

## MATEMATİĞİN ESTETİĞİ ÜZERİNE

### ON AESTHETICS OF MATHEMATICS

Cahit PESEN\*

**ÖZET:** Matematik, diziliş ve iç uyum ile karakterize edilen bir sanattır[1]. Matematik bir çok insan tarafından anlaşılması zor, sevimsiz bir ders olarak kabul edilmektedir. Matematik bir düşünme yolu olduğuna göre, matematik öğretmenlerimizin amacı, öğrenciye bilgi yüklemek değil, zihin gelişimine katkıda bulunmak olmalıdır. Ayrıca, öğrencilerin matematiğe karşı olumlu yaklaşım geliştirebilmeleri için matematiğin estetik yönünün ortaya konması yönünde çaba harcanmalıdır.

Bu makalenin amacı, matematik dersinin genel hedeflerinden olan "Matematiğe karşı olumlu tutum geliştirebilme" ve "Estetik duyguyu geliştirebilme" hedeflerinin kazandırılması çabasına katkıda bulunmaktır. Bu makalede, Matematiğin estetik yönünün keşfedilmesi amacıyla nasıl bir öğretim yaklaşımı içerisinde olunması gerektiği üzerinde durulmuştur.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER:** Matematiğin estetiği, matematik öğretimi.

**ABSTRACT:** Mathematics is a study of patterns and relationships [1]. Mathematics is regarded as an unlovable and a very hard subject to be understood by a lot of people. As Mathematics is being a way of thinking the aim of mathematics teachers shouldn't be to load knowledge to the students but to contribute to intellect developing. Besides they should strive to direct the students to develop positive manners for mathematics.

The purpose of this paper is to contribute the struggle of gaining "the ability of positive manner for mathematics" and of "the developing aesthetic feeling." which is considered as a one of the general target of mathematics. In this article we tried to find out how a teaching method should be followed so as to explore aesthetic way of mathematics.

**KEY WORDS:** Aesthetics of mathematics, mathematics teaching.

### 1. GİRİŞ

Matematik birçok insan tarafından kaçınılması gereken bir kabus olarak görülmektedir. İnsanların matematikten hoşlanmalarının ne-

deni, matematiğe doğru bakış açısının onlardan gizlenmiş olmasıdır[2]. Bir çok insan matematiğin karmaşık mantığını anlayacak kadar matematik kafasına sahip olmadığını düşünür.

Matematik kafasını belirleyici şeyin mantıkla, titizlikle veya cebirsel formüllerle işlem yapabilmekle ve hatta kat kat soyutlamaların ustalıklarla üstesinden gelme yetisiyle belki de fazla ilişkisi yoktur. Bunu en açık berraklıkla gören Fransız matematikçi ve filozof Julos-Henri Poincare olmuştur. Anıtsal yazıları yalnız matematikçiler ve filozoflar için değil, değişik alanlarda eğitim görmüş insanlarda da hedefleyen Poincare, matematiğe karşı "estetik duyarlılık"ın matematikçinin ruhunu belirlediğine inanırdı. Bu duyarlılık, matematik alanında "gerçek yaratıcı" olmak için gerekli olan bir "ince elek" işlevini yerine getiriyordu[2].

Matematiğin genel hedeflerinden bazıları, "Estetik duyguyu geliştirebilme", "Matematiğe karşı olumlu tutum geliştirebilme" ve "Matematiğin önemini kavrayabilme" dir. Bu hedeflere ulaşılabilmesi için matematiğin, estetik ile ilişkisinin ortaya konması gerekir. Matematiğin güzelliğini ve estetiğini tam algılamadan bunları gerçekleştirmek mümkün değildir.

Estetik kuram, insan tarafından yapılan veya meydana getirilen nesnelere arasında özel bir gruba ilgilidir veya daha iyi deyişle insan tarafından yapılmış olan şeylerin özel bir işlevi ile ilgilidir. Bu özel gruba giren şeyler, kendilerine estetik bir tavırla bakılması veya estetik olarak değerlendirilmesi mümkün olan şeylerdir[3]. Bunlardan biri de matematiktir.

\* Yrd. Doç. Dr., Dicle Üniversitesi, Siirt Eğitim Fakültesi, Sınıf Öğretmenliği ABD, Siirt

Estetik düşüncesini matematik olarak ele alan ve temellendirenler pisagorcular olmuştur. Onlara göre evrene hakim olan ve evren uyumunu sağlayan şey sayıdır, sayılar arası orantıdır. Bunun zorunlu sonucu da, evreni bilmek demek onun dayandığı sayı ve sayı ilgilerini bilmek demektir[4]. Estetiğin belirleyicileri, oran ve simetridir. Bu belirleme, pisagorculuğun etkisi altında kalan Platon'un ulaştığı son noktadır. Matematiğin temelinde de oran ve simetri yatmaktadır.

Sanat dünyasında hiçbir benzeri olmayan bir nesnelige sahip olmasına karşın, yaratıcı matematiğin güdüsü ve standardı bilimden çok sanatlara benzer. Matematiksel teoremlerin sınıflandırılmasında estetik kaygı hem mantıktan hem de uygulanabilirlikten üstün tutulur. Matematiksel idelerin değerlendirilmesinde kesin doğru olmasından ya da yararlı olma olasılığından çok güzellik ve zarafet etken olur[5].

Resim, müzik ve edebiyatta bulunan estetikten etkilenildiği gibi matematiğin estetiğinden de etkilenilebileceği unutulmamalıdır. Matematiğin, şiirde olduğu kadar belirlenmiş bir estetik değeri vardır[2]. Resim tuval, boya vb. den meydana gelir. Bir resimde estetik olarak kendine yöneldiğimiz şey renk birleşimidir[3]. Edebiyat düşüncelerin, fikirlerin belirli kurallar çerçevesinde yazılı veya sözlü olarak ifade edilmesidir. Müzik zamansal bir sıraya göre takdim edilen sesler ve duraklamalardan meydana gelen sanattır[3]. Bunların anlamları, ifade ettikleri şeyler, estetikdir. Müziğin ifade aracı dil ve notalar, edebiyatın ifade aracı dil ve kelimeler iken matematiğin ifade aracı da dil ve sembollerdir. Şiirler ahenkle yazılan sözcüklerden oluşur. Matematik ise sadece ahenkle yazılan sözcüklerle değil, zarif sembollerden de oluşur.

Bir estetik nesne ile estetik bir ilişki kurmamız sonucunda bizde bir haz meydana geldiği söylenebilir. Güzel bir filmi seyretmekten haz duyarız. Güzel bir romanı okumak hoşumuza gider. O halde estetik bir ilişki kurmamızın amacı bizde bir haz duygusu uyandırmak, hoşumuza gitmek ve bizi heyecanlandırmak olduğunu söyleyebiliriz[3].

Bütün estetik nesnelere farklı derecelerde mevcut olan bir özellik vardır ki bu özellik, yine varlık derecesine göre, bu sanat eserine estetik değeri kazandırır. Estetik değerle ilgili yararlı ve doğru bir ölçüt bulmak zordur. Estetik nesnenin özellikleri olarak söyledikleri bir sanattan diğerine de farklılık gösterir[3]. Matematikteki nesnelere estetik bakışla bakılabilmesi amacıyla matematikteki estetik nesnelere nasıl bulunabileceği üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

## 2. Matematiksel Düşüncenin Estetik Niteliğinin Ölçülebilmesi İçin Standartlar

Matematiğin bir dizi sıkıcı önemsiz uygulamalardan ibaret olmadığı gösterilmelidir. Matematiğin kullanımı ve uygulanabilirliğiyle birlikte estetik değerini vurgulayarak öğrenciler matematiğe yakınlaştırılabilir. Eğer matematiğin sunuluşu ve yazılışı estetik boyutu ortaya çıkarmak ve şiire, müziğe, resme karşı duyarlık göstermeye çalıştığımız gibi, öğrencilerde matematiğe karşı duyarlılığı geliştirecek şekilde çalışmalar yapıldığında, matematik hakkındaki düşünceler değiştirilebilir.

Matematiği öğrenirken ve bu konuda çalışırken, elementer düzeyde bile, daha önce araştırılmamış bir estetik yol gösterme kavramı vardır[6]. Buna, estetik değeri olan  $\sqrt{2}$ 'nin bir irrasyonel sayı olduğu örneği verilebilir.

*Teorem:*  $\sqrt{2}$  irrasyonel sayıdır.

*İspat:* Teoremin yanlış olduğunu, yani  $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel sayı olduğunu varsayalım. O zaman

$$\sqrt{2} = p / q$$

yazabiliriz. Burada p ve q aralarında asaldır.

Buradan,

$$\sqrt{2} q = p \text{ veya } 2q^2 = p^2$$

sonucu çıkar. O halde  $p^2$  bir çift sayıdır. Öyleyse p de bir çift sayıdır. Demek ki bir c tam sayısı için  $p=2c$  'dir. Bu nedenle,

$$2q^2 = (2c)^2 \text{ veya } q^2 = 2c^2.$$

Öyleyse,  $q^2$  çifttir; daha önce olduğu gibi, q da çifttir. Bunun sonucu olarak p ve q 'nun her ikisi de çift sayılardır ve bu nedenle 2 ile bölünebilirler. Bu, bizim p ve q'nun aralarında asal olmaları yolundaki varsayımımız ile çelişir. Öy-

leyse,  $\sqrt{2}$ 'nin rasyonel sayı olduğu varsayımımız yanlıştır. O halde,  $\sqrt{2}$  irrasyonel sayıdır.

Şimdi matematiksel estetiği biraz açalım. Matematiksel düşüncenin estetik niteliğinin ölçülebilmesi için standartlar olarak iki ilke belirlenmiştir[2].

**a) Minimal Tamlık (Minimal Completeness) :** Matematiksel bir N nosyonu (teorem, teoremin ispatı, denklem, eşitsizlik veya tanım gibi matematiksel nesne), matematiksel işlevini yerine getirmek için gerekli olan bütün özellikleri içerir, konu dışı hiçbir özellik içermezse, minimal tamlık ilkesi sağlanır.

**b) Maksimal Uygulanabilirlik (Maximal Applicability):** Matematiksel bir N nosyonu, eğer N dışındaki matematiksel nosyonlara geniş ölçüde uygulanabilir özellik içeriyorsa maksimal uygulanabilirlik ilkesi sağlanır.

Matematiksel bir nosyon eğer bir anlamda, tamam veya kendisine yeterli ise ve de fazladan hiçbir şey içermiyorsa, birinci ilke açısından onun estetik değeri vardır.

$\sqrt{2}$ 'nin irrasyonel sayı olduğunun ispatı, kendi içinde yeterli olduğundan minimallik ilkesi geçerlidir. Maksimallik ilkesinin sağladığı ise, ispat yönteminin,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$ , . . . 'nin de irrasyonel sayı olduğunu ortaya koymak için uygulanabileceğini görmekle anlaşılır.

Minimallik ilkesini sağlayıp maksimallik ilkesini sağlamayan durum için örnek vermek gerekirse; "Herhangi bir pozitif reel sayı ile o sayının tersinin toplamı 2'den küçük olamaz "

*Teorem:* Eğer  $x > 0$  ise  $x + 1/x \geq 2$  olur.

*İspat :*

$$(x-1)^2 \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse,

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

olur ve buradan,

$$x + 1/x \geq 2$$

elde edilir.

İspat kendi içinde yeterlidir. Çünkü herhangi bir reel sayının karesinin negatif olamayacağı ve

bir eşitsizliğin "yönü"nü iki tarafa eşit sayılar ilave etmekle ve pozitif sayılarla bölmekle değişmeyeceği dışında bir şey gerekmemektedir. Öyleyse minimal tamlık ilkesi geçerlidir.

Ancak maksimal uygulanabilirlik ilkesinin geçerli olmadığı kesindir. Sonucun kendisi çok özeldir. İlk eşitsizlik aniden ortaya konmaktadır. İspat doğru olmasına rağmen zarif denemez.

Ardışık sayıların toplamının  $n(n+1)/2$  formülü ile bulunabileceğini keşfettirmek için Gauss'un sekiz yaşındayken 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamını bulmadaki estetikten yararlanılabilir.

Öğretmenleri 1 'den 100 'e kadar olan sayıların toplamını bulmalarını istediğinde bütün arkadaşları

$$1+2=3, 3+3=6, 6+4=10, \dots$$

toplamları ile işe başlamış, fakat Gauss

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101+101+101+\dots+101+101+101 \end{array}$$

olduğundan aranan toplamın yüz kere yüzbir'in yarısı, yani olduğunu fark etmiştir.

Ardışık tek sayıların toplamının  $n^2$  formülü ile bulunabileceğini keşfettirmek için benzer bir yol takip edilebilir. Öğrencilerin "ilk yüz tek sayının toplamı nedir?" sorusunu çözmeye çalıştıklarını düşünelim. Bu soru bir hesap makinesiyle veya cebirsel formül ile çözülebilir. Fakat, matematikteki estetiğin yakalanabilmesi için bu sorunun cevabının bulunmasında aşağıdaki yöntem takip edilebilir.

Şimdi, ilk iki tek sayıyı toplayalım;

$$1+3 = 4$$

İlk üç, ilk dört ve ilk beş tek sayıyı toplayalım ve biraz düşünelim:

$$1 + 3+5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3+ 5+ 7 +9 = 25$$

Topamlardaki cevaplara bakıldığında 4, 9, 16, 25 sayılarının  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$  ile bağlantı kurulabilir.

İlk iki tek sayının toplamı  $2 \times 2$  olur.

İlk üç tek sayının toplamı  $3 \times 3$  olur.

İlk dört tek sayının toplamı  $4 \times 4$  olur.

İlk beş tek sayının toplamı  $5 \times 5$  olur.

İlk yüz tek sayının toplamı ne olur?  $100 \times 100$  olur.

Bu şekilde birkaç örnekten sonra öğrencilerin  $n^2$  genellemesine ulaşabilecekleri açıktır. Öğrencilerin matematikteki estetiği yakalayabilmeleri için bu tür çalışmalara yer verilmelidir.

Yukarıdaki ispat yöntemleri özel olduğundan bu ispatlarda minimallik ilkesinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (3)$$

..

toplamlarının tek bir yöntem ile ispat edilebileceğini gösterelim:

$$(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\dots+(n^2-(n-1)^2)=n^2 \quad (4)$$

$$(1^3-0^3)+(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\dots+(n^3-(n-1)^3)=n^3 \quad (5)$$

$$(1^4-0^4)+(2^4-1^4)+(3^4-2^4)+\dots+(n^4-(n-1)^4)=n^4 \quad (6)$$

Toplam notasyonunda, (4), (5), (6) formülleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) = n^2 \quad (4')$$

$$\sum_{k=1}^n (k^3 - (k-1)^3) = n^3 \quad (5')$$

$$\sum_{k=1}^n (k^4 - (k-1)^4) = n^4 \quad (6')$$

(4'), (5') ve (6') formülleri (1), (2) ve (3) formüllerinin ispatlarına götürür.

**(1) Formülünün ispatı;**

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1$$

Bu yüzden (4') formülü,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n^2$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k - n = n^2$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n k = n^2 + n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur.

**(2) Formülünün ispatı;**

$$k^3 - (k-1)^3 = k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$$

Bu yüzden (5') formülü,

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = n^3$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = n^3$$

Bu eşitliğin her iki yanını 2 ile çarparsak

$$6 \sum_{k=1}^n k^2 - 3n(n+1) + 2n = 2n^3$$

$$6 \sum_{k=1}^n k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) \\ = n(n+1)(2n+1)$$

Eşitliğin her iki yanını 6 ile bölersek

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

bulunur.

**(3) Formülünün ispatı;**

$$\sum_{k=1}^n (k^4 - (k-1)^4) = n^4$$

$$k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = n^4$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 - (2n^3 + 3n^2 + n) + (2n^2 + 2n) - n = n^4$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$$

Eşitliğin her iki yanını 4 ile bölersek

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

elde edilir. Toplam notasyonunun kullanılması ile gerçekleştirilen ispat yaklaşımları

$$\sum_{k=1}^n k^4, \sum_{k=1}^n k^5, \dots \text{ formüllerinin aynı şekilde ta-}$$

nımlanmasında uygulama avantajına sahiptir.

Bir başka örnek vermek gerekirse, limitlerdeki bazı belirsizlikleri yok etmek için kullanılan çarpanlara ayırma özelliği, minimallik ilkesini sağlarken, bütün belirsizlikleri yok etmek için kullanılan L'Hospital kuralı ise maksimal uygulanabilirlik için bir örnek oluşturabilir.

## SONUÇ VE ÖNERİLER

1. Resim, müzik ve edebiyata duyulan ilginin matematiğe de duyulabilmesi için matematik öğretiminde matematikteki estetiğin ortaya konulması ile mümkün olacaktır. Bu durum matematiğe karşı olumlu tutum geliştirecektir.
2. Matematikteki estetik öğrencileri harekete geçirmelidir. Öğretmenler, derslerde matematiğin estetik boyutunu vurgulamalıdır.

3. Ders kitapları matematiğin estetik boyutunu ortaya koyacak şekilde düzenlenmelidir.
4. Öğretmenler matematiksel düşüncelerin minimal tamlık ve maksimal uygulanabilirlik özelliklerine dikkat çekmelidirler.
5. Öğretmenler matematiksel düşüncelerin yatay ve dikey ilişkilerine dikkat çekerek bir öğretim gerçekleştirmelidirler.
6. Matematikteki nosyonların işlevi bizde estetik tepkiler uyandırmalıdır.

7. Matematikteki estetiğin öğrencilere hissettirilebilmesi için ilköğretimini ilk yıllarından itibaren öğretmenlerimiz sembollerini tahtaya geçirirken semboller arasındaki ilişkiye dikkat ederek yazmalıdırlar.

8. İlköğretimin ilk yıllarından üniversite yıllarına kadar matematiğin estetiğinin ortaya konulması yolunda ciddi ve sistematik bir çaba harcanmalıdır.

## KAYNAKÇA

- Reys, R.E., Suydam, M.N., Lindquist, M.M. and Smith, N.L., *Helping Children Learn Mathematics*, Allyn and Bacon, Boston, s:2, (1998)
- King, J.P., "Matematik Sanatı", Tübitak Yayınları, (1997).
- Arslan, A., "Felsefeye Giriş", Vadi Yayınları, s:128-143, (1994).
- Tunalı, İ., "Grek Estetik'i", Remzi Kitabevi, s:133, (1996).
- Lynn Steen, (ed.) "Mathematics Today", s:10.
- Seymore A. P., "The Mathematical Uncanscious", s:106.
- Liebeck, P., "How Children Learn Mathematics", Penguin, (1990).
- Öner, N. "Felsefe Yolunda Düşünceler", Milli Eğitim Basımevi, (1995).
- Priesley, W.M., "Calculus: An Historical Approach", Springer-Verlag New York, (1979).