi kavramını; öğrencilerin mevcut aritmetik ve geometrik bilgilerini kullanmalarına imkan tanıyarak cebirsel kavramları ve prosedürleri informal olarak anlamlandırmalarına fırsatlar sağlayabilmesi süreci olarak tanımlamıştır. Linchevski (1995) ise cebir öncesini, ilköğretim birinci kademe matematiğindeki aritmetik becerilerden, ilköğretim ikinci kademe için gerekli olan cebir becerileri ile daha soyut becerilere geçiş olarak tanımlamıştır. Ayrıca Linchevski (1995) okul cebrinin beş ana bileşenini tanımlamış, (değişkenler ve cebirsel ifadeleri sadeleştirme, genelleştirme, yapı, denklemler, sözel problemler), bu beş bileşenin cebir öncesi etkinlikleriyle geliştirilmesinin daha sonraki cebir öğretimi için hayati önem taşıdığına vurgu yapmış ve cebir öncesini bu beş bileşeni destekleyecek ön kavramların inşaa edildiği alan olarak tanımlamıştır. Van Amerom'a (2002) göre ise cebir öncesi, aritmetik bir ortamda cebirsel akıl yürütmeyi, informal sembolleştirmeyi ve denklem çözümünde ihtiyaç duyulan aritmetik temelleri genişletmeyi ve güçlendirmeyi içermektedir.

Aritmetikten cebire geçiş sürecini inceleyen matematik eğitimcileri çalışmalarında problem çözmeye ayrı bir önem vermişlerdir. Onlar cebir öncesi çözüm stratejilerinin (düşünme-deneme, öğrenci problemde verilenleri ve istenenleri göz önüne alarak mantıksal çıkarımlarla bilinçli denemeler yapar), aritmetik çözüm stratejilerinden (deneme-yanılma, öğrenci her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünmeksizin gelişigüzel sayılarla sonuca ulaşmaya çalışır) cebirsel çözüm stratejilerine (bilinmeyenin birini yok etme, öğrenci bilinmeyenleri içeren ve bilinmeyenlerden birini yok eden düzenli ve etkili hesaplamalar yapar) geçiş yapmaya yardımcı olduğunu belirtmişler ve cebir öncesi stratejilerin öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerini hızlandıracağını ifade etmişlerdir. Özellikle bu araştırmalarda, aritmetikten cebire geçiş sürecinde farklı formatlarda sunulan problem çeşitlerinin (simgesel, sözel, sözel-aritmetik ve sözel-cebirsel gibi…) çözümleriyle ilgili farklı çözüm stratejilerini (aritmetik-deneme ve yanılma, bilinenlerle akıl yürütme, vb. ; cebir öncesi-ters işlem , sistematik deneme-doğrulama, vb.; cebirsel- bilinmeyenlerle akıl yürütme, vb.) kullanma becerilerinin öğrencilere kazandırılması gerekliliğine vurgu yapılmış, bu çözüm stratejilerinin özelliklerini tanımlamayı içeren çalışmalar yürütülmüş ve bu farklı problem ve çözüm stratejilerinin aritmetik ile cebir arasında var olan bilişsel boşluğu doldurmada önemli olduğuna vurgu yapılmıştır (Filloy & Rojano, 1989; Bednarz et al., 1992; Lodholz, 1993; Linchevski, 1995; Stacey & Macgregor, 2000; Van Amerom, 2002; French, 2002; Knuth et al., 2005; Koedinger et al., 2008;Stacey,2008; Baki vd., 2008).

Aritmetik ile cebir arasındaki bu vazgeçilmez ilişki ülkemizdeki matematik öğretim programı hazırlayanların da dikkatini çekmiş MEB tarafından geliştirilen yeni ilköğretim matematik programında bu ilişkiye yer verilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin öğrenme alanları arasında ilişki kurabilmeleri üst düzey beceri olan ilişkilendirme becerisi için önemli olduğu yeni öğrenilen kavramlarla önceden öğrenilen kavramlar arasında bağlantılar kurulması gerektiği vurgulanmıştır. Ayrıca aritmetikten cebire geçiş sürecinde farklı problem çeşitlerinin çözümü ile ilgili farklı çözüm stratejilerini kullanma becerilerinin öğrencilere kazandırılmasının, öğrencilerin ilköğretimin ikinci kademesi ile birlikte soyutlaşan matematiği kavrayabilmelerine, aritmetik ile cebir arasında var olan boşluğun doldurulmasına yani aritmetikten cebire geçişlerine ve cebirsel düşünmelerine katkı sağlamaktadır. Bu durum, yeni ilköğretim matematik programında farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerinin problem çözme süreçleri açısından incelenmesini ve durumun tespit edilip önerilerde bulunulmasını gerektirmiştir.

Bu doğrultuda çalışmanın problemi; "*Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş süreci boyunca problem çözme becerilerinde nasıl bir değişim ve gelişim yaşanmaktadır?*" olarak belirlenmiştir.

2. YÖNTEM

Bu çalışmada farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin gelişimini ve değişimini ortaya çıkarmayı amaçlayan gelişimci araştırmaların bir çeşidi olan "enlemesine" yöntem kullanılmıştır. Enlemesine yürütülen çalışmalarda, aynı konunun bir örneklemle uzun süre çalışılarak gelişim düzeyini ortaya çıkarılması yerine, örneklemin takip edeceği yaşam sürecinde ona eşdeğer olabilecek örneklem üzerinde aynı zamanda çalışmalarda yürütülebilir. Bu şekliyle ne idi-ne oldu gibi sorular tartışılabilmektedir. Bu yolla, bir çalışmayı tamamlamak için aynı örneklemi takip etmek yerine, farklı yıllardaki örneklemlerle çalışılarak araştırma en kısa sürede tamamlanabilir (Çepni, 2007).

2.1. Örneklem

Çalışmanın örneklemini, 2008-2009 eğitim öğretim yılı ikinci yarıyılında Trabzon ilindeki bir ilköğretim okulunda öğrenim gören toplam 24, 5-8. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Klinik mülakatlar için seçilen bu 24 öğrenci Matematik, Türkçe, Rehber öğretmenlerinin ve okul yöneticilerinin tavsiyeleri doğrultusunda, benzer ve farklı sınıflandırmaları temsil edecek şekilde ve başarı durumları dikkate alınarak seçilmiştir. Başarı durumunun dikkate alındığı seçme aşamasında, öğretmenden öğrencilerin bir yıl önceki matematik dersinden aldığı notlar ile SBS notları istenmiştir. Daha sonra bu öğrenci notları ve puanlarına göre örneklem üç gruba ayrılmıştır. Ayrıca düşüncelerini rahatlıkla ifade etme becerisine sahip ve çalışmaya katılmaya gönüllü öğrenciler tercih edilmiştir. Bu bağlamda araştırmanın yapıldığı örneklem Tablo 1 deki gibidir.

Tablo 1: Çalışmanın Örneklemi

		Zayıf	Orta	İyi
Sınıflar	5.Sınıf	2 (Ö1$_{5}$, Ö2$_{5}$)	2 (Ö3$_{5}$, Ö4$_{5}$)	2 (Ö5$_{5}$, Ö6$_{5}$)
	6.Sınıf	2 (Ö7$_{6}$, Ö8$_{6}$)	2 (Ö9$_{6}$, Ö10$_{6}$)	2 (Ö11$_{6}$, Ö12$_{6}$)
	7.Sınıf	2 (Ö13$_{7}$, Ö14$_{7}$)	2 (Ö15$_{7}$, Ö16$_{7}$)	2 (Ö17$_{7}$, Ö18$_{7}$)
	8.Sınıf	2 (Ö19$_{8}$, Ö20$_{8}$)	2 (Ö21$_{8}$, Ö22$_{8}$)	2 (Ö23$_{8}$, Ö24$_{8}$)

2.2. Veri Toplama Araçları

Veri toplama araçları, literatür ve öğretmen desteğiyle hazırlanan ve farklı seviyelerdeki öğrencilerin çözüm üretebildiği, birçok stratejinin işe koşulabildiği hatta yeni stratejilerin geliştirebildiği aritmetik-sözel ve cebirsel-simgesel (iconic) iki problemden oluşmaktadır. Bu problemler ve özellikleri Tablo 2 de sunulmuştur.

Tablo 2:Problemlerin İçerikleri ve Özellikleri

	Problemin İçeriği	Problemin Özelliği
1.Problem	Bir çiftlikte inek, koyun ve atlardan oluşan 140 hayvan bulunmaktadır. Çiftliklerdeki koyunların sayısı ineklerin sayısının 2 katı, atların sayısı da koyunların sayısından 20 eksiktir. Çiftlikte 44 at olduğuna göre inek ve koyunların sayısı kaçtır?	Aritmetik-sözel: Problem metninde en az bilinen bir niceliğin olduğu problemdir.
2.Problem	$\square + \bigcirc = 200$ $\square - \bigcirc = 68$ Kare kart üzerindeki sayıyı bulunuz.	Cebirsel-simgesel (iconic): Problem metninde bilinen bir niceliğin olmadığı simgesel bir problemdir.

Hazırlanan veri toplama aracında bulunan problemlerin ölçme amacına uygun olup olmadığı, ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği “uzman görüşüne” göre saptanır (Karasar, 1995). Bunun için, önce bir grup uzman tarafından ölçme amaçları ve bu amaçların gerektirdiği içerik çözümlemeleri yapılarak hazırlanmış, problemlerin bu amaçları ve içeriği temsil edip edemeyeceği tartışılmıştır. Bu amaç doğrultusunda hazırlanan problemler üç matematik öğretmenine ve iki matematik eğitimcisine gösterilerek önerileri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Bu açıdan hazırlanan soruların dil, seviye ve kapsam geçerliliği sağlanmıştır. Bu, araştırma sırasında ya da araştırmanın sonucunda birden fazla araştırmacının araştırılan konuyu incelemesini içerir. Veri toplama araçlarının güvenirliği için öğrencilerin klinik mülakat verileri ve kağıt üzerindeki çözümlerinden rastgele yarısı alınmış ve araştırmacı ile başka bir araştırmacı tarafından karakterizasyon tablolarındaki göstergelere göre kodlamalar yapılmıştır. Yapılan kodlamalar sonucunda iki araştırmacı arasında %79 uyum çıkmıştır. Bununla birlikte öğrencilerin süreç boyunca ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmak için öğrencilerle klinik mülakatlar yürütülmüştür. Bu mülakat türünün esas amacı; bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Zazkis & Hazzan, 1999).

2.2. Verilerin Analizi

Elde edilen veriler literatür destekli hazırlanan ve aritmetik, cebir öncesi ve cebirle ilgili özellikleri içeren Tablo 3 deki karakterizasyon tablosuyla ve Van Amerom (2002) tarafından geliştirilen yöntemle değerlendirilmiştir.

Tablo 3: Problem Çözme ile İlgili Üç Alanı İçeren Göstergeler

	Göstergeler
Aritmetik	• Aritmetik gösterimlerle aritmetik akıl yürütme • Bilinenlerden bilinmeyenleri bulma, bilinmeyenleri çözüm süreci dışında tutarak sayılarla işlem yapma • Problem metnindeki bilinen sayılarla akıl yürütme ve bilinmeyenleri son nokta olarak alma • Çözüme ulaşmak için art arda doğru sayısal hesaplamalar yapma • Genel amaç, sayısal bir sonuç bulmadır • Sonuç için gelişigüzel deneme-yanılma, deneme-uyarlama gibi aritmetik çözüm stratejilerini kullanma • Problem durumlarındaki ara ürünlerle sonuçları yorumlama • Harfleri ölçüm etiketleri(metre için m) veya somut bir objenin kısaltılımışı (elma için e) olarak kullanma ve harfleri önemsememe ve yorumlamama
Cebir Öncesi	• Aritmetik gösterimlerle cebirsel düşünme veya cebirsel gösterimlerle aritmetik düşünme • Problem çözümü için ihtiyaç duyulan aritmetik temelleri veya işlemleri bilinmeyenlere genişletme • Bilinmeyenlerle kısa süreli çalışma ve bilinmeyenleri terk ederek aritmetik yollarla çözüme ulaşma • Sonuç için sistematik düşünme-deneme, ters-işlem alg. gibi cebir-öncesi çözüm stratejilerini kullanma • Bilinmeyenlerin problem durumuna göre değişkenlik göstermesi. • Harflerin informal kullanımı (nesnelerin ilk iki veya daha fazla harfini kullanma) • Eş zamanlı olarak harfleri bir nesnenin kısaltılmışı ve o nesnenin çokluğu veya miktarı olarak düşünme (elma için kullanılan e harfinin hem nesnenin kısaltması hem de çokluğu (miktarı) olduğunu eş zamanlı düşünme)
Cebir	• Cebirsel gösterimlerle cebirsel akıl yürütme. • Bilinmeyenlerle akıl yürütme, başlangıç noktası olarak bilinmeyenleri alma. • Bir veya daha fazla bilinmeyenli denklem sistemleri oluşturama ve çözme. • Bilinmeyenleri çözüm sürecinin ilk aşamasından son aşamasına kadar çözüm sürecinin içinde tutma yani çözüm sürecinde sembolün kendisi işlem yapılan nesnedir. • Problemin çözümünde art arda bağlantılı eşitliklerle çözüme gitme. • Genel amaç ilişkileri ve işlemleri genelleştirme. • Problem çözümünde sabit bilinmeyenler çalışma (bilinmeyenler durağandır). • Problem durumlarındaki ara ürünlerle sonuçlar yorumlayamama. • Harfleri bilinmeyen, genel sayılar(a+b=b+a), parametre ($y=ax^2+bx+c$) ve değişken ($y=2+x$) olarak düşünme.

Yukarıdaki karakterizasyon tablosuna ek olarak, veri analizinde yararlanılan diğer bir yöntem ise Van Amerom (2002) tarafından geliştirilen ve her bir öğrencinin hangi seviyede olduğunu analiz etmede kullanılan aşağıdaki yöntemdir. Bu yöntemdeki "akıl yürütme" öğrencilerin zihinsel süreçlerinden (bilinenlerin veya sabit niceliklerin kullanımı (aritmetik akıl yürütme) , nicelikleri karşılaştırarak informal akıl yürütme (cebir öncesi), daha formal bir seviyede bilinmeyenlerin veya değişkenlerin kullanımı (cebirsel akıl yürütme) söz eder. Şekil 1 de sunulan bu yöntemdeki bu özelliklerden yola çıkarak her bir öğrencinin hangi seviyede olduğu analiz edilebilmektedir.

Cebirsel akıl yürütme	+	Cebirsel (cebir öncesi) sembolleştirme	=	CEBİR
Cebirsel akıl yürütme	+	Aritmetiksel notasyonlar	=	CEBİR ÖNCESİ
Aritmetiksel akıl yürütme	+	Cebirsel (cebir öncesi) notasyonlar	=	CEBİR ÖNCESİ
Aritmetiksel akıl yürütme	+	Aritmetiksel notasyonlar	=	ARİTMETİK

Şekil 1: Problem Çözümlerini Karakterize Eden Yöntem (Van Amerom, 2002).

3. BULGULAR

Bu bölümde, her iki problem ile ilgili 5-8.sınıf öğrencilerinden elde edilen veriler sırasıyla aritmetik, cebir öncesi ve cebirsel çözüm olma durumlarına göre ayrılmıştır.

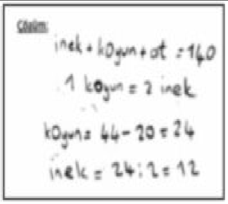
3.1. Aritmetik Çözümler

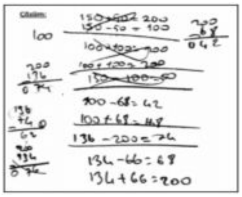
Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin iki probleme ait aritmetik çözümlerle ilgili yüzde ve frekans dağılımları ile öğrencilere ait çözüm ve mülakat örnekleri Tablo 4 de verilmiştir.

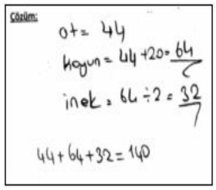
Tablo 4: İki Probleme Ait Aritmetik Çözümlerle İlgili Öğrenci Dağılımları ve Frekanslar ile Örnek Öğrenci Çözümleri ve Mülakatlar

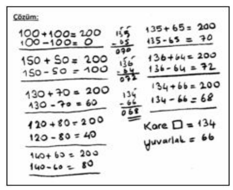
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)
1.Problem	Ö1_5,Ö2_5, Ö3_5, Ö5_5	4 (%67)	Ö7_6, Ö8_6, Ö9_6, Ö10_6, Ö11_6	5 (%83)	Ö13_7,Ö14_7 Ö15_7,Ö16_7	4 (%67)	Ö19_8,Ö20_8 Ö21_8,Ö22_8	4 (%67)
2.Problem	Ö1_5,Ö2_5, Ö3_5, Ö5_5	4(%67)	Ö7_6, Ö8_6, Ö9_6, Ö10_6	4 (%67)	Ö13_7,Ö14_7, Ö15_7	3 (%50)	Ö19_8,Ö20_8, Ö21_8	3 (%50)

ARİRMETİK ÇÖZÜMLER

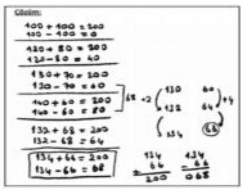




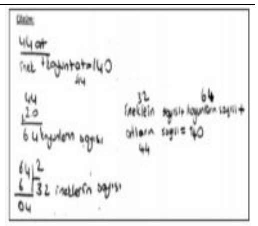




Ö21_8: Sayıların ikisini de 100 alalım… [A:Niçin?].Çünkü bu soruyu çözmek için sayılarla denemeler yapacağım, ondan 100 sayısı ile başladım işlem yapmaya… 100 sayısını alırsak toplamları 200 olur. Çıkarırsak 0 olur. Olmuyor… O halde sayıyı 20 artıralım, biri 120 diğeri 80 olur. Bu sayıların toplamı 200 farkları ise 40 olur… Demek ki 120 de artırmalıyız… 130 sayısını deneyelim. 130 ile 70 olur. Farkları 60 olur… Olmadı… 140 alalım. Diğeri 60 olur. 140 ile 60 çıkarırsak 80 olur. Olmadı... 132 sayısını deneyelim…[A: Devamlı sayıları artırarak deneme yapıyordun. Niçin 140'dan bir anda 132 sayısına dönüş yaptın?]… 68 sayısı 60 ile 80 arasında olduğundan sayıların büyüğü 130 ile 140 arasında olmalı… 132 ile 68'in toplamı 200 farkları ise 64 olur... 130 dan 132 iki artma olurken 60'dan 64'e 4 artma oldu. Fark 68 olacağından sayının biri 134 olmalı.



Ö9_6:Öğretmenim bir çiftlikte üç farklı hayvan var. Bunlardan atların sayısını biliyoruz: 44. Diğer hayvanların sayısını da atların sayısından yararlanarak bulabiliriz. [A: Nasıl?]



Ö9_6: Çiftlikteki hayvanların sayısı 140 dır. Atların sayısı koyunların sayısından 20 eksik ise 44 ile 20 toplamalıyız. O halde koyunların sayısı 64 olur. Koyunların sayısını da ikiye bölersek ineklerin sayısını buluruz… Demek ki ineklerin sayısı da 32 oluyor. Soruyu doğru yapıp yapmadığımızı kontrol etmek için 44, 64 ve 32 toplayalım. 140 oluyor. Zaten çiftlikte toplam 140 hayvan vardı…

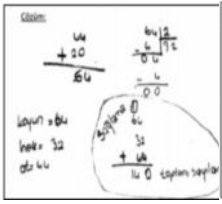
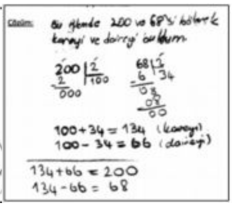
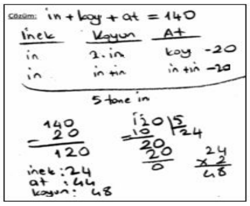
Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilere ait verileri içeren Tablo 4 incelendiğinde 5.sınıf öğrencilerinden dört (%67), 6.sınıf öğrencilerinden beş (%83), 7 ve 8.sınıf öğrencilerinden de dörder (%67) öğrenci, birinci problemin çözümünde aritmetik çözümler kullanmıştır. Tablo 5'teki örnekte verilen 5 ve 6.sınıf öğrencilerinden dörder (%67), 7 ve 8.sınıf öğrencilerinden de üçer (%50) öğrenci ikinci problemin çözümünde aritmetik çözümler kullanmıştır. Ö9_6 öğrencisi her iki problemde de bilinen sayılarla akıl yürüttüğünü bilinmeyenleri ise çözüm sürecinin dışında tutarak onları dikkate almadığını göstermiştir. Öğrenci cevaba doğru çalışarak bilinmeyen miktarları sürecin sonunda ortaya çıkarmıştır. Bu nedenle Ö9_6 öğrencisinin çözümleri aritmetiktir. Benzer şekilde Ö1_5, Ö3_5 ve Ö14_7 öğrencileri de Ö9_6 öğrencisi gibi problemlerde bilinenler arasında ilişki kurarak ve onlarla akıl yürüterek, bilinmeyenleri ise çözüm sürecinin dışında tutarak sonuca ulaşmaya çalışmışlar yani bilinenlerden yararlanarak bilinmeyenleri elde etmeye odaklı aritmetik çözümleri tercih etmişlerdir. Ö21_8 öğrencisi ise her bir denemede bir önceki denemesindeki hatasını düşünerek kendisini çözüme yaklaştıran denemeler ve uyarlamalar yapmış ve böylece her bir deneme öğrenciyi çözüme yaklaştırmıştır. Öğrenci bu çözümlerinde sayılar arasındaki ilişkiyi dikkate alarak aritmetik akıl yürüttüğünden ve aritmetik gösterimleri (sayı hesaplamalar) kullandığından öğrencinin çözümü aritmetiktir. Aynı şekilde her iki problemin çözümünde Ö10_6, Ö13_7 ve Ö20_8 öğrencileri de Ö21_8 öğrencisine benzer çözümler kullanmışlardır. Ö19_8 öğrencisi ise gelişigüzel sayılarla bilinmeyenleri bulmaya çalışırken her bir denemesinde bir önceki denemesindeki hatalarını düşünmeyerek gelişi güzel sayısal hesaplamalarla çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Ö2_5 ve Ö7_6 öğrencileri ikinci problemin çözümünde 200 ile 68'in farkı olan 132 sayısını cevap olarak vermiştir. Bu muhtemelen öğrencilerin aritmetik düşünmede ısrar etmesi ile yani öğrencilerin bilinen sayılarla hesap yapması ve bilinmeyen sayıları dışlaması ile ilgilidir. Benzer şekilde Ö5_5 ve Ö15_7 öğrencileri birinci denklemdeki eksi işaretini ikinci denklemdeki artı işaretine göre daha çok tercih etmişlerdir. Yani 200 ile 68 toplamı olan 268 sayısını 132' göre daha az kullanmışlardır. Bu ise öğrencilerin her iki sayının da 200'den küçük olacağı fikrine sahip oldukları ile ilgili olabilir. Ö8_6 öğrencisi ise birinci problemin çözüm sürecinde yürütülen ek mülakattan öğrencinin problem metnindeki kelimeleri ve kelimelerin baş harflerini nesne olarak düşündüğü ve söz dizimsel ifadelerle ilgili hesaplamalarında da hata yaptığı tespit edilmiştir. Bu ise öğrencinin yine aritmetik akıl yürüttüğünün bir göstergesidir. Bununla birlikte aritmetik çözümleri kullanan birkaç öğrenci düşüncelerini açıklamak için sayısal ve söz evresi (kısaltma yapmaksızın kelimelerle ve cümlelerle tanımlama) gösterimlerini tercih etmişlerdir.

3.2. Cebir Öncesi Çözümler

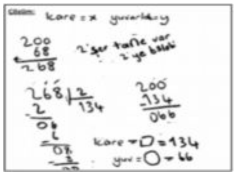
Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin iki probleme ait cebir öncesi çözümlerle ilgili yüzde ve frekans dağılımları ile öğrencilere ait çözüm ve mülakat örnekleri Tablo 5 de verilmiştir.

Tablo 5: İki Probleme Ait Cebir Öncesi Çözümlerle İlgili Öğrenci Dağılımları – Frekanslar ile Örnek Öğrenci Çözümleri ve Mülakatlar

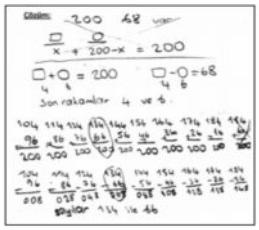
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)
1.Problem	Ö4_5	1 (%17)	-	-	Ö17_7	1 (%17)	Ö23_8	1 (%17)
2.Problem	Ö4_5	1 (%17)	Ö11_6	1(%17)	Ö16_7, Ö17_7	2 (%33)	Ö22_8	1 (%17)


CEBİR ÖNCESİ ÇÖZÜMLER



Ö22_8: İki sayı var. Bu sayıların kare olanına x diyelim, yuvarlağına da y diyelim. Kare ile yuvarlak yani x ile y nin toplamı 200 olurken, kare ile yuvarlak farkı yani x ile y çıkarırsak 68 olur… Burada iki tane bilinmeyen vardı: x ve y. Hem x' den hem de y' den ikişer tane var. O zaman problemde verilen sayıları toplayalım [A: Neden?]… Çünkü 200 ile 68'i elde etmek için ikişer tane x ve y var… O halde 200 ile 68'i toplarsak, 268 olur. Şimdi 268'i ikiye bölelim…[A: Niçin?]… Çünkü ikisinden de ikişer tane olduğundan ikiye bölmeliyiz. Zaten bu zamana kadar da hep öyle yaptık, kural gibi bir şey. Tamam, 134 büyük sayı olur. o halde x sayısı 134 olur. 200 den de 134'i çıkarırsak 66 elde edilir.



Ö17_7: Bilinmeyen iki sayı var. Bunların toplamı 200, farkları ise 68 dir. Bu sayıların birine x diyelim. Toplamları 200 olduğundan diğeri de 200 – x olur… [A: x ne anlama geliyor?]… Bilinmeyen oluyor. Yani soruda verilmeyen sayıların yerine kullanıyorum. [A: Sence x' in kaç değeri olabilir?]… x bilinmeyen sayılardır ve aynı zamanda değişik değerler de alabilir herhalde... Ama burada iki tane değer alabilir… [A: Neden iki değer?]… Çünkü iki bilinmeyen var, ondan iki değer alır… Şimdi buradan bir denklem yazabiliriz. [A: Bu denklemi nasıl çözeceksin?]… x'ler birbirini götürüyor, 200 = 200 oluyor… Yok! Çözemem. [A: Şimdi ne yapacaksın? Düşüncen nedir?]
Ö17_7: Öğretmenim sayılar deneyelim… Ama buradaki sayılar aynı sayılar değildir. Yani 100 ile 100'ü toplarsak 200 eder fakat farkları 0 olur… Bir dakika öğretmenim… Son rakamlarını düşünürsek... [A: Niçin son rakamlar?]… Mesela 4 ile 6 olabilir. Aslında zaten alacağımız sayıların son rakamlarını topladığımızda 0 çıkardığımızda 8 olması gerekir. O halde son rakamlar 4 ile 6 olmalıdır… Buna göre 100 ile 200 arasındaki son rakamı dört olan sayıları yazalım, 194, 184, 174, 164, 154, 144, 134, 124, 114, 104 olur. Bunlardan biri x dir. Yani büyük sayıdır... [A: Şimdiki düşüncen ne?]… O halde onları 200 tamamlayan sayıları yazalım, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96 olur. Çünkü toplamları 200 etmeli. Şimdi sırasıyla çıkarırsak… [A: Neden çıkarıyorsun?]… Çünkü farkları 68 olan sayıyı bulmak için. Şimdi küçükten başlayarak sırasıyla sayıları çıkaralım. Farkı 68 olan sayı ise küçük sayı olacak… Bu sayılar 134 ile 66 dır.

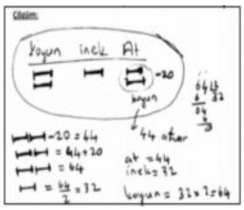
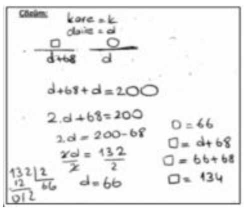
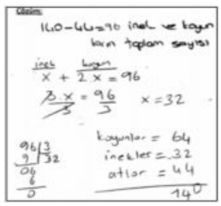
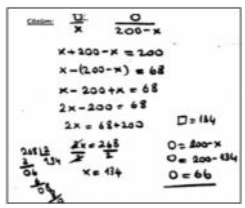
Tablo 5 incelendiğinde 5-8.sınıf öğrencilerinden birer (%17) öğrenci birinci problemin çözümünde cebir öncesi çözümleri kullanmışlarken, ikinci problemin çözümünde 5 ve 6.sınıf öğrencilerinden birer (%17), 7.sınıf öğrencilerinden iki (%33), 8.sınıf öğrencilerinden de bir (%17) öğrenci cebir öncesi çözümleri kullanmıştır. Fakat birinci problem için 6. sınıf öğrencilerinden hiçbiri cebir öncesi çözümler kullanmamıştır. Ö22_8 öğrencisi ikinci problemin çözümünde cebirsel düşünceye sahip olmakla beraber bilinmeyenlerden birini yok eden bir yöntem kullandığından ve bilinmeyenleri içermeyen aritmetik çözüm ürettiğinden çözümü cebir öncesidir. Bu öğrenci birinci problemde ise aritmetik çözümden yararlanarak problemi çözmüştür. Fakat Ö4_5 öğrencisi her iki problemde cebir öncesi çözümlerden yaralanmıştır. Ö17_7 öğrencisi ise her iki problemde de ilk önce bilinmeyenlerle akıl yürütmeye çalışmış, fakat devamında bilinenleri alarak mantıksal çıkarımlarla düşünme-deneme stratejisini kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Öğrencinin çözümünde bilinmeyen çözüm sürecinin başlangıç noktası olmasına rağmen çözümün devamında bilinmeyenler çözüm süreci içerisinde yer almamaktadır. Hâlbuki cebirsel uygulamalarda yani çözüm sürecinde sembolün kendisi işlem yapılan nesne olmalıdır ve tek amaç bilinmeyeni ortaya çıkarmaktır. Bu nedenle öğrenci başlangıçta cebirsel seviyedeymiş gibi gözükürken, aslında cebirsel seviyeden daha düşük bir seviyededir. Aynı şekilde Ö11_6 öğrencisi de Ö17_7 öğrencisi gibi ikinci problemde verilenleri ve istenenleri göz önüne alarak, sayıların son rakamlarından mantıksal çıkarımlarla bilinçli denemeler yaptığından (düşünme – deneme) ve simetrik bir yaklaşım sergileyip çözüme ulaşmaya çalıştığından bu öğrencinin çözümü de cebir öncesidir. Ö17_7 öğrencisi son rakamlar olarak 4 ile 6 rakamını alırken, Ö11_6 öğrencisi 1 ile 9 rakamlarını almış, bundan dolayı da Ö11_6 öğrencisi doğru bir sonuca ulaşamamıştır. Ö16_7 öğrencileri ise ikinci problemde ilk önce bilinen sayılarla birkaç deneme yapmış belli bir süreden sonra bu yöntemden vazgeçerek bilinmeyenleri içeren bir denklem yazmış, tekrar aritmetik yöntemlere geri dönerek bu denklemi çözmeye çalışmıştır. Bu öğrenci cebirsel gösterimler kullandığından ve aritmetik akıl yürüttüğünden çözümü cebir öncesidir. Bunun yanında cebir öncesi çözümler kullanan öğrenciler çözümlerinde sadece şekil ve syncopated (sembollerin ve kelimelerin bir kombinasyonu) gösterimleri tercih etmişlerdir.

3.3. Cebirsel Çözümler

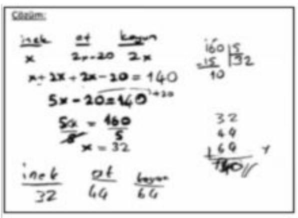
Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin iki probleme ait cebirsel çözümlerle ilgili yüzde ve frekans dağılımları ile öğrencilere ait çözüm ve mülakat örnekleri Tablo 6 da verilmiştir.

Tablo 6: İki Probleme Ait Cebirsel Çözümlerle İlgili Öğrenci Dağılımları ve Frekanslar ile Örnek Öğrenci Çözümleri ve Mülakatlar

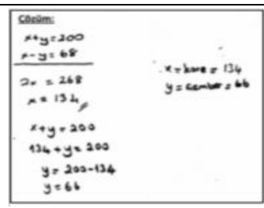
	5.Sınıf		6.Sınıf		7.Sınıf		8.Sınıf	
	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)	Öğrenci	N(%)
1.Problem	Ö6_5	1 (%17)	Ö12_6	1 (%17)	Ö18_7	1 (%17)	Ö24_8	1(%17)
2.Problem	Ö6_5	1 (%17)	Ö12_6	1 (%17)	Ö18_7	1(%17)	Ö23_8, Ö24_8	2(%33)

CEBİRSEL ÇÖZÜMLER



Ö18_7: Burada sayıları bilinmeyen iki hayvan var: inek, koyun. Ama öğretmenin atların sayısı biliniyor. Bu hayvanların toplamı 140 olduğu da problemde verilmiş… Bir tane bilinmeyen alalım. Bilinmeyen x olsun. [A: Ama problemde iki hayvan grubunun sayılarını bilmiyoruz. Neden bir tek x kullanıyorsun?]… Zaten birine x dersek diğerinin x ’li değerini yazabiliyoruz. İneklerin sayısına x diyelim. Koyunların 2.x olur. Atların sayısı ise 2.x – 20 olur… Denklemi çözeceğim… x’i yalnız bırakmalıyım. 5 tane x olduğundan 5.x olur. Denklemdeki –20 diğer tarafa +20 olarak geçer. Eşittir işaretinin bir tarafında 5.x var diğer tarafında 160 var. Şimdi 160 sayısını 5’e bölelim ve x’i bulalım. O halde x, 32 olur. Yani ineklerin sayısı 32’dir… Koyunlarda ineklerin sayısının iki katı olduğundan koyunlarda 64 tanedir. Zaten atlarda 44 idi.



Ö23_8: Bilinmeyen iki sayı var: kare ve daire. Birine x diğerine y diyelim. x ile y’nin toplamı 200, farkları ise 68’dir. Yani x + y =200 ve x – y =68 denklemlerini yazabiliriz. İki tane iki bilinmeyenli denklem elde ettik… x’ler ve y’ler alt alta gelecek şekilde bu denklemleri yazalım ve taraf tarafa toplayalım. Burada x’lerin işaretleri pozitif olduğundan toplamları 2.x olur. y’lerin işaretlerinden biri artı biri eksi olduğundan toplamları 0 olur. Diğer tarafı ise 268 dir. O halde 2.x, 268 eşit olur. Buradan her iki tarafı ikiye bölersek x’i 134 buluruz. x, kare içine yazılacak sayı.. Bulduğum x’i iki denklemden birinde yerine yazarsak y’i buluruz

Tablo 6 incelendiğinde 5, 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerinden birer (%17) öğrenci birinci problemin çözümünde cebirsel çözümleri kullanmışken, 5, 6 ve 7.sınıf öğrencilerinden birer (%17), 8.sınıf öğrencilerinden de iki (%33) öğrenci ikinci problemin çözümünde cebirsel çözümler kullanmıştır. Ö18_7 öğrencisinin birinci problem ile ilgili çözümünde bilinmeyen çözüm sürecinin içindedir ve tek amaç bilinmeyeni ortaya çıkarmaktır. Bu amaç doğrultusunda öğrenci hem bilinen hem de bilinmeyenlerle tanımladığı denklemin her iki yanında işlem yapmış ve mantıksal olarak bağlantılı eşitlikler zinciri yani art arda eşitliklerle çözüme gitmiştir. Burada bilinmeyen için seçilen harfin kendisi işlem yapılan nesnedir ve bilinmeyen çözüm süresince sabittir (durağandır). Aynı şekilde Ö6_5 ve Ö12_6 öğrencileri de Ö18_7 öğrencisi gibi her iki problemi çözerken bilinmeyenleri başlangıç noktası kabul etmişler ve çözüm sürecinde bu bilinmeyenleri ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Bu nedenle bu öğrencilerinde çözümleri de cebirseldir. Ö23_8 öğrencisi ise ikinci problemin çözümünde iki bilinmeyenli denklem sistemleri oluşturmuş, daha sonra bu bilinmeyenler arasındaki ilişkilerden yararlanarak ve bilinmeyenlerin sayısını bire indirgeyen yöntemlerle sonuca ulaşmıştır. Aynı şekilde Ö24_8 öğrencisi de iki bilinmeyenli iki denklem oluşturmuştur. Fakat Ö23_8 öğrencisi iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümünde "yok etme" yöntemini kullanırken, Ö24_8 öğrencisi ise "yerine koyma" yöntemini kullanmıştır. Bununla birlikte cebirsel çözümleri kullanan öğrenciler, çözümlerinde harfli gösterimleri tercih etmişlerdir. Öğrenciler özellikle harfli bilinmeyenlerden oluşan denklemler üretmişler ve çoğu öğrenci bu denklemlerde x, y ve z harflerini kullanırken, öğrencilerin çok az bir kısmı ise soru metnindeki kelimelerin ilk harflerini de kullanmışlardır.

Sonuç olarak Şekil 2 de görüldüğü gibi, klinik mülakata katılan 24 öğrencinin 14'ü her iki problemin çözümünde de aritmetik çözümleri, 2'i cebir öncesi çözümleri, 4'ü ise cebirsel çözümleri kullanmıştır. Fakat Ö11_6, Ö16_7 ve Ö22_8 öğrencileri birinci problemin çözümünde aritmetik, ikinci problemin çözümünde ise cebir öncesi çözümlerle sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Aynı şekilde Ö23_8 öğrencisi ise birinci problemde cebir öncesi çözüm kullanmışken, ikinci problemde cebirsel çözüm kullanmıştır. Aritmetik çözümleri kullanan öğrencilerin 8'i zayıf, 4'ü orta, 1'i ise iyi düzeyde öğrencilerdir. Cebir öncesi çözümleri kullanan öğrencilerin 1'i orta, 1'i ise iyi düzeyde öğrenciler iken cebirsel çözümleri kullanan öğrencilerin ise 4'ü de iyi düzeyde öğrencilerdir. Ayrıca Şekil 5, farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin problem çözme sürecinde kullandıkları çözümlere göre değerlendirildiğinde 5.sınıf öğrencilerinden 4 öğrenci aritmetik, 1'er öğrenci de cebir öncesi ve cebirsel çözümleri kullanmışken, 6.sınıf öğrencilerinin 4'ü aritmetik,1 öğrenci de cebirsel çözümleri kullanmıştır. 7.sınıf öğrencilerinin 3'ü aritmetik çözümleri kullanmışken, 1'er öğrenci de cebir öncesi ve cebirsel çözümleri, 8.sınıf öğrencilerinin ise 3'ü aritmetik, 2'i cebirsel çözümleri kullanmışlardır.

	5.SINIF						6.SINIF						7.SINIF						8.SINIF					
	Ö1_5	Ö2_5	Ö3_5	Ö4_5	Ö5_5	Ö6_5	Ö7_6	Ö8_6	Ö9_6	Ö10_6	Ö11_6	Ö12_6	Ö13_7	Ö14_7	Ö15_7	Ö16_7	Ö17_7	Ö18_7	Ö19_8	Ö20_8	Ö21_8	Ö22_8	Ö23_8	Ö24_8
1. Pro.	A	A	A	CÖ	A	C	A	A	A	A	A	C	A	A	A	A	CÖ	C	A	A	A	A	CÖ	C
2. Pro.	A	A	A	CÖ	A	C	A	A	A	A	CÖ	C	A	A	A	CÖ	CÖ	C	A	A	A	CÖ	C	C

[Şekilde kullanılan kısaltmalar: A:Aritmetik - CÖ: Cebir Öncesi - C:Cebir]

Şekil 2: 24 Öğrenciye Ait Mülakatlardan Elde edilen Verilerin Üç Alana Göre Dağılımı

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Öğrenim seviyesi arttıkça aritmetik çözümlerden cebirsel çözümlere olan geçiş olumlu yönde değişmek ve gelişmekle birlikte, bu değişim ve gelişim çok az olmuş, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler genel olarak her iki problemde de aritmetik çözümleri kullanmışlardır. Burada cebir öğrenme alanını içeren kazanımlarla (bilinmeyen ve değişken kavramı, denklemler, …) henüz karşılaşmayan 5. sınıf öğrencilerinin aritmetik özellikleri içeren çözümleri kullanmaları beklenen bir sonuç iken, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin bu kadar yüksek yüzde değerlerine sahip olmaları düşündürücü bir sonuçtur. Çünkü ülkemiz ilköğretim matematik müfredatında formal olarak bilinmeyen kavramı ve bilinmeyenleri içeren işlemlerin kullanımı 6.sınıftan itibaren gösterilmektedir (MEB, 2005). Bu ise elde edilen sonuçla çelişmektedir. Ayrıca öğrencilerin cebir öncesi veya cebirsel çözüm stratejilerini içeren çözümleri kullanmaması bilinmeyen veya değişken kavramının kullanımındaki eksiklerinden veya verilen problem durumunu sembolleştirememeden kaynaklanabilir.

Cebir öncesi ve cebirsel çözümleri kullanan öğrencilerin sayısı ise oldukça azdır. 5 ile 6. sınıf öğrencileri, hem 7. hem de 8.sınıf öğrencilerine göre aritmetik çözümleri daha çok kullanmakla beraber, 8.sınıf öğrencileri aritmetik çözümleri çok daha az kullanmışlar fakat bu öğrenciler cebir öncesi ve cebirsel çözümleri diğer öğrenci gruplarına göre daha çok kullanmışlardır. Burada cebir öğrenme alanını içeren kazanımlarla henüz karşılaşmayan 5. sınıf öğrencilerinin aritmetik özellikleri içeren çözümleri kullanmaları beklenen bir sonuç iken, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin bu kadar yüksek yüzde değerlerine sahip olmaları düşündürücü bir sonuçtur. Kieran (1992) ve Linchevski ve Hersovics (1996) de ilköğretim öğrencilerinin çözüm süreçlerinin genel olarak aritmetik özellikleri içerdiğini belirtmişlerdir. Ayrıca 7.sınıf öğrencileri cebir öncesi çözümlerin özelliklerini daha fazla göstermektedir. Benzer şekilde Lincehvski (1995) de 7.sınıf öğrencilerinin aritmetik-cebir arası (cebir öncesi) özellikleri içeren çözümleri daha çok kullandığını ifade etmiştir. Özellikle 6 ile 7. sınıf öğrencileri arasında aritmetikten cebire geçiş diğer sınıflara göre daha hızlı olmuşken, 5 ile 6.sınıf öğrencileri arasında çok fazla bir fark yoktur. Araştırmacılar bu durumu öğrencilerin bilinmeyen kavramını veya cebirsel ifade-ilişkilerin yapısal yönünü kavramadaki yetersizliği ile açıklamaktadır (Kieran, 1992; Stacey & MacGregor, 2000; Van Amerom, 2002).

5-8.sınıf öğrencileri her iki problemin çözümünde ağırlıklı olarak problem metinlerindeki bilinen sayıları veya gelişigüzel sayıları içeren "deneme-yanılma" çözüm stratejisi ile bilinmeyenleri elde etmeye çalışmışlardır. 5 ve 6.sınıf öğrencileri daha çok "gelişigüzel deneme-yanılma" çözüm stratejisini kullanmışken, 7. ve 8.sınıf öğrencileri ise "ardışık deneme-yanılma" çözüm stratejisini kullanmışlardır. Ancak her iki problem çeşidinde "ardışık deneme-yanılma" çözüm stratejisini kullanan 8.sınıf öğrencileri 7.sınıf öğrencilerinden daha fazladır. Yani başlangıç sınıflarında gelişigüzel yapılan denemeler daha sonraki sınıf seviyelerinde sistematik ve ardışık denemelere yerini bırakmış ve sınıflar arasındaki bu değişim matematiksel düşünmenin farklı seviyeleri boyunca gerçekleşmiştir. Cebir öncesi çözüm stratejilerini kullanan öğrencilerden birkaçı birinci problemde aritmetik gösterimlerle cebirsel akıl yürütmüş diğer problemde ise bilinmeyenleri başlangıç kabul edip mantıksal çıkarımları içeren aritmetik işlemlerle bilinçli "düşünme ve deneme" çözüm stratejilerini kullanmışlardır. Araştırmacılar bu düzeydeki denemelerin problemde verileni ve isteneni göz önüne alarak mantıksal çıkarımlarla bilinçli yapıldığını belirtmiş ve bunların aritmetik düzeydeki denemelerden daha başarılı sonuçlar verdiğini belirtmişlerdir (Stacey & MacGregor, 2000).Van Amerom (2002) da bu tür çözüm stratejilerinin cebir öncesi çözüm stratejileri olduğunu ifade etmiştir. Cebirsel çözümleri kullanan 5, 6 ve 7.sınıf öğrencileri problemlerin çözümlerinde genel olarak bir bilinmeyenli denklemler yapılandırmış ve denklemlerin çözüm süreçlerinde bu bilinmeyenlerle işlem yapmışlardır. Ancak 8.sınıf öğrencilerinden birkaçı iki bilinmeyenli denklem sistemleri oluşturmuş ve bu denklem sistemlerini "yok etme" ve "yerine koyma" yöntemleri kullanarak çözmüşlerdir. Linchevski (1995) cebirsel özellikleri içeren problemlerin çözümlerinde cebirsel ifadelerle veya sembollerle işlem yapmanın gerekliliğine vurgu yapmıştır. O halde bu iki problem türünde sembolleri kullanarak akıl yürütme konusunda diğer sınıflara göre eğilimi fazla olan 8.sınıf öğrencilerinin başarılı olması tutarlıdır. Bunun yanında farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler özellikle sözel problemde, simgesel probleme göre, aritmetik problemlerde, cebirsel problemlere göre daha başarılı çözümler gerçekleştirmişlerdir. Özellikle farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler aritmetik sözel problemde aritmetik çözümleri daha çok kullanmışlarken, cebirsel simgesel problemde cebir öncesi ve cebirsel çözümleri daha çok tercih etmişlerdir. Aritmetik çözümleri kullanan öğrenciler genel olarak sayısal ve sözel gösterimleri-kısaltma yapmaksızın kelimelerle veya cümlelerle tanımlama- kullanmakla birlikte, 5.sınıf öğrencilerin çoğu sözel gösterimlerden yararlanmışlardır. 6, 7 ve 8.sınıf öğrencilerden bazıları ise miktarlar arasındaki ilişkileri kısaltmalar yapmaksızın "kelime formülleriyle" tanımlamış ve bilinmeyen miktarları sembolleştirmede yetersiz kalmışlardır. Ayrıca farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler cebir öncesi çözümlerde ağırlıklı olarak söz-sembol evresi gösterimlerini kullanmakla beraber sözel, sayı ve sembol gösterimlerini de kullanmışlardır. Özellikle söz-sembol ve sembol evresi gösterimlerini kullanan öğrenciler problem metnindeki terimlerin kısaltmaları veya etiketleri olan bilinmeyenler ile geometrik şekil veya x harfi bilinmeyenlerini sadece çözümün başlangıcında ve bitiminde kullanmışlardır. Cebirsel çözümlerde 5.sınıf öğrencileri genelde geometrik şekil sembollerini kullanırken, 6.sınıf öğrencileri ise problem metnindeki terimlerin baş harflerini veya x harfini kullanmışlardır. 7 ve 8.sınıf öğrencileri ise ağırlıklı olarak x ve y harfleri ile denklemleri oluşturmuşlardır. O halde öğrenim seviyesi arttıkça aritmetik gösterimlerden cebirsel gösterimlere yani söz evresi gösterimlerinden sembol evresi gösterimlere olan değişim ve gelişim az da olsa olumlu yönde değişmiş ve gelişmiştir. Sonuç olarak öğrenim seviyesi arttıkça problem çözme süreçleri açısından aritmetikten cebire geçişin olumlu yönde değiştiği ve geliştiği görülmüştür. Ancak farklı öğrenim seviyeleri arasındaki bu değişim ve gelişim çok az olmuştur. Özellikle 5 ile 6.sınıf ve 6 ile 7.sınıf öğrencileri arasında çok belirgin bir değişim ve gelişim (farklılaşma) olmamakla birlikte, öğrenim seviyeleri arasındaki en belirgin değişim ve gelişim 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında gerçekleşmiştir. Bu durum aritmetikten cebire geçişin 7 ile 8.sınıf öğrencileri arasında daha hızlı bir şekilde gerçekleştiğini göstermektedir.

Farklı öğrenim seviyelerindeki öğrenciler her iki problemde genel olarak aritmetik çözümleri kullandığından öğretmenlerin farklı çözüm stratejilerine özellikle de cebir öncesi çözüm stratejilerine öğrencileri teşvik etmesi aritmetikten cebire başarılı bir geçiş yapmada gereklidir. Ayrıca öğretmenlerin farklı çözüm stratejileri kullanılarak çözülebilecek problemlere yer vermesi, öğrencilere farklı formatlarda sunulan problemleri çözebilmek için farklı problem çözme stratejileri kullanma becerilerini kazandırması ve kendilerine özgü informal çözüm stratejileri geliştirmelerine olanak sağlaması öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş süreçleri hızlandırılabilir. Öğrenim seviyesi arttıkça problem durumlarını sembolleştiren farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin sayısı çok az artmıştır. Bu nedenle öğrenciler cebire girmeden önce fikirlerini açıklayabilecekleri bir dil olarak sembolleri kullanmayı öğrenmelidir. Bu bağlamda öğretmenlerin sembolleştirme etkinliklere önem vermesi aritmetikten cebire geçiş için önemlidir. Çalışmada, farklı öğrenim seviyelerindeki öğrencilerin problem çözme sürecinde zorluk çektikleri konulardan biri ise sözel problem durumlarının denkleme dönüştürülmesi olduğu saptanmıştır. Bu anlamda öğretmenler, öğrencilerin aşina olduğu aritmetik dille, cebir'in daha teknik olan dili arasında var olan farklılıklardan bazılarını açıklamalıdır. Örneğin aritmetikteki "$35 \neq 3 \times 5$ ve $35 \neq 53$" ifadeleri ile cebirdeki $ab = a \times b$ ve $ab = ba$" ifadeleri arasında farklılık vardır. İşte bu farklılıklar hatalara ve kavram yanılgılarına neden olmaktadır. Bundan dolayı öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş sürecinde bu farklılıkların ve yanılgıların üstesinden gelmek zorundadır.

KAYNAKLAR

Baki, A., Akkan, Y., Atasoy, E., Çakıroğlu, Ü. & Güven, B. (2008, Ağustos). Aritmetikten cebire geçiş: Problem çözme stratejileri. *8. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi.* Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. & Lepage, A. (1992). Arithmetic and algebraic thinking in problem solving. *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Edu.,* 1, 65-72.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L., R. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra.* The Ideas of Algebra, K-12, 20–32. Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T.P. & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. [Online]: Retrieved on 11-March-2008, at URL: www.wcer.wisc.edu/ncisla/publications/ index.html.

Cooper, T., J., Boulton-Lewis, G., Athew, B., Willss, L. & Mutch, S. (1997). The transition arithmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable. *International Group for the Psychology of Mathematic Education*, 21 (2), 89-96.

Cortes, A., Vergnaud, G. & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, 27- 34.

Çepni, S. (2007). *Arastırma ve proje çalısmalarına giriş* (3.Baskı). Celepler Matbaacılık, Trabzon.

English, L., D. & Halford, G., S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Filloy, E. & Rojana, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For The Learning of Mathematics*, 9 (2), 19 - 25.

French, D. (2002). *Teaching and learning algebra*. London: Continuum.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S.Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-92). Reston, VA: NCTM.

Hersovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognative gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

Karasar, N. (1995). *Bilimsel araştırma yöntemi* (7.Baskı). 3A Araştırma Eğitim Danışmanlık Ltd.,

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 96-112). Cambridge: Cambridge University Pres.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.119-139). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1991). A Procedural-structural perspective on algebra research'. *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 245–253.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. & Stephens, A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37 (1), 68-76.

Koedinger, K., R., Alibali, M., W. & Nathan, M., J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra poblem solving. *Cognitive Science,* 32, 366-39.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 38–65.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.

Lodholz, R., D. (1993). The transition from arithmetic to algebra. E.L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone* (pp. 24-33). Reston, VA: NCTM.

MEB, TTKB. (2005). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu*, Ankara:MEB Basımevi, www.meb.gov.tr. 7 Mart 2009.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va: NCTM.

Rosnick, P. (1999). Some misconceptions concerning the concept of cariable. B. Moses (Eds.) , *Algebraic thinking, grades 9-12: Readings from NCTM's school based journals and other publications* (pp. 313-315), Reston, Va:NCTM.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confront historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 15-39.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 1-36.

Sfard, A. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics,* 26, 191-228.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gain and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18 (2), 149-167.

Stacey, K. (2008). The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking [Online]: Retrieved on 07-March-2008, at URL:*www.* staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/IMECstaceyALGEBRA.

Swadener, M. & Soedjadi, R. (1988). Values, mathematics education and the task of developing pupils' personalities: An Indonesian perspective. *Educational Studies In Mathematics*, 19 (2), 193-208.

Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra.* Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht, The Netherlands.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. In P. S. Wilson (Eds.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp.117-139), New York: Macmillan Publishing Company.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, October, 474-478.

Williams, A. & Cooper, T. (2001). Moving from arithmetic to algebra under the time pressures of real classrooms. In H. Chick, K. Stacey, Jill Vincent, & John Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (pp.665-662). Melbourne: University of Melbourne.

Zaskıs, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (4), 429-439.

Extended Abstract

The developments on mathematics education have effected to the Turkish Mathematics Education as revising the primary school education mathematics curriculum after 2004. The new curriculum developed by Turkish Ministry of Education regarded new outcomes that are about to build new individuals who can use mathematics, solve problems, share their ideas, have confidence to defend mathematical ideas. These features can be shaped through developing problem solving, communication, reasoning and associating skills. Especially in the communication domain students should associate the two important learning domains; arithmetic and algebra. As is known, algebra has a strong arithmetic basis and also it has opportunities for symbolization, generalization and algebraic

thinking. Students generally associate algebraic ideas about their previous lives' arithmetic ideas. Thus, in the transition from arithmetic to algebra process; making students gained outcomes about using different problem solving strategies for different problems in various forms in order to comprehend mathematics that is getting abstract in the second level of primary school. So, the different grade students' problem solving process takes an important place in the primary school mathematics curriculum. Thus, this study focuses on investigating the development and the change on transition from arithmetic to algebra process about different grade students.

In this transition process we used the cross-sectional type of development research method in order to examine the development and change of different grade students. The sample was consisting of 24 students chosen from primary school 5-8 grade students in Trabzon. Students in the sample chosen for clinical interviews were selected according to their previous academical achievements. Also the two other selection criteria about students were expressing their thoughts easily and being volunteers. Data gathering tools consist of arithmetic-verbal and algebraic-symbolic problems which the different grade students may provide solutions by using a number of strategies and may develop new strategies. The problems were prepared by the authors, and then they are undergone expert review by discussing with three mathematics teachers and two mathematics education academicians. Then problems are revised by the suggestions of these experts. The data from clinical interviews and students' problem solutions are examined by researchers according to the items in "characterization tables". The correlation coefficient between two researchers was 79 %. The data gathered from students are analyzed through the characterization tables developed by the support of literature which include arithmetic, pre-algebraic and algebraic criteria.In data analysis, the data about students' solutions is categorized as arithmetic, pre-algebraic and algebraic. Then the different grade students' solutions about these two problems including three different cases are presented descriptively; that is percentages and frequencies. Also, some direct extractions from clinical interviews are presented in order to picture the students' idea.

As a result, by the increase of the students' grades their solutions changed and improved from arithmetic to algebraic, but this change was very little. As well as the different grade students generally used arithmetic solutions for given two problems, only a few students used algebraic and pre-algebraic solutions. The 5th and 6th grade students used arithmetic solutions more than 7th and 8th grade students. Thus, the 8th grade students used arithmetic solutions less than the other grades but this group used algebraic and pre-algebraic solutions more than the others. The 7th grade students showed the general characteristics of pre-algebraic students more than the other groups. Especially the transition from arithmetic to algebra at 6th and 7th grade was faster than the other grades of students. In the view of problem solving strategy; the 5th and 6th grades used "random trial and error " and the 7th and 8th grades used "sequential trial and error" strategy. Some students who used the pre-algebraic solution strategies used reasoning with arithmetic notations at first problem and in the second problem they set variables as starting point and they used "reason and trial "strategies which include logical extractions. Students who used algebraic solutions in 5th, 6th and 7th grade constructed one variable equation and proceed with these variables. But some 8th grade students formed two variable equation systems and solved these equations by "elimination" and "substitution" strategies. Students who used arithmetic solutions generally used numeric and verbal representations. Most of the 5th students used verbal representations. Some of 6th, 7th and 8th grade students did not define the relations between amount of objects by shortening. They only defined amounts by word formulas. So they were not capable on symbolization of unknown amounts. Thus, different grade students mostly used verbal-symbolic representations in pre-algebraic solutions, but also they used verbal-numeric and symbolic representations as well.

As a result, it is found that the different grade students generally used arithmetic solutions, so teachers should lead students to different solution strategies, especially to the pre-algebraic solution strategies is necessary for transition from arithmetic to algebra. By the way, teachers should use problems which can be solved by different strategies in order to give opportunities for students to gain different problem solving skills. So, by this way students may develop their own informal problem solving strategies and this may fasten the transition process.