YILDIZ SOCIAL SCIENCE REVIEW *vol.* 5 *no.* 2
https://doi.org/10.51803/yssr.600347

İKTİSADIN FORMALİST AKSİYOMATİK BİR DİSİPLİNE DÖNÜŞÜM SÜRECİNDE HILBERT – BOURBAKI YERİNE POINCARE – BROUWER YAKLAŞIMI BENİMSENEBİLİR MİYDİ?

Kaan İrfan ÖĞÜT
Bahçeşehir Üniversitesi, İİSBF Öğretim Üyesi, kaan.ogut@eas.bau.edu.tr

Başvuru Tarihi/Application Date: 1 Ağustos 2019
Kabul Tarihi/Acceptance Date: 30 Kasım 2019

ÖZET

20. yüzyılın başında matematiğin temelleri üzerine yapılan tartışmalara son vermek için Hilbert matematiği formalist bir yöntemle aksiyomatik bir yapıya dönüştürme girişiminde bulundu. Aynı dönemde deneysel ilerlemenin sınırına gelmiş olan fizikçiler de aynı yöntemi kuantum fiziğine uyarladılar. 1930'larda Wald ve von Neumann 1950'lerde ise Debreu benzer bir metodu Genel Denge Teorisi aracılığıyla iktisada uyguladılar. Bu süreçte hem fizik hem de iktisat diferansiyel denklemlerin yerine topoloji, grup teorisi gibi daha yüksek soyutlama düzeyindeki matematiksel yöntemleri kullanmaya başladılar.

Bu çalışmada iktisadın, matematik ve fizikte yaşanan dönüşümü izlemesinin kaçınılmaz olduğu varsayılmakta ve Hilbert formalizmini sınırlayan ve ona alternatif olan iki yaklaşıma dikkat çekilmektedir. Bunlardan birincisi Gödel ve Turing'in, formalist aksiyomatik yaklaşımın sınırlarını gösterdikleri çalışmaları ile ilk adımları atılan hesaplanabilir matematiktir. İkincisi ise Brouwer'ın zaman sınırlı insan zhni tarafından yaratılan matematiğin algoritmik yöntemi kullanması gerektiği yönündeki sezgici felsefesidir. Bu çerçevede iktisadi analizde algoritmik içeriği yüksek hesaplanabilir bir matematik yaklaşımının kullanılma potansiyeli tartışmaya açılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Algoritmik ve hesaplanabilir matematik, formalist aksiyomatik yaklaşım, sezgici matematik felsefesi.

ABSTRACT

To end the debate on the foundations of mathematics Hilbert attempted to axiomatize mathematics with formalist method. In the same period, physicists who reached to the limits of experimental progress applied the same method to quantum physics. In 1930's Wald and von Neumann in 1950's Debreu implemented similar techniques on economics through the *General Equilibrium Theory*. In this process both of the physics and economics began to use high abstraction level mathematical methods like topology and group theory instead of differential equations.

In this study it is assumed that it was inevitable that the economics followed evolution in mathematics and physics. Also it is emphasised two approaches that limits and being alternative to Hilbert's formalism respectively. First one is the computable mathematics, which was originated by the studies of Gödel and Turing that show limits of formalist axiomatic approach. Second one is the Brouwer's intuitionistic philosophy that claims mathematics, created by time bounded human mind have to use an algorithmic method. In this framework for economics, potential of using high algorithmic content computable mathematics is discussed.

Keywords: Algorithmic and computable mathematics, formalist axiomatic approach, intuitionistic philosophy of mathematics

1. Giriş

20. yüzyılın ilk yarısında *aksiyomatizasyon* ve özellikle de *formalizasyon*[1] süreçleri önce matematiğin kendi içinde yaşanmış ardından da matematikçiler ve fizikçiler tarafından ağırlıklı olarak kuantum teorisi üzerinden fiziğe uyarlanmış, dönemin matematik ve fizik alanındaki gelişmeleri takip eden iktisatçıları da bu sürece kayıtsız kalamamışlardır (Öğüt, Kuantum Teorisi - Matematiksel Formalizm ve Genel Denge İktisadı, 2017, 43). Benzer bir gelişim çizgisini, matematik, fizik ve iktisat, her üç bilim dalının da bir şekilde yaşamış olmaları bilimsel disiplinlerin aksiyomatik formel bir yapıya dönüşmelerinin kaçınılması zor bir süreç olma olasılığını gündeme getirmektedir.

Çalışmanın 2. bölümünde ana akım iktisadın, genel denge teorisi üzerinden, aksiyomatik ve formel bir disiplin haline geliş süreci kısaca özetlenecektir[2]. 3. bölümde iktisatta Bourbaki – Debreu çizgisinde yansımasını bulan Hilbert formalizminin matematik felsefesi çerçevesinde alternatifi olabilecek sezgici yaklaşım ele alınacaktır. 4. bölümde Gödel ve Turing'in çalışmaları ile gündeme gelen *hesaplanabilir matematik* ve *algoritmik matematik* yaklaşımları ele alıncaktır. 5. bölümde hesaplanabilir ve algoritmik matematiğin iktisattaki olası yansımaları ve iktisatta matematiğin kullanımında Hilbert - Bourbaki formalizmine bir alternatif olma potansiyeli değerlendirilecektir.

2. İktisadın Aksiyomatik-Formal bir Disiplin Haline Geliş Süreci:

Bilimselleşme iddiasındaki neoklasik iktisadın, Jevons, Menger, Walras gibi iktisatçılar öncülüğünde 1870'lerde gerçekleştirilen marjinal devrimle 19. yüzyılın enerji kavramını temel alan fiziğine benzemeye ve bu nedenle de kullandığı matematiksel yöntemleri iktisada uygulamaya çalıştıkları bilinmektedir. Bu iktisatçılar bir anlamda Smith'in merkezi olmayan bireysel kararların görünmeyen bir el aracılığıyla uyumlanacağı düşüncesi ile marjinal değer teorisini birleştirmişlerdi (Skousen, 2007, 108). Smith'in yaklaşımı döneminin Newtoncu mekaniği ile uyum içindeydi. Smith *The Theory of Moral Sentiments* ve *The Wealth of Nations* kitaplarında Newtoncu yöntemi, önce ahlak sonra da ekonomiye uygularken (Blaug, 1992, 52) Newton'da kütle çekiminin üstlendiği rolü Smith'de fiyatlar üstlenmişti (Redman, 1993). Smith'in, 1795'te kaleme aldığı *Astronomi Tarihi* olarak da bilinen[3] risalesinde Antik Yunan'dan Newton'a uzanan bir süreçte astronomi alanındaki gelişmeleri detayları ile anlatması döneminin doğa bilimlerine olan yakın ilgisini göstermektedir. Bununla birlikte Smith'in modeli teorisinin nasıl çalışacağını açıklayan bir mekanizmaya sahip değildi işte Walras 1874'te genel ekonomik denge teorisinin ilk matematiksel formülasyonunu sunarak bu boşluğu doldurma yolunda bir adım atmıştır (Shojai, 1989, 44). Walras aynı zamanda Marshall'ın her bir mal piyasasının denge durumunu diğerlerinden bağımsız olarak analiz ettiği kısmi denge yaklaşımı yerine ekonomideki mal ve hizmetlerin karşılıklı bağımlılık ilişkilerini de dikkate

---

[1] Boylan ve O'Gorman'ın (2007) da vurguladığı gibi aksiyomatikleşme ve formalleşme iki ayrı kavramdır ve birincisinin tarihi Euclides'e hatta Aristoteles'e kadar götürülebilirken ikincisi 19. yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarında gündeme gelmiştir. Aksiyomatikleştirme çabasının arkasındaki *mantıksal ispat* kavramı ise Miletli Thales'e kadar götürülebilir. Aristoteles ispata yönelik, *bir anlamda tümdengelimsel,* bir bilimin ilkelerini ortaya koymuş (Acerbi, 2013) her bilimin varsayımlarla işe başladığını, aksiyom olarak adlandırdığı varsayımların bütün bilim alanları için ortak nitelikteyken postulat olarak adlandırdıklarının ise o disipline özgü olduklarını söylemiştir (Yıldırım, 1988, 26). Yunan düşüncesinde ispata yönelik tartışma biçimi ve sistematiği matematiğin yanı sıra felsefe, politika ve ahlak konularında da kendisini göstermiştir. Ölçme (gözlem) yerine mantıksal çıkarım yoluyla önermelerin ispatlanması yaklaşımı geometri alanında ise Thales, Pythagoras ve Eudoxus'un çalışmaları ile sistematik bir kimlik kazandıktan sonra Euclides'in "*Elementler"* isimli 13 ciltlik bir bakıma derleme eseri ile son noktasına ulaşmıştır. Euclides geometriye mantıksal bir bütünlük kazandırmış, kendisinden önceki dönemlerde ortaya konan değişik biçimlerde ispatları verilen önermeleri az sayıda tanım, aksiyom ve postulatlara dayanarak tümdengelimsel çıkarımla ispatladığı bir sistem kurmuştur. Euclides, *Elementler*'in başlangıç bölümünde önce nokta, doğru, yüzey, düzlem gibi tanımları vermiş daha sonra geometriye özgü postulaları ve en sonda genel doğrular olan aksiyomları vererek Aristoteles'i izlemiştir. Euclides'ten sonra Archimedes mekanik alanındaki bulgularını Euclides geleneğine uygun olarak aksiyomatik biçimde sunmuş 25 teoremi 3 postulata dayanarak ispatlamıştır (Yıldırım, 1988, 20-29)

[2] Bu süreç (Öğüt, 2017) ve (Öğüt, 2018)'de ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.

[3] *The Principles Which Lead and Direct Philosophical Enquiries; Illustrated by the History of Astronomy.* Öyle ki bu kitapçıkta yerçekimi teorisinde kütlenin oynadığı rolden hareketle Jüpiter ve Satürn'ün yoğunluklarının (öz kütlelerinin) dünya ile aynı olması durumunda uydularının dönüş periyodlarının gözlenenlerden daha kısa olması gerektiğini bunun da dünyanın yoğunluğunun Jüpiter ve Satürn'den büyük olduğunu gösterdiğini söyler (Smith, 1980, 104).

alarak iktisadi birimlerin bağımsız kararlarının tüm piyasaları eş zamanlı olarak dengeye getirebileceği iddiası ile bir anlamda Smith'in; fiyatın bir görünmez el gibi arz ve talep arasında bir denge kurduğu yolundaki görüşünü matematiksel bir ifadeye dönüştürme yolundaki yeni bir yaklaşımın yani *Genel Denge Teorisi*'nin ilk adımını atmıştır (Casti, 2000, 56). Bu süreçte, iktisada bilimsel bir nitelik kazandırma iddiasındaki Walras'ın, iki ünlü Fransız matematikçi Poincare ve Piccard tarafından matematik kullanımı ile iktisadın, mekanik ve matematiksel fizik ile aynı mertebeye ulaşabileceği yönünde cesaretlendirildiğini (Çakır, 1995), hatta 1872'de Walras'ın ricası üzerine Piccard'ın, talep eğrisinin fayda fonksiyonundan türetilmesi için gerekli olan maksimizasyon tekniklerinin nasıl uygulanacağını konusunda Walras'a yardımcı olduğunu unutmamak gerekir (Jafee, 1983, 81).

Ancak Walras'ın açtığı yolun hemen hemen yarım yüzyıl boyunca kullanılmadığı, bu dönemde marjinalist ekolden gelen neoklasik iktisatçıların Marshall'ın kısmi denge yaklaşımını benimsedikleri söylenebilir (Gueerien, 1999, 16). İngilizce yazan iktisatçılar 1920'lerde Walras'dan henüz haberdar değillerdi. Genel Denge Teorisi'nin basit bir biçimini Cassel'in *Sosyal Ekonomi Teorisi*'nden öğrendiler. Bu anlamda Cassel'in bu çalışmasının Arrow-Debreu modeline öncülük ettiği de söylenebilir (Costa, 1998, 40). Bu süreçte bir matematikçi olan Wald 1936'da genel dengenin varlığını matematiksel olarak kanıtlamış ancak bu kanıtlamanın o dönemde iktisatçılar üzerinde bir etkisi olmamıştır (Bulutay, 1979, 1), (Reinhard, 1999). Her ne kadar aksiyomatik metodu matematikten alıp ekonomiye aktaranın Debreu[4] olduğu (Düppe T. , 2007) genel olarak benimsense ve bir anlamda aksiyomatik metodu Bourbaki'den, Smith'e getirdiği ifade edilse de Wald'ın çalışmasının iktisadın aksiyomatikleştirilmesinin başlangıcı sayılması gerektiğini iddia edenler de vardır (Mutoh, 2003)[5]. Genel denge ile ilgili bir diğer önemli çalışma 20. yüzyılın en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen John von Neumann'ın 1938'de yayınlanan ki aslında bu 1932 yılında Princeton'da verdiği bir konferansa dayanan "*Bir Ekonomik Denklemler Sistemi ve Brouwer Sabit Nokta Teoreminin bir Genellemesi*" başlıklı makalesidir (Casti, 2000).

Genel denge literatürü Wald ve von Neumann'ın çalışmalarından, sonra 1930'larda Lange, Hicks, ve Samuelson ile devam etmiş ve sonunda Arrow, Debreu ve Hahn'ın çalışmalarıyla savaş sonrası formülasyonuna kavuşmuştur. 1940'ların ortalarından sonra artık amacın iktisadın bilimselleşmesi değil tam bir matematiksel tutarlılığa ulaşması olduğu söylenebilir (Blaug, 1997, s. 168). İktisatta matematik kullanımının bu yeni şekliyle yükselişi *formalist devrim* olarak nitelendirilmiştir (McCloskey, 1994, 27) Arrow ve Debreu'nun [6] 1954'te Econometrica'da

[4] Bourbaki; Ecole Normale kökenli Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonne, Weil gibi genç Fransız matematikçilerin kurduğu, küme teorisinden, topolojiye matematiğin bir dizi alanında kitaplar yayınlamayı amaçlayan bir oluşumun ismidir (Borel, 1998). Bourbaki, aynı Hilbert gibi ve onun formalizminden etkilenerek az sayıda iyi seçilmiş aksiyomla matematiğin büyük bölümünün mantıklı ve verimli bir şekilde türetilebileceğini savunuyordu. 1941 yılında Ecole Normale'den kabul alan Debreu'nun akıl yürütme tarzı kaçınılmaz bir biçimde Bourbaki tarafından belirlenmiştir (Çakır, 2010). Debreu'nun yaklaşımı kökleri Euclides'e dayanan ve zirve noktasına Hilbert'in geliştirdiği aksiyomatik programında ortaya konan formalist yaklaşımla ulaşan aksiyomatik geleneğe aittir (Boylan & O'Gorman, 2007). Debreu'nun aksiyomatik metodunda matematiksel yaklaşım ile iktisadi içerik birbirinden tamamen ayrıdır. Debreu, bu ayrımı metodolojik olarak da savunmakla iktisatçılar arasında da özel bir yere sahiptir ve bu tavrı belki de onun Bourbakist geçmişini yansıtmaktadır (Düppe T. , 2010). Matematiksel kesinlik üzerinde ısrar eden, aksiyomatikleştirmenin iktisatçıları, üzerinde çalıştıkları sorunları daha derinden anlamaya ve sorunlarına daha iyi uyan matematiksel teknikler kullanmaya yönelttiğini savunan Debreu, iktisat kuramının aksiyomatikleşmesinin, uygulayıcılarına müthiş etkinlikte bir matematik dili sunduğuna inanmaktadır (Debreu, 1984).

[5] 1930'larda matematikçiler de doğrusal olmayan denklem kümelerinin çözümünün varlığını göstermeye çalışıyorlardı. Karl Menger'in Viyana'da düzenlediği ve katılımcıları arasında Gödel ve Tarski'nin de bulunduğu çalıştaylarda Schlesinger, Wald ve von Neumann bu alandaki çalışmalarını ortaya koymuşlardır (Border, 1999, 1) (Mirowski, 2002, 407). Wald, Bourbaki geleneğini izleyerek, Walras'ın denklem ve değişken eşitliğine dayanan çözüm yöntemi yerine dengenin varlığının ancak sabit nokta teoremi ile gösterilebileceğini ortaya koymuştur (Kirman, 2011, 241).

[6] Adam Smith'in *görünmeyen el* kavramının tarihin en önemli ve etkili fikirlerinden birisi olarak tanımlayan Tobin bunun *Millletlerin Zenginliği'*nde ispat edilmemiş bir iddia olarak kaldığını ve ancak 200 yüzyıl sonra Arrow ve Debreu tarafından ispatlandığını söyler. Bununla birlikte Smith'in sezgisel olarak önemini kavradığı pek çok önemli nokta Arrow – Debreu modelinde yer almaz. Örneğin Smith uzmanlaşma ve işbölümünü verimliliğin kaynağı olarak görürken genel denge teorisi tam rekabetin varlığını matematiksel olarak garantileyen dışbükeylik varsayımın bozduğu için bu alanı dışarda bırakmıştır (Tobin, 2005, 125).

yayınlanan *"Rekabetçi bir Ekonomide Dengenin Varlığı"* başlıklı makaleleri yerleşik iktisatta yeni bir dönemin habercisiydi. Bu çalışmaların temel çabası, açık şekilde ifade edilmiş varsayımlar çerçevesinde rekabetçi bir ekonominin dengeye sahip olduğunun ispatlanmasıydı (Düppe & Weintraub, Finding Equilibrium, 2014, xi). Artık Genel Denge Kuramı'nın asıl amacı iktisadın bilimselleşmesi değil tam bir matematiksel tutarlılığı yakalamasıydı (Kaldor, 1972). İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra iktisatçıların amacının matematiksel bir kristal mantık sistemi yaratmak olduğuna dikkat çeker. Bu matematiksel kristal, Debreu'nun Genel Denge Teorisi'ne adapte ettiği Bourbakist formalizme dayanıyordu. Kaldor, 20. Yüzyılda matematik felsefesinde yaşanan gelişmeler dikkate alınmış olsaydı, bu formalizm sürecinin iktisada daha uygun olacak şekilde yaşanabileceğini de belirtir (Boylan & O'Gorman, 2008). Aslında bu iddia iktisadın matematik kullanımının kaçınılmaz olmakla birlikte bunun farklı bir matematik olabileceği düşüncesine de kapı aralamaktadır.

Debreu (1982) matematiksel iktisatta 1930'ların başlarından itibaren yaşanan gelişmelere bakıldığında iktisatçılar tarafından kullanılan matematiksel araçların spesifikasyonunun arttığını ifade eder. Konveks (dışbükey) analiz, küme teorisi, topoloji, ölçüm teorisi, sonsuz boyutlu vektör uzayı teorisi bu araçlar arasında sayılabilir. İktisadi teori aksiyomatikleştikçe, iktisadın, bu soyutlama ve matematikselleşme sürecinde, topolojik uzayların kullanıldığı akıl yürütmelerle genel dengenin varlığının ispatlandığını görmekteyiz. Fizikte matematik kullanımındaki değişime benzer bir şekilde iktisatta da marjinal analizde kullanılan küçük değişimler yani diferansiyel hesaplar yerine, topolojik uzaylar üzerindeki çalışmalar ağırlık kazanmaya başlamıştır. İkinci Dünya Savaşı'nın sonuna kadar matematiksel iktisat, diferansiyel hesap uygulamaları ile aynı anlama geliyordu. Bu matematiksel yaklaşım, *Cournot (1838*) tarafından başlatılmış, *Walras (1874)* ve *Pareto (1909)* tarafından genel denge analizinde kullanılmış, Hicks'in "*Değer ve Sermaye*" *(1939)* ve *Samuelson'un "Ekonomik Analizin Temelleri" (1947)* ile klasik devrin zirvesine yükselmişti. İkinci Dünya Savaşı sonrasında genel denge teorisi, adım adım iktisadın merkezine doğru ilerlerken, bu süreç içerisinde kullanılan tekniklerde de önemli değişiklikler gerçekleşmiştir. Diferansiyel hesaplamaların yerini dış bükeylik teorisi, sabit nokta teoremleri ve topoloji almıştır bu yeni yaklaşım aksiyomatikleştimeyi temel alıyordu ve büyük ölçüde Bourbaki yaklaşımına dayanıyordu (Tubaro, 2016, 216). Modern geleneğin ana kitapları olarak sayılabilecek Debreu'nun *Değer Teorisi* (1959), Arrow ve Hahn'ın *Genel Rekabetçi Analiz*'i (1971), Scarf'ın *Denge Fiyatının Hesaplanması* (1982) ve Hilderbrand'ın *Çekirdek ve Geniş Ekonomilerde Denge* gibi eserlerde türev ya hiç yoktur ya da çevresel (ikincil) bir rol oynamıştır (Mass-Colell, 1985, 1)

İktisadın kullandığı matematikteki bu değişim aslında iktisatçıların tercihinden çok fiziğin de benzer bir dönüşümü yaşamış olması ile ilgilidir. Koopmans (1954), 1950'lerin iktisadı ile 1930'ların fiziği arasındaki dikkat çekici benzerliğe vurgu yaparak, kuantum mekaniğinin geliştiricilerinin yoğun matris cebri ve grup teorisi kullanmalarının, deneyci ve hatta bazı teorik fizikçiler tarafından protesto edildiğini bununla birlikte aradan geçen zamanla birlikte tartışmaların azaldığını ve kuantum mekaniğinin, fiziksel teorinin verimli bir alanı olarak kabul edildiğini ifade eder. Kuantum fiziğinin Planck, Einstein ve Bohr tarafından temellerinin atıldığı 20. yüzyılın başlarındaki ilk evresinin ardından 1925'te başlayan ikinci evresi mantıksal ilkelerden çok ustaca uygulanan matematiksel tekniğin zaferini temsil eden bu dönem olmuştur. Kısacası 20. yüzyılın ilk çeyreğinde geliştirilen kuantum fiziği, 1926 – 1933 yılları arasında matematiksel bir model haline getirilmiştir (Reichenbach, 2014, s. 8). Jabs (1992) kuantum mekaniğini, matematiksel formalizmden oluşan bir fiziksel teori olarak tanımlamıştır. Ancak kuantum fiziğinde matematiksel formalizm yoluyla ifade edilen teorilerin zaman içinde deneyler aracılığıyla test edilebileceği daha 1940'larda öngörülmekteydi (Beck, 1945). Daha 1920'lerin sonuna gelindiğinde kuantumcular deney ve gözlem yapabilirliğin teknik sınırına geldiklerini fark etmişlerdir. Bu aşamada doğa olgularını, mekanik modellere uyarlamak yerine soyut matematiksel ilişkilere indirgeyerek açıklama yoluna gidilmiştir (Yıldırım, 1994, 155). Deney ve gözlemlere dayalı fizik yerine matematiksel modellere, yüksek soyutlama düzeylerindeki akıl yürütmelere dayanan, elde edilen bulguların ancak mümkün olduğunda deneylerle sınanmasına çalışılan bir döneme girilmiştir. Bu dönemde kuantum mekaniği uzunca bir süre bu matematiksel modellemeler sayesinde ilerlemiş, ancak teknolojik gelişmelerle birlikte zaman içinde teorinin pek çok öngörüsü deneylerle de desteklenmiştir. Kuantum fiziğinin tarihinde kuramcıların iddialarının 40 yılı aşkın süreler sonra deneyciler tarafından test edildiği örnekler mevcuttur (Gribbin, 2008, 148). Dirac'ın teorik fiziğin başını deneyin değil matematiğin çekeceği yolundaki öngörüsü daha sonra pek çok fizikçi tarafından kabul görmüştür.

Kuantum mekaniğinin Hilbert uzayları çerçevesinde ayrıntılı bir şekilde matematiksel olarak ifade edilmesininin ilk adımını Hilbert'in formalist programını temel alarak 1937'de kaleme aldığı büyüme modeli ile iktisattaki formalist devrimin de önemli adımlarından birisini atmış olan John von Neumann olması (Gloria – Palermo, 2010) ilginçtir. Bu süreçte Hilbert'in fizik alanındaki son yayını olan, von Neumann ve Nordheim ile birlikte 1928'de kuantum mekaniği üzerine yazdıkları makale önemli bir köşe taşıdır. Ancak teori bütüncül tanımına zaman içinde Hilbert formalizmi yerine **topolojik** cebirin kullanılması ile kavuşmuştur (Atmanspacher & Primas, 2005). Courant'a (1968) göre soyutlamanın verimli kullanımının bir örneği de von Neumann'ın, Hilbert'in teorisini genellemesidir. Yine soyut bir matematiksel teori olan grup teorisi de parçacık fiziğinin somut problemlerinde önemli uygulama alanı bulmuştur. Grup teorisinin büyük veri yığınını düzenleme ve yeni parçacıkların varlığını öngörmedeki başarısı, soyutlamanın önemini ortaya koymaktadır. Uzun süre tümüyle bir geometrik sezgi konusu olarak görülen topoloji de Riemann ve Poincare'nin katkıları sonucu, grup teorisi ile etkileşim içinde önemli uygulama değeri göstermiştir.

Genel hatları ile önce fizik sonra da iktisatta 20. yüzyılda hem kullanılan matematiksel yöntemlerin hem de matematiksel felsefi yaklaşım ve ifade biçiminin değiştiğini iddia edebiliriz. Fizik ve iktisat aksiyomatik, formel birer bilim olma yoluna girmişlerdir. Bu süreçte ismi sürekli gündeme gelen matematikçi Hilbert'tir. Hilbert'in öncelikli amaçlarından birisi de fizik teorilerinin formel hale getirilmesi ve fizik aksiyomlarının matematiksel ifadelerinin ortaya konmasıydı. Gazların kinetik teorisi çerçevesinde Boltzman'ın denklemlerinin çözümünü 1912'de bulan Hilbert'in kuantum mekaniğinden, görelilik teorisinin matematiksel açıdan olgunlaştırılmasına kadar pek çok alanda önemli katkıları olmuştur (Corry L. , 2006). Ancak Hilbert'in bu yöneliminin arka planında matematiksel düşünce ve matematik felefesinde 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başında yaşanan gelişmeler vardır. 19. yüzyılda matematik bir dizi problemle karşılaşmıştır. Bunlardan en önemlisi Euclides geometrisine alternatif geometrilerin ortaya çıkmasıdır (Weintraub, 2002, 9). Lobachevsky 1829 yılında Euclides'in beşinci önermesinin, diğer dördünden elde edilemeyeceğini göstermenin yanında yeni bir geometrinin de temellerini atmıştır (Merzbach & Boyer, 2011, 989-990). Platon'dan beri geometri insan bilgisinin kesinliğini temsil ediyordu ve bu kesinlik algısının yitirilmesi matematikçilerin çoğu üzerinde önemli etkiler yarattı. Bunun üzerine Dedekind ve Weierstrass öncülüğünde matematiğin temellerinin geometri yerine aritmetik üzerine oturtulması için çalışmalar başlamış, bu süreçte de farklı bir çeşit matematiğe, küme kuramına ihtiyaç duyulduğu düşünülmüştür. Başlangıçta küme kuramı mantık ile eşdeğermiş gibi görülmüş ve söz konusu aritmetiğin küme kuramı ve dolayısıyla mantık temelinde yapılanması hedeflenmiştir (Hersh, Some Proposals for Riviving the Philosophy of Mathematics., 1998, 15). Modern mantığın kurucularından sayılan Alman Frege Aritmetiğin Temelleri başlıklı kitabında aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiş ancak Russel'ın kendi kendisinin elemanı olan kümelerle ilgili olarak ortaya koyduğu paradoks Frege'nin baskıda olan kitabının 2. cildine bir düzeltme notu yazmasına neden olmuştur. Matematiğin temellerinde ortaya çıktığı iddia edilen krizini tetikleyen bir başka unsur Cantor'un sonlu ötesi kümeler teorisi ve onun yol açtığı paradokslar olmuştur (Bishop, 1975). Cantor rasyonel sayılar gibi sayılabilir sonsuz kümelerle, reel sayılar gibi sürekli ancak sayılamaz sonsuz elemanlı kümeler arasındaki farkın üzerinde yoğunlaşmış ve (James, 2002, 295) rasyonel ve irrasyonel sayılar kümelerinin her ikisinin de sonsuz sayıda elemanı olmasına rağmen aynı büyüklükte olmadıklarını göstermiştir. Hersh'in (1997, 138) ifadesi ile matematiğin temellerinin onarılması için farklı düşünce okulları 30 – 40 yıl sürecek tartışmalara girmişler ancak hiç biri bunu başaramamıştır.

Hilbert, Cantor'un sonsuz kümeler kuramının tutarsızlık tehdidinden kurtarılması gerektiğini düşünüyordu Russel'ın paradokslarının neden olduğu krizin üstesinden gelmek için de biçimsel aksiyomatikleştirmeyi yani Euclides'e dayanan aksiyomatik yöntemi sembolik mantık ile birleştirmeyi önerdi. Aslında Hilbert genel olarak da bütün matematiksel akıl yürütmeleri ve sonuç çıkarma süreçlerini biçimselleştirmeyi önermiştir (Bostock, 2009, 168). Böylece yapay bir dil oluşturup onun sınırları dahilinde çelişkilerden uzak kalınabilirdi. Biçimsel aksiyomatik sistem içerisinde formüle edilen bir ispat mutlak olarak açık ve pürüzsüz olmalıydı. Bu temele dayanan yapay bir dil ile paradokslardan kaçınmak da mümkün olabilirdi. Böylece matematik, kendi içinde *tutarlı* ve *tam* olan bir aksiyomlardan teorem üretme sürecine, Chaitin'in (2004) deyimiyle bir oyuna dönüşüyordu. Bu herkesin üzerinde anlaşabileceği ve bütün olası matematiksel akıl yürütmeleri içerecek bir sistem olacaktı. Kurallar o kadar kesin olacaktı ki herhangi bir ispat denemesinin doğru olup olmadığına karar verecek bir ispat kontrol algoritması bile oluşturulabilecekti. Hilbert (2004) "*Matematiğin Temelleri"* başlıklı çalışmasında amacının, her matematiksel ifadeyi somut olarak gösterebilen ve tamamen türetebilen, bu şekilde matematiksel tanım ve çıkarımları, sarsılmaz bir hale dönüştüren ve böylelikle bütün bilimin yeterli bir resmini veren formüllere dönüştürmek olduğunu ifade etmiştir.

İktisadın formel aksiyomatik bir disipline dönüşünün hikayesini kuantum fiziği ve matematik felsefesindeki değişimlerle birlikte özetledikten sonra, iktisadın kullandığı matematiksel yöntem ve yaklaşımın bir alternatifi olabilir miydi sorusuna vevap verebilmek için Hilbert formalizminin sınırlarını belirleyen gelişmelere ve farklı yöntem önerilerine göz atmak yerinde olacaktır.

3. Hilbert Formalizminin Sınırları ve Matematik Felsefesinde Alternatif Yaklaşımlar

20. yüzyıla girerken matematiğe damgasını vurmuş olan Hilbert 1900 yılında Paris'te yapılan *Matematikçilerin İkinci Uluslararası Kongresi*'nde matematiğin o güne kadar çözülememiş 23 problemini belirlemiş ve bunlardan 10 tanesini sunmuştur (Corry L. , 2004, 1). 1904 yılında Heidelberg'te gerçekleştirilen Üçüncü Kongre'nin öncesinde Russel'ın kümeler teorisinin paradokslar barındırdığını saptaması matematikçiler arasında rahatsızlığa yol açmıştır. Hilbert bu kongredeki konuşmasıyla matematiğin yeniden yapılandırılması konusunda çalışmaya gönüllü olmuş daha önce geometriye uyguladığı aksiyomatik yöntemi matematiğin diğer alanlarına da genişletme planını açıklamıştır. Bununla birlikte Hilbert 1917'ye kadar daha çok integral denklemler ve söz konusu 23 problemin altıncısı olan fiziğin nasıl aksiyomatik bir bilim haline getirilebileceği üzerine çalıştıktan sonra *Aksiyomatik Düşünce* başlıklı konuşması ile bu konuya geri dönmüştür. Bu süreçte matematiğin temellerine dair tartışmalar artmış Brouwer'ın [7] Weierstrass ve Cantor'un çalışmalarındaki sonsuzluk yaklaşımını sorguladığı sezgicilik olarak isimlendirdiği yeni bir akım da taraftar toplamaya başlamıştı. Hilbert 1925 yılında Munster'da yaptığı başka bir konuşmada, Cantor'un yarattığı cennetten vazgeçmeyeceğini ifade ederek, geleneksel matematiği, Brouwer'ın başını çektiği saldırılara karşı kormak için mantık da dahil olmak üzere matematiğin tamamının aksiyomatikleştirilmesi ve bu aksiyomatik teorinin tutarlı olduğunun ispatlanması yolundaki çalışmalarına hız vermiştir. Hilbert'in temellere yönelik bu yaklaşımı daha sonra formalizm olarak tanınmaya başlamıştır (Burton, 2011, 709). Bir anlamda Hilbert klasik matematiğin tutarlı olduğunu ispatlayarak matematiği tehlikeli bulduğu Brouwer'ın eleştirilerinden korumak istemiştir (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, s. 373)[8].

Hilbert'in 10. Problemi; 1900'deki Kongre'de kısmen ortaya konduktan sonra, 1928 Bologna Kongresi'nde tam olarak tanımlanmıştır (Penrose, 2015: 57). Bu problem Yunanlı matematikçi Diophantus'un *Arithmetica* kitabında yer alan, değişkenleri ve katsayıları tamsayı olan iki veya daha fazla değişkene sahip polinom denklemlerin çözümlerinin olup olmadığına karar verebilecek bir algoritma olup olmadığıydı [9]. Böyle bir algoritma varsa, bu algoritma bulunarak problem

---

[7] 1908'deki Roma'da yapılan dördüncü kongreye katılan ve burada Hilbert'in beşinci problemi üzerine yaptığı çalışma üzerine sunum yapan Brouwer bu kongre de hem matematik felsefesi hem de esas çalışma alanı olan topolojik uzaylar üzerine düşüncelerinin şekillenmesinde rol oynayacak Poincare'yi keşfetmiştir (James, 2002, 315).

[8] Bu tartışmanın entellektüel çerçevede sürdüğünü düşünmek yanılgı olur. Baş editörlüğünü Hilbert'in yaptığı matematik alanında dünyanın önde gelen dergilerinden *Mathematische Annalen*'in editör kurulunda yer alan isimlerden birisi de Brouwer'dı. Ancak ikili arasındaki tartışmaların şiddetlendiği 1928 yılında Hilbert, Brouwer'ı bu kuruldan atmıştır (Carl, 1998).

[9] Fermat'ın Diophantus'un Arithmetica kitabının Pisagor teoremi ile ilgili sayfasının kenarına not ettiği ve altına ispatını bulduğunu ama yer olmadığı için buraya yazmadığını söylediği (Penrose, 2015, 80) ünlü son teoremi de bir diophantine denklemdir. Fermat $n = 2$ olduğunda Pisagor teoremi olarak bilinen $x^n + y^n = z^n$ ifadesini $n > 2$ olduğunda sağlayan

çözülebilirdi; fakat böyle bir algoritma yoksa, olmadığını matematiksel olarak ispatlamak, gerekiyordu. Aslında diophantine denklem sınıfına dahil olan pek çok denklem vardı ve yüzyıllardır pek çok matematikçi bunlardan bazılarının çözümünü bulmuş bazılarınınsa çözülemediğini göstermişti. Fakat Hilbert her türden diophantine denklemi için evrensel bir çözümün, bir algoritmanın peşindeydi (Matiyasevich, 2000, 2). Nitekim 1970 yılında Matiyasevic bu problemin çözülemez olduğunu ispatlamıştır. Bu algoritmik olarak çözülemeyen bir problem örneğidir (Nuriyev & Sadıgova, 2002) (Rosen, 2015, s. 895) (Wolfram, 2002, 1161).

Hilbert'in 10. problemini, aritmetiğin aksiyomlarının tutralılığı ile ilgili 2. problemi ile birlikte ele alarak aşağıdaki üç soruyu sormak mümkündür.

- Matematik tam mıdır? Yani her matematiksel ifade verilen sonlu sayıda aksiyom ile ispat edilebilir mi ya da yanlışlanabilir mi?
- Matematik tutarlı mıdır? Yani sadece doğru ifadeler mi kanıtlanabilirdir.
- Matematiksel herhangi bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu sonlu bir zaman içinde belirleyecek kesin bir prosedür yani algoritma var mıdır? (Mitchell, 2009, 58). Örneğin ikiden daha büyük çift sayıların iki asal sayının toplamı olarak ifade edilebileceği yönündeki Goldbach hipotezininin doğru veya yanlış olduğunu bütün çift sayıları denemeden belirleyebilecek bir algoritma var mıdır?

Kısmen 1900'daki kongrede açıklanan onuncu probleme dayanan ve 1928 yılındaki Bolonya kongresinde tam anlamıyla tanımlanan, (Casti, 2000, 136) ve *karar verme problemi* olarak adlandırılan bu son problemle Hilbert herhangi bir matematik probleminin çözümü için algoritmik bir yöntem bulunup bulunmadığını, daha doğrusu böyle bir yöntemin ilke olarak var olup olmadığını sorgulamaktaydı[10] (Penrose, 2015, 57).

3.1. Gödel ve Turing'in Hilbert Formalizmine Getirdiği Sınırlar.

Hilbert 1930'lara kadar çözülemeyen bu üç problemin tümünün de cevaplarının evet olduğuna güvenini belirtiyordu. Yani matematik tamdı, tutarlıydı ve herhangi bir matematiksel önermenin doğru veya yanlış olduğuna karar verebilecek bir evrensel algoritma olmalıydı. Ancak 1930'da Gödel, *eksiklik teoremi* ile Hilbert'in iyimserliğine son verdi. Gödel'e göre eğer ikinci sorunun cevabı evet ise yani matematik tutarlı ise birinci sorunun yani matematik tam mıdır? Sorusunun cevabı hayır olmak zorundaydı (Mitchell, 2009, 58-60). Aristoteles'ten sonra gelmiş en büyük mantıkçı olarak kabul edilen Gödel'in eksiklik teoreminin ispatı Giritli Epimenides'in bütün Giritliler'in yalancı olduğunu iddia ettiği bir paradoksa dayanır[11]. Buradan hareketle ama tamamıyla aksiyomatik bir yöntemle Gödel, Hilbert'in tamamen sistematik bir matematik yaratma planının gerçekleştirilemeyeceğini göstermiştir.

Görüldüğü gibi iktisat ve fizikten önce matematiğin kendisi bir biçimselleşme, formalleşme sürecinden geçmiştir. Ancak Gödel'in 1931'deki çalışması ile matematiksel akıl yürütmenin kusursuz bir biçimde biçimselleştirilemeyeceği de açığa çıkmıştır. Bütün matematiksel gerçekliği kapsayacak, bir kurallar kümesi üzerinde anlaşıp matematiğin tümü için biçimsel bir aksiyomatik sisteme sahip olunacak bir yol yoktur (Chaitin, 2004). Gödel (2010, 23) matematiğin daha fazla kesinlik yönündeki gelişiminin, biçimsel bir yapıya dönüşmesine yol açtığını, ispatlamaların bir kaç mekanik kural izlenerek yapılabilir hale geldiğini, bu aksiyom ve çıkarım kurallarının biçimsel olarak ifade edilebilen bütün matematiksel sorulara karar vermek için yeterli olduklarının zannedildiğini,

---

pozitif tam sayı çözümünün olmadığını iddia etmiştir. Bilgisayarların kullanılmaya başlanmasıyla deneme yoluyla bu iddia çok büyük sayılar için desteklenmiş ama ancak 1994'te Wiles tarafından teorik olarak ispatlanabilmiştir.

[10] Hilbert'in matematiksel teoremleri çözmek için geliştirmeyi önerdiği evrensel bir algoritma yaklaşımı, mantık, küme teorisi ve sayı teorisinin birleştirilmesini gerektiriyordu. Velupillai'nin (2011) ifadesiyle bu poroje Frege tarafından başlatılmış, Russell tarafından rotası değiştirilmiş, Whitehead tarafından yeniden yapılandırılmış, Gödel tarafından raydan çıkarılmış, Zermelo, Frenkel, Bernays ve von Neumann tarafından restore edilmiş Church tarafından sarsılmış ve Turing tarafından yok edilmiştir.

[11] Eğer önerme doğruysa yani Giritliler yalancıysa, kendisi de Giritli olan Epimenides yalan söylüyordur, yani aslında Giritliler yalancı değillerdir. Tersinden başlarsak bu önerme doğru değilse Giritliler yalancı değillerse Epimenides'in iddiası doğru olmalıdır ki bu da Giritlilerin yalancı olmalarını gerektirir

kendisinin ise aksiyomlardan hareketle karar verilemeyecek görece basit problemler olduğunu gösterdiğini ifade eder. Gödel'in teoremi doğru olanla ispatlanabilir olanın aynı şeyler olmadığını göstermiştir (Casti & DePauli, 2004, 28). Bununla birlikte Gödel'in eksiklik teoremi doğru veya yanlış oldukları ispatlanamayacak önermelerin varlığından söz ederken ispatı var olanlar için bir şey söylemez. Pratikte matematikçiler belirli teoremlerle ilgilenirler olanaklı olan bütün teoremlerin tutarlılığı ile değil. Dolasıyla Gödel'e rağmen matematikçilerin çoğu bazı temel yasalardan yola çıkarak teoremler ispat etmeye devam etmişlerdir.

Gödel'in teoremi, Turing ve on Neumann gibi dönemin büyük beyinlerini de konu üzerine düşünmeye sevketmiştir. 1935'de Turing, Hilbert'in üçüncü sorusu üzerine yoğunlaşmıştır. Ancak bunun için öncelikle algoritma kavramını yeniden tanımlaması gerekmektedir. Leibniz'in sezgisini takip ederek insan zihninin hesaplama süreçlerini taklit ettiğini düşündüğü düşünsel bir makine geliştirmiştir. Bu makine programlanabilir elektronik bilgisayarlar için bir ilk adım olmuştur (Mitchell, 2009, 61). Turing makinesinin sonlu sayıda komuttan oluşan bir algoritmayı takip ederek girdi verisi üzerinde gerekli işlemleri yapması ve bir sonuca ulaşıp durması beklenir. Bununla birlikte Turing, bazı Turing makinelerinin durma konumuna ulaşamadığını görmüştür. Bu sonsuz döngü olarak bildiğimiz durumdur. Bu noktada yeni bir soru gündeme gelmiştir. Verilen bir programın sonlu sayıda adımdan sonra durup durmayacağını önceden söyleyecek bir program, bir algoritma var mıdır? Durma problemi olarak bilinen bu probleminin özü, program ve girdi verisine uygulanabilecek ve herhangi bir aşamada programın durma koşulunun sağlanıp, sağlanmadığını önceden söyleyecek bir algoritmanın olup olmadığını sorgulamaktır. Turing, 1936'da Gödel'inkine benzer bir akıl yürütme ile herhangi bir Turing makinesinin durması ile ilgili karar verecek genel bir algoritmanın olmadığını göstermiştir (Penrose, 2015, 75). Casti (2000, 47) Turing'in durma teoreminin Gödel Teoremi'nin bilgisayar programı ile ifade edilmiş hali olduğunu söyler[12]. Hilbert'in karar verme probleminin de bir durma problemine çevrilebilir olduğu[13] göz önüne alınırsa Turing'in ulaştığı sonucun önemi daha iyi anlaşılır. Turing, Gödel'in açtığı yoldan giderek algoritmik hesaplamanın sınırlarını göstermiş ve bununla bağlantılı olarak bilgi içeriğine bağlı kompleksitenin ölçülmesinde kullanılabilecek bir yöntemin ilk adımlarını atmıştır. Bu anlamda matematik formel ve aksiyomatik bir disiplin olmaya doğru evrilirken kendi sınırları ile de yüzleşmiştir.

3.2. Matematik Felsefesi Çerçevesinde Formalizme Alternatif Bir Yaklaşım Olarak Sezgicilik.

Hilbert formalizm yoluyla matematiğin tutarlılığını ispatlamaya çalışırken, Brouwer'ın niyeti sadece açık, sezgisel olarak sağlaması yapılabilecek yapıları kullanarak, Kant, Kronecker ve Poincare'nin düşüncelerine dayandırılabilecek bir sezgisel matematik yaklaşımını geliştirmekti (Burton, 2011, s. 311). Poincare, Borel ve Lebesgue gibi matematikçileri erken-sezgici okul olarak tanımlayan (Brouwer, 1981 [1951]), Brouwer (1999 [1913]) genellikle Fransızlar tarafından savunulduğunu ifade ettiği sezgicilik yaklaşımının, genellikle Almanlar tarafından savunulduğunu söylediği formalizmin pek çok açıdan tamamıyla karşısında olduğunu, son yıllarda matematiksel kanunların geçerliliği konusunda bir uzlaşmaya ulaşmış olsalar da matematiksel tamlığın nerede var olduğu (nerede tanımlandığı) sorusuna farklı cevaplar verdiklerini sezgicilerin insan aklı, insan kavrayışı derlerken formalistlerin kağıt dediklerini ifade eder

Brouwer'e göre doğal sayılar bize tüm matematiğin başlangıç noktası olan temel bir sezgiyle verilir ve tüm matematik doğal sayıları temel almalıdır. Bir anlamda sezgicilik sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin sezgisel olarak doğal sayılar üzerine kurulabileceği iddiasındadır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, 376). Brouwer öncesinde Kronecker de matematikte tanım ve ispatların ancak sonlu adımda inşa edilebilir nitelikte ise geçerli olacağını iddia etmiştir. Sezgiciler tutarlılıktan çok sezgisel verileri ve zihinsel inşaların oluşturduğu kanıtları önemserler. Matematiği maddi

[12] Wolfram (2002, 1135), Gödel teoremini izleyen Turing tarafından hesaplanabilirliğin de sınırlarının belirlenmesi ile matematiğin içsel sınırlarının netleştiğini düşünmektedir

[13] Bir problemin çözümüne yönelik bir algoritmanın varlığının araştırılmasında ilk adım bu problemin sonlu sayıda aşamada çözülüp çözülemeyeceğinin belirlenmesidir. Hesaplanabilirlik ve karar verilebilirlik kavramları bununla ilişkilidir (Nabiyev, 2013, 45).

dünyadan bağımsız olarak ele alan Brouwer'e göre matematikte herhangi bir kavramın varlığı onun sezgisel olarak inşa edilebilmesi anlamına geliyordu (Brouwer, 1975, 96).

Sezgicilere göre iki değerli mantık yani bir önermenin doğru ya da yanlış olabileceğinin kabulü insan dilinin sonlu kümeler çerçevesindeki evriminin bir sonucudur, sonsuz elemanlı kümelere uygulandığında bazı paradoksların ortaya çıkması kaçınılmazdır. İspatı sonlu adımda inşa edilemeyen hiç bir önermenin doğru ya da yanlış olduğu sonucuna varılamaz. Bu anlamda klasik matematikte yer alan standart ispatların çoğu da geçersizdir. Sezgici yaklaşım klasik matematikte kabul gören pek çok ispatı geçersiz saydığından genelde sınırlayıcı bulunmuştur ve matematikçiler Brouwer'ın analizi tepeden tırnağa yeniden yapılandırma yönündeki çağrısını da çok aşırı bulmuş ve desteklememişlerdir (Yıldırım, 1988, 97-99). Bununla beraber Brouwer'in Debreu'nun kullandığı sabit nokta teoremi de dahil olmak üzere topoloji alanındaki çalışmalarında sezgisel yaklaşımı kullandığı da çok tartışmalıdır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, 376).

3.3.Mantıksal Pozitivizm ve Formalizm

Formalizmin 20. yüzyılın geri kalanında matematik felsefesinde başlayan serüvenini fizik ve iktisat da dahil pek çok disipine yaygınlaştırmasının altında, dönemin hakim bilim felsefesi yaklaşımı *mantıksal pozitivizm* düşüncesinin savunucusu olan Viyana Okulu'nun da tek bir çıkarımsal metoda sahip, formel mantıksal analiz ile kodlanmış, tek bir bilim hedefini destekliyor yatmaktadır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, 380). Lakatos formalizmi, mantıksal pozitivist felsefenin bir dayanağı olarak tanımlamış ve mantıksal pozitivizmin dogmalarının matematiğin tarihi ve felsefesi için zararlı olduğunu ifade etmiştir. Ona göre felsefenin yol göstericiliği olmadan matematik tarihi körleşirken, matematik tarihinin merak uyandıran olaylarına sırtını dönen matematik felsefesi de boştur (Lakatos, 1976, 2-3).

Popper'in katkılarından sonra mantıksal pozitivizm bilim felsefesindeki hakim konumunu kaybetmiş olsa da bunun matematik felsefesi üzerinde büyük bir etkisi olmamıştır. Bu noktada Polya ve Popper'in takipçisi olan Lakatos'u ayrı tutmak gerekir. Lakatos başlangıç ilkelerinden inşa edilen bir sistem yerine matematiği problem ve varsayımlara dayanmakla birlikte tartışmalarla gelişen dinamik bir süreç olarak ele alır. Lakatos'a göre matematik de doğa bilimleri gibi yanlışlanabilirdir. Karşıt örneklerin baskısı altında yenilenir ve gelişir. İspat sürecinin her adımı eleştiriye açıktır. Lakatos Matematiğin Popperci felsefesinin mümkün olduğunu iddia etmekle birlikte matematik felsefesini yanlışlanabilirlik temelinde yeniden inşa etmeye kalkışmamıştır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, 380-387). Bu nedenle de Lakatos'un yaklaşımı matematik felsefesinde bir okul haline gelememiştir.

4. Algoritmik ve Hesaplanabilir Matematik ve İktisada Olası Yansımaları

20 yüzyıl iktisadının büyük oranda 19. yüzyılın sonlarında matematiğin formalist felsefesi tarafından şekillenen yaklaşım tarafından baskılandığını ifade eden Boylan ve O'Gorman, (2018, viii), her ne kadar iktisat metodolojisinin herhangi bir matematik felsefesi tarafından belirlenmesi gerektiğini iddia etmeseler de Debreu'nun neo-Walrasçı programında yansımasını bulan bu Hilbertçi formalist yaklaşımın aksine Brouwer'in sezgiciliğinin iktisat için daha tatmin edici bir felsefi temel sunduğunu ifade etmektedirler. Boylan ve O'Gorman, (2018, 2) matematik felsefesini iki alt grupta ele alırlar. Debreu ve diğer genel denge teoricilerinin kullandığı, Hilbert – Bourbaki geleneğini izleyen formalistler tarafından aksiyomatik bir sistem halinde yapılandırılmaya çalışılan klasik matematik ve başlangıcı Poincare ve Brouwer'e götürülen sezgicilik. Sezgicilere göre matematik zaman sınırlı insan zihni tarafından yatartılır ve bu yüzden de algoritmik metod tarafından belirlenir. Sezgisel matematik klasik matematiğin sonsuzluk çıkmazlarını reddeder. Genelllikle iktisadın ya da herhangi bir başka disiplinin matematisekleştirilmesinin sadece tek bir yolu olduğu varsayılır. Oysa Hilbertçi formalistler ve Brouwerci sezgiciler arasındaki çatışma iktisatçılar için alternatif bir matematik kullanımı anlamına da gelebilir. Yine Boylan ve O'Gorman'a göre (2018, xi) algoritmik olmayan bir modelin karar verme süreçlerinin zaman aldığı ekonomik sistemlere uygulanması mümkün değildir. Bu anlamda ekonomide kullanılacak matematiksel modellemenin *hesaplanabilir matematikle,* Brouwercı sezgisel yaklaşımın makul bir sentezi olması yerinde olacaktır.

Brouwer'ın matematik felsefesinde sezgisel bir devrim yaratna girişimi başarıya ulaşmamış ve matematikçilerin çoğu klasik matematik çerçevesine sadık kalsalar da 1930'larda ki gelişmeler klasik matematiğin tutarlı, tam ve karar verilebilir bir aksiyomatik bir sistem olarak kabul edilmesindeki problemleri ortaya sermiştir. İşte bu süreçte yaşanan olaylar klasik matematiğin özel bir dalı olarak *hesaplanabilir matematiğin* de temelini atmışlardır. Bu açıdan Gödel, Turing ve Church hesaplanabilir matematiğin ataları olarak kabul edilebilir. Gödel, tutarlılık ve tamlık arasındaki ödünleşmeyi yani ikisinin aynı anda olamayacağını gösterirken Turing ve Church klasik aksiyomatik matematiğin doğruluğuna algoritmik olarak karar verilemeyecek önermeler de içerdiğini ispatlamışlardır. Hesaplanabilir matematik bu anlamda klasik matematiğin doğruluğuna algoritmik olarak karar verilebilen kısmı olarak tanımlanabilir. Hesaplanabilir matematik, sezgici matematik gibi algoritmik matematiksel süreçlere vurgu yaparken, sezgici matematikten farklı olarak klasik mantığı kullanır. Bu anlamda hesaplanabilir matematik, klasik matematiğin kendisini algoritmik süreçlerle sınırlandırmış bir alt dalıdır. Gödel ve Turing sonrasında klasik matematik algoritmik olarak doğruluğuna karar verilebilen ve verilemeyen teoremler olarak ikiye ayrılmıştır. Hesaplanabilir matematiğin gelişimindeki en önemli aşama 1930'larda Gödel Turing ve Church tarafından klasik matematikte doğruluğuna karar verilemeyen önermelerin var olduğunun ispatıdır (Boylan & O'Gorman, 2018, 3, 166).

Boylan ve O'Gorman (2018, 178) iktisadın formalizasyonunu için sezgici veya klasik matematikten hangisinin daha uygun olacağı sorusunu sormakla birlikte, klasik matematiğin alternatifinin Brouwer ile anılan ve herhangi bir teorinin matematikselleştirilmesinin ancak bir yolu olabileceğini söyleyen katı sezgicilik yerine Troelstra ve van Dalen tarafından tanımlanmış *pragmatik sezgici felsefe* olabileceğine dikkat çekerek bir anlamda metodolojik bir çoğulculuğu savunmaktadırlar. Pragmatik sezgicilik, sezgisel matematiğin felsefi temelini göz ardı eder ve klasik matematikle sezgici matematiğin barış içinde birlikte yaşayabileceklerini iddia eder. Genellikle klasik matematiği ve Hilbert, Bourbaki formalizmini savunanlar bu tür çoğulcu bir perspektife sahip değilken en azından pragmatik sezgiciler belki de alternatif bir formalizmi geliştirmemiş olduklarından, birlikte varolma vurgusunu yapmaktadırlar. Matematik felsefesinde çoğulcu yaklaşımı benimseyenler sezgici olsun veya olmasınlar, matematiksel teorilerin sunumundaki tekbiçimciliğin ve türdeşliğin teoriler arasında karşılaştırma yapılmasına izin verdiğini düşünmekle birlikte, Bourbaki gibi formalizm savunucularından farklı olarak bu türdeşliğin aynı zamanda bazı önemli noktaların gözden kaçmasına neden olabaileceğini de düşündüklerinden bu konuda ısrarcı değildirler (Friend, 2014, 87).

Hesaplanabilirlik ele alınan bir problemin ya da bir önermenin doğruluğunun sonlu sayıda adımda bir algoritma yardımıyla çözülüp çözülemediği ile ilgilidir. Bu anlamda algoritmik yaklaşımın matematik tarihinde oynadığı role de kısaca bakmak yerinde olacaktır.

Matematik Antik Mısır ve Babil'den bu yana kendi tarihinin büyük bölümünde algoritmik bir doğaya sahipti. Al-Khwarizmi'nin (*El Harezmi*) 9. yüzyıldaki çalışmalarından Cardano ve Lagrange'a cebir de temelde denklemlerin çözülmesi için geliştirilmiş algoritmalar yolıuyla ilerlemiştir (Avigad & Brattka, 2012). Bu noktada *algoritmik matematik* kavramını kendi karşıtı olarak tanımlanan *diyalektik matematik* kavramı ile birlikte ele almak uygun olur. Bu iki terim matematik felsefesinde sıklıkla kullanılan terimler değillerdir. Bilindiği kadarıyla ilk defa Peter Henrici tarafından 1973'deki bir konuşması sırasında kullanılmışlardır. Henrici diyalektik matematiğin kesin bir şekilde mantıksal bir bilim olarak, algoritmik matematiği ise problem çözmede kullanılan bir araç olarak tanımlamıştır[14] (Siu, 2002). Bu sınıflandırmaya göre Mısır, Babil ve Antik Doğu matematiği algoritmik bir yapıdayken, mantıksal ve tümdengelimci olarak tanımlanan diyalektik matematik Yunan kaynaklıdır (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995, 198). Antik Yunanlılar büyük oranda Mısır'dan ve Babil'den aldıkları geometri ağırlıklı matematiği günlük hayatta

[14] Algoritmik matematik uygulaması olarak polinom bölmesinde kullanılan Horner metodu ve lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan Gaussian, eliminasyon-indirgeme metodu sıklıkla örnek olarak verilir (Maurer, 1984) (Hougardy & Vygen, 2016). Yine ikinci ve üçüncü dereceden polinom denklemlerin köklerini belirlerken kullandığımız formüller algoritmik yapıdadırlar.

karşılaşılan pratik problemlerin çözümünde kullanılan bir araç olmaktan çıkarıp bir düşünce yöntemi haline getirmişler, mantıksal bir metoda dönüştürmüşlerdir (Bramlett & Drake, 2013). Bir anlamda geometri ve matematik bu dönemde doğruluğu deneyimlere dayanan ampirik önermeler yığını olmaktan çıkıp doğruluğu mantıksal yöntemle ispatlanan bir sistem niteliği kazanmış, Mısırlıların muhtemelen gözlemlere dayanan tümevarımsal uslamlamayla geliştirdikleri (Barker, 2003, 34) disiplinden tümdengelimsel bir disipline dönüşmüştür. Bu anlamda algoritmik – diyalektik matematik sınıflandırmasının da aslında benzer bir temelde yapıldığı ve eski bir sınıflandırmayı yeni kavramlarla tekrarladığı söylenebilir. Bununla birlikte diyalektik matematiğin algoritmik matematiğin yerine geçtiğini iddia etmek de mümkün değildir, Roma ve erken ortaçağ dönemlerinde matematik bir nevi suskunluk içine girdikten sonra Al-Khwarizmi'nin düşüncelerinin İspanya üzerinden islam dünyasından batı dünyasına yayılması ile matematik yeniden algoritmik temelde gelişmeye başladıysa da (Korte, 1985) zaman içinde diyalektik matematik ana akım haline gelirken algoritmik matematik ancak varlığını sürdürmüş, matematiksel önermelerin bir kısmı algoritmik içeriklerini korumuşlardır. Ancak 19. yüzyılın sonundan itibaren çok az veya hiç algoritmik içeriği olmayan (diyalektik veya varoluşsal) bir matematikten söz edilebilir (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995).

Sonuç: Algoritmik ve Hesaplanabilir Matematik İktisadın Matematikleştirilmesinde Olumlu Bir Rol Oynayabilir mi?

Ne matematikçiler ne de fizikçiler temel olarak Hilbert formalizminden vazgeçmemişken Boylan ve O'Gorman'ın, (2018, 184) Gödel ve Turing'in çalışmalarının Debreu'nun iktisada uyguladığı formalist felsefesinin altını oyduğunu ancak Debreu'nun bunu farkında olmadığını iddia etmeleri bir bakıma haksızlık olarak değerlendirilebilir.

Aslında aksiyomatikleşme ve formalleşme süreci ne matematik ve fizik ne de kısmen iktisat için kesintisiz ve tartışmasız bir süreç olmasa da yıllar içinde yol almaya devam etmiştir. Matematikte **Gödel** ve **Turing**, fizikte **Einstein** [15] aksiyomatik yapıların tutarlılıklarını/tamlıklarını sorgulamışlarsa da toptan bir değişime neden olmamışlardır. *Genel Denge Teorisi*'nin Arrow ve Debreu'nun çalışmalarıyla şekillenen evresi ile birlikte yerleşik/ana akım iktisat da benzer bir yol izlemiştir. İktisadın bu süreçte karşılaştığı en önemli sorgulama, rasyonel ve fayda maksimizasyoncu bireylerin kişisel talep fonksiyonlarının bir araya gelmesi ile talep yasasına uyan bir toplam talep fonksiyonun elde edilmesinin garanti olmadığını iddia eden ve Düppe'nin (2009, 295) deyimi ile Gödel'in matematikte yol açtığı krizin bir benzerine iktisatta yol açma potansiyeline sahip olan Sonnenschein, Mantel, Debreu teoremi ile (Keen, 2011, 53-58) Sraffa'nın marjinal değer teorisine getirdiği eleştiridir (Elsner, Heinrich, & Schwardt, 2015, 147)[16].

Ekonomik süreçlerin zaman sınırlı doğaları nedeniyle ekonomik bir dengenin varlığının ispatının minimum koşulu bu ispatın sonlu adımda yapılabilmesidir. Debreu'nun dengenin varlığı ispatı bu minimum koşulu sağlamamakta bu yüzden Turing'in kriterlerine gore algoritmik olarak doğruluğuna karar verilemeyen önermeler sınıfında kalmaktadır (Boylan & O'Gorman, 2018, 285). Benzer şekilde talep fazlası fonksiyonunun da algoritmik olarak belirlenemeyeceği iddia edilmektedir (Velupillai K. V., 2006). Velupillai'nin algoritmik içeriklerini göz önüne alarak yaptığı analize göre denge fiyat vektörünün varlığı da karar verilemez bir önermedir (Zambelli, 2010). Velupillai daha da detayına girerek Debreu'nun *Theory of Value* çalışmasında otuzun üzerinde önerme olduğunu ancak bunların hiçbirisinin algoritmik olmadığını bu yüzden de bir bilgisayar tarafından ispatlanamayacaklarını söyler (Velupillai K. V., 2011). (Velupillai K. V., 2003).

Velupillai (2011) matematiğin temelerine dair yapılmış tartışmalardan hareketle, iktisat

[15] Einstein, Podolsky ve Rosen (1935) kaleme aldıkları bir makalede bir düşünce deneyi üzerinden tamlık kriterinin kuantum mekaniği tarafından sağlanmadığı iddiasında bulunmuşlar, bu iddia fizik çevrelerinde hararetli bir tartışmaya neden olmuştur (Öğüt, Kuantum Teorisi - Matematiksel Formalizm ve Genel Denge İktisadı, 2017).

[16] Guerrien'in (1999, 57-60) ayrıntılı bir şekilde ele aldığı gibi dengenin sağlanması için bir malın fiyatı arttığı zaman o mala ait olan talep fazlasının azalması, diğer malların fiyatı arttığı zaman ise talep fazlasının artması gerekir yani mallar arasında (gelir etkisini de dikkate almak üzere) genel bir ikame ilişkisi söz konusudur. Oysa Debreu'nun tanımladığı talep fazlası fonksiyonu bu ikame edilebilirlik özelliğini yansıtacak bir özelliğe sahip değildir.

teorisinde algoritmik bir devrim yapılabileceği, klasik matematik çerçevesinde aksiyomatikleştirilmiş iktisat teorilerinin algoritmik bir içerikle yeniden tanımlanabilecekleri ve bu yolla iktisadın mistisisizmden ve subjektivizmden kurtarılıp uygulamalı bir bilim haline getirilebilceği iddiasındadır. İktisatta matematik kullanımının tek bir yolu olmadığının ve matematik felsefesi çerçevesinde tartışılmış olan alternatif yöntemlerin de var olduğunun bilinmesi, Hilbert, Bourbaki, Debreu çizgisinin formel aksiyomatik yaklaşımını eleştirmekle birlikte iktisadın Smith'den itibaren fizik ile kurduğu ilişkisini sürdürmesi gerektiğini bunun için de bir şekilde matematik kullanımından uzak durulamayacağını düşünen iktisatçılar için bir başlangıç noktası olma potansiyeli taşımaktadır.

Referanslar

Acerbi, F. (2013). Aristotle and Euclid's Postulates. *The Classical Quarterly, 63*(2), 680-685.

Atmanspacher, H., & Primas, H. (2005). Epistemic and Ontic Quantum Realities. *Foundations of Probability and Physics., 35*(10).

Avigad, J., & Brattka, V. (2012). Computability and analysis: the legacy of Alan Turing. R. Downey (Dü.) içinde, *Turing's Legacy* . Cambridge University Press.

Barker, S. (2003). *Matematik Felsefesi.* (Y. Dursun, Çev.) Ankara: İmge Yayınevi.

Beck, G. (1945). Mathematical Formalism and Physical Picture . *Philosophy of Science Association, 12*(3).

Bishop, E. (1975). The Crisis in Contemporary Mathematics, 2(4), 507-517. *Historia Mathematica., 2*(4), 507-517.

Blaug, M. (1992). *The Methodology of Economics.* Cambridge University Press. .

Blaug, M. (1997). *Not Only an Economist.* Edward Elgar Publishing Limited.

Border, K. C. (1999). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory.* Cambridge University Press. .

Borel, A. (1998). Twenty Five Years with Nicholas Bourbaki 1949-1973,. *Notices of American Mathematical Society.*

Bostock, D. (2009). *Philosophy of Mathematics: An Introduction.* New York: Wiley Blackwell.

Boylan, T. A., & O'Gorman, P. F. (2007). Axiomatization and Formalism in Economics. *Journal of Economic Surveys, 21*(3), 426-446.

Boylan, T. A., & O'Gorman, P. F. (2008). Kaldor on Debreu:The Critique of General Equilibrium Reconsidered. *Working Paper No. 0138 National University of Ireland.*

Boylan, T. A., & O'Gorman, P. F. (2018). *Philosophy of Mathematics and Economics.* London and New York: Routledge.

Bramlett, D., & Drake, C. (2013). A History of Mathematical Proof: Ancient Grece to the Computer Age. *Journal of Mathematical Science § Mathematics Education, 8*(2), 20-33.

Brouwer, L. E. (1975). *Philosophy and Foundations of Mathematics.* (A. Heyting, Dü.) Amsterdam. North Holland Publishing company.

Brouwer, L. E. (1981 [1951]). Lectures on Intuitionism: Historical introduction and Fundamental Notions. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism.* içinde Cambridge University Press.

Brouwer, L. E. (1999 [1913]). Instutionism and Formalism . *Bulletin of the American Mathematical Society, 37*(1), 55-64.

Bulutay, T. (1979). *Genel Denge Kuramı .* Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics* . Mc Graw Hill.

Carl, J. P. (1998). Brouwer versus Hilbert: 1907 - 1928. *Science in Context, 11*(2), 291-325.

Casti, J. L. (2000). *Beş Altın Kural: 20 Yüzyıl Matematiğinin Önemli Teorileri .* (N. Arık, Çev.) Sabancı Üniversitesi Yayınları.

Casti, J. L., & DePauli, W. (2004). *Gödel Mantığa Adanmış Bir Yaşam.* (E. Akça, Çev.) İstanbul Kabalcı Yayınevi.

Chaitin, G. J. (2004). Matematiğin Temelleri Üzerine Uyuşmazlık Yüzyılı. B. Gür (Dü.) içinde, *Matematik Felsefesi* (B. Gür, Çev.). Orient Yayınevi.
Corry, L. (2004). *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1818).* Springer.
Corry, L. (2006). On the Origins of Hilbert's Sixth Problem: Physics and the Empircist Approach of Axiomatization,. *Proceedings of International Congress of Mathematicians,.* Madrid, Spain.: European Mathematical Society.
Costa, M. L. (1998). *General Equilibrium Analysis and the Theory of Markets.* Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited.
Courant, R. (1968). Mathematics in the Modern World. M. Kline (Dü.) içinde, *Mathematics in the Modern World,.* Freeman and Company.
Çakır, N. (1995). Bilim Dünyasından bir Portre: Henri Poincare . *İstanbul Üniversitesi sosyal Bilgiler Fakültesi Dergisi*(11).
Çakır, N. (2010). Gerard Debreu. *Nobelin İzinde İktisat Kuramının Gelişimi.* içinde İTO Yayınları.
Düppe, T. (2007). Gerard Debreu from Nicolas Bourbaki to Adam Smith. European Conference on the history of Economics. *uropean Conference on the history of Economics.*
Düppe, T. (2009). *The Phenomenology of Economics.* Haveka BV. .
Düppe, T. (2010). Debreu's Apologies for Mathematical Economics After 1983. *Erasmus Journal for Philosophy and Economics, 3*(1).
Düppe, T., & Weintraub, E. R. (2014). *Finding Equilibrium.* Princeton: Princeton University Press.
Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (1995). *The Mathematical Experience.* Birkhauser.
Debreu, G. (1982). *Mathematical Economics at Cowles.* http://cowles.econ.yale.edu/archive/reprints/50th-debreu.htm. adresinden alındı
Debreu, G. (1984). Economic Theory in the Mathematical Mode, . *The American Economic Review, 74*(3), 267-278.
Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?
Elsner, W., Heinrich, T., & Schwardt, H. T. (2015). *The Microeconomics of Complex Economies.* Elsevier.
Friend, M. (2014). Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics . *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics Logic, Epistemology, and the Unity of Science* (s. 79-100). içinde
Gödel, K. (2010). *Principia Mathematica.* (Ö. Ekin, Çev.) İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi.
Gloria – Palermo, S. (2010, March). Introducing Formalism in Economics: The Growth Model of John von Neumann. *Panoeconomicus*(2).
Gribbin, J. (2008). *Schrödinger'in Yavru Kedileri.* (N. Çatlı, Çev.) İstanbul: Metis.
Gueerien, B. (1999). *Neo-Klasik İktisat.* (E. Tokdemir, Çev.) İstanbul: İletişim Yayınları.
Hersh, R. (1997). *What is Mathematics Really?* . Oxford University Press. .
Hersh, R. (1998). Some Proposals for Riviving the Philosophy of Mathematics. T. Tymoczko (Dü.) içinde, *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press.
Hilbert, D. (2004). Matematiğin Temelleri. B. Gür (Dü.) içinde, *Matematik Felsefesi* (B. Gür, Çev.). Orient Yayınevi.
Hougardy, S., & Vygen, J. (2016). *Algorithmic Mathematics.* Springer.
Jabs, A. (1992). An Interpretation of the Formalism of Quantum Mechanics in Terms of Epistemological Realism. . *The British Journal for the Philosophy of Science, 43*(3), 405-421.
Jafee, W. (1983). *WIilliam Jafee's Essays on Walras.* (D. A. Walker, Dü.) Cambridge University Press.
James, I. (2002). *Remarkable Mathematicians: From Euler to Von Neumann.* Cambridge University Press.
Kaldor, N. (1972). The Irrelevance of Equilibrium Economics. *The Economic Journal, 82*(328), 1237-1255.

Keen, S. (2011). *Debuking Economics.* London: Zed Books.
Kirman, A. (2011). Walras Unfortunate Legacy. P. Bridel (Dü.) içinde, *General Equilibrium Analysis A Century after Walras.* Routledge Studies in the History of Economics.
Koopmans, T. (1954). On Use of Mathematics in Economics . 36(4), 377-379. *The Review of Economics and Statistics, 36*(4), 377-379.
Korte, B. (1985, Jan). Algorithmic Mathematics Versus Dialectic Mathematics. *The College Mathematics Journal, 16*(1).
Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* (J. Worrall, & E. Zahar, Dü) Cambridge University Press .
Mass-Colell. (1985). *The Theory of General Economic Equilibrium.* . Cambridge University Press, New York. .
Matiyasevich, Y. V. (2000). *On Hilbert's Tenth Problem. Expository Lectures 1.* Pacific Institute for the Mathematical Sciences, University of Calgary,: http: //www.mathtube.org/sites/default/files/lecture-notes/Matiyasevich.pdf. adresinden alındı
Maurer, S. (1984, September). Two Meanings of Algorithmic Mathematics. *The Mathematics Teacher , 77*(6), 430-435.
McCloskey, D. (1994). *Knowledge and Persuasion in Economics.* Middleborg College Economic Discussion Paper, No:03–27,, Middleborg College Economic Discussion Paper,. Cambridge University Press,.
Merzbach, & Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics.* John Wiley.
Mirowski, P. (2002). *Machine Dreams.* New York: Cambridge University Press.
Mitchell, M. (2009). *Complexity: A Guided Tour* . Oxford University Press.
Mutoh, I. (2003). Mathematical Economics in Vienna Between the Wars. *Advances in Mathematical Economics*(5), 167-195.
Nabiyev, V. (2013). *Algoritmalar.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.
Nuriyev, U. G., & Sadıgova, H. G. (2002). Hesaplanabilirlik. *11*(5).
Öğüt, K. (2017). Kuantum Teorisi - Matematiksel Formalizm ve Genel Denge İktisadı. K. Öğüt, Ç. Boz, & A. D. Bozkurt (Dü) içinde, *İktisat ve Diğer Bilimler* (s. 43-94). İletişim Yayınevi.
Öğüt, K. (2018). Kompleksite İktisadı Çerçevesinde Keynes ve Keynesyen Makro İktisat: Metodolojik Bir Analiz. *Yildiz Social Science Review, 4*(2), 137-152.
Penrose, R. (2015). *Kralın Yeni Aklı.* (T. Dereli, Çev.) Tübitak Yayınları. .
Redman, D. (1993). Adam Smith and Isaac Newton. *Scottish Journal of Political Economy., 40*(2).
Reichenbach, H. (2014). *Kuantum Mekaniğinin Felsefi Temelleri.* (D. Ölçek, Çev.) Alfa Basım Yayım.
Reinhard, J. (1999). Abraham Wald's Equilibrium Existence Proof Reconsidered. *Economic Theory*(13), 417-428.
Rosen, H. K. (2015). *Ayrık Matematik ve Uygulamaları.* (Ö. A. Özbayoğlu, Çev.) Palme Yayıncılık.
Shojai, S. (1989). Gerrard Debreu. B. Katz (Dü.) içinde, *Nobel Laureates in Economic Sciences.* Routledge.
Siu, M.-K. (2002). *"Algorithmic Mathematics" and "Dialectic Mathematics": The "Yin" and "Yang" in Mathematics Education.* https://www.semanticscholar.org/paper/%22Algorithmic-Mathematics%22-and-%22Dialectic-The-%22Yin%22-Siu/e6d6e4b332425b3c255632d34eb8cd8d83aed32c. adresinden alındı
Skousen, M. (2007). *The Big Three in Economics.* M. E. Sharpe.
Smith, A. (1980). *The Principles Which Lead and Direct Philosophical Enquiries; Illustrated by the History of Astronomy. Adam Smith Essays on Philosophical Subject.* . Oxford University Press.
Stanfield, R. (1974, March). Kuhnian Scientific Revolutions and the Keynesian Revolution. *Journal of Economic Issues, 8*(1), 97-109.
Tobin, J. (2005). The Invisible Hand in Modern Macroeconomics. M. Fry (Dü.) içinde, *Adam Smith Legacy.*

Tubaro, P. (2016). Formalization and Mathematical Modeling, . H. D. Gilbert Faccarello (Dü.) içinde, *Handbook on the History of Economic Analysis* (Cilt 3). Edward Elgar .

Velupillai, K. V. (2003). *Essays on Computable Economics, Methodology and the Philosophy of Science.* Discussion Paper, Universita' Degli Studi di Trento - Dipartimento di Economia.

Velupillai, K. V. (2006). Algorithmic Foundations of computable general equilibrium theory'. *Applied Mathematics and Computation*(179), 360 - 369.

Velupillai, K. V. (2011, July). Towards an Algorithmic Revolution in Economic Theory. *Journal of Economic Surveys, 25*(3).

Weintraub, E. R. (2002). *How Economics Became a Mathematical Science.* Duke University Press.

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science.* Wolfram Media, Inc.

Yıldırım, C. (1988). *Matematiksel Düşünme.* İstanbul: Remzi Kitabevi .

Yıldırım, C. (1994). *Bilim Tarihi.* Remzi Kitapevi, İstanbul.

Zambelli, S. (2010). *Computable constructive and Behavioural Dynamics: Essays in Honour of Kumaraswamy (Vela) Velupilla.* Routledge.