Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 23, Sayı 3, 864-870, 2019

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 23, Issue 3, 864-870, 2019

DOI: 10.19113/sdufenbed.570825

$\mathbb{E}_2^5$ Yarı-Öklid Uzayındaki Biharmonik Hiperyüzeyler

Rüya YEĞİN ŞEN *[1]

[1]İstanbul Medeniyet Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, 34700, İstanbul, Türkiye
(ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2642-1722)

(Alınış / Received: 27.05.2019, Kabul / Accepted: 30.11.2019, Online Yayınlanma / Published Online: 30.12.2019)

Anahtar Kelimeler
Biharmonik hiperyüzeyler,
Yarı-Öklid uzay,
Yarı-Riemannsal altmanifoldlar,
Şekil operatörü

Özet: Bu çalışmada, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayının indeksi 2 olan biharmonik hiperyüzeyleri, ∇H gradyenti ışıksal olan H ortalama eğriliğine sahip olmaları, yani $\langle \nabla H, \nabla H\rangle = 0$ ve $\nabla H \neq 0$ koşullarının sağlanması varsayımı altında incelenmiştir. İlk iki bölümde problem tanıtılmış ve çalışmanın diğer bölümünde kullanılacak bazı temel tanım ve formüller hatırlatılmıştır. Ayrıca, 2 indeksli bir hiperyüzeyin şekil operatörlerinin tüm mümkün kanonik formları elde edilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, bu durumların her biri için hiperyüzeylerin bazı geometrik özellikleri araştırılmıştır. Özellikle, ∇H gradyenti ışıksal olan biharmonik hiperyüzeyin şekil operatörünün 2 olası kanonik formu olduğu elde edilmiştir. Hemen ardından, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında indeksli 2 ve ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan bir biharmonik hiperyüzeyin olmadığı ispatlanmıştır. Son bölümde ise, çalışmadan elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve tartışma bölümü verilmiştir.

Biharmonic Hypersurfaces in the Pseudo-Euclidean Space $\mathbb{E}_2^5$

Keywords
Biharmonic hypersurfaces,
Pseudo-Euclidean space,
Semi-Riemannian submanifolds,
Shape operator

Abstract: In this work, biharmonic hypersurfaces of index 2 in pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}_2^5$ are studied under the assumption of having mean curvature H whose gradient ∇H is light-like, i.e. $\langle \nabla H, \nabla H\rangle = 0$ and $\nabla H \neq 0$. In the first two sections, the problem is introduced and some basic definitions and formulas that we will use in other part of the paper are recalled. Moreover, all possible canonical forms of the shape operator of a hypersurface of index 2 are obtained. In the third section of this work, for each of these cases, some of geometrical properties of hypersurfaces is investigated. In particular, there are 2 possible canonical forms of the shape operator for a biharmonic hypersurface such that whose gradient ∇H is light-like are obtained. After that, the non-existance of biharmonic hypersurface of index 2 in pseudo-Euclidean space $\mathbb{E}_2^5$ with the light-like ∇H is proved. In the last section, the results from this work is summarized and the discussion part is given.

1. Giriş

$\mathbb{E}_s^m$ ile metrik tensörü

$$\tilde{g} = \langle \cdot,\cdot\rangle = -\sum_{i=1}^{s} dx_i^2 + \sum_{j=s+1}^{m} dx_j^2$$

şeklinde olan m- boyutlu, $s-$ indeksli yarı-Öklid uzayı gösterilsin. Özel olarak $s = 0$ alınırsa $\mathbb{E}_0^m = \mathbb{E}^m$ bir Öklid uzayı olur.
M, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayının n-boyutlu yönlendirilmiş bir altmanifoldu olsun ve M altmanifoldunun yer vektörü, ortalama eğrilik vektörü ve Laplace operatörü, sırasıyla, x, $\mathbf{H}$ ve Δ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\Delta x = -n\mathbf{H} \tag{1}$$

ile verilen Laplace-Beltrami formülü sağlanır. (1) denkleminden dolayı, M altmanifoldunun minimal olması için gerek ve yeter koşul $\Delta x = 0$ olması, yani, M altmanifoldunun koordinat fonksiyonlarının harmonik olmasıdır. M altmanifoldunun harmonik ortalama eğrilik vektörüne sahip ise,

$$\Delta\mathbf{H} = 0 \tag{2}$$

sağlanır ve (1) denkleminden bu denklemin

$$\Delta^2 x = 0. \tag{3}$$

denklemine denk olduğu görülür. Ayrıca, x yer vektörü (3) denklemini sağlayan altmanifoldlara biharmonik altmanifold denilir, [1]. Biharmonik altmanifoldların özellikleri ilk defa 1980'li yıllarda B.-Y. Chen tarafından incelenmiştir. Chen, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında biharmonik yüzeylerin minimal olduğunu göstermiştir. Bu sonuç ve genelleştirilmiş hali Dimitrić'in doktora tez çalışmasında verilmiştir, [2].

* *İlgili yazar: ruya.yegin@medeniyet.edu.tr*

Biharmonik altmanifoldların geometrileri incelenirken, bazı geometriciler tarafından, (3) denkleminin sağlanmasından daha zayıf bir koşul olan

$$(\Delta^2 x)^T = 0. \tag{4}$$

denklemini sağlayan altmanifoldlar göz önüne alınmıştır. Böyle altmanifoldlara ise bikonzörvatif altmanifold denir. Öklid ve yarı-Öklid uzaylarındaki biharmonik ve bikonzörvatif altmanifoldlar birçok geometrici tarafından çalışılmıştır, (örn. [3–8].

Diğer taraftan, (1) ile verilen Laplace-Beltrami denkleminden dolayı, M altmanifoldu minimal ise biharmoniktir. 1991 yılında, B.-Y. Chen, Öklid uzayında bunun tersinin de doğru olduğunu, yani Öklid uzayının her biharmonik altmanifoldunun minimal olduğunu iddia etmiştir, [6]. Bu hipotez, Chen'in Biharmonik Sanısı olarak isimlendirilir. Günümüze kadar, bu sanı çeşitli geometrik kısıtlamalar altında doğrulanmıştır, [5–8]. Bununla birlikte, Chen'in Biharmonik Sanısının doğruluğu günümüzde halen açık bir problemdir.

Diğer taraftan, $\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayında minimal olmayan biharmonik altmanifoldlar vardır [9]. Diğer bir deyişle, çevreleyen uzayın bir yarı-Öklid uzayı olması durumunda, biharmonik sanısı geçerli değildir. Bu durumdan dolayı, özellikle, $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski uzayında ve $\mathbb{E}_2^4$ yarı-Öklid uzayında biharmonik altmanifoldlar ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır, ([10–12]). Örneğin, Turgay tarafından [12] çalışmasında 5− boyutlu Minkowski uzayındaki biharmonik hiperyüzeyler incelenmiş ve bazı sınıflandırma sonuçları elde edilmiştir.

Bölüm 2'de anlatılacağı üzere, ∇H teğet vektörü bir yarı-Öklid uzayının bir M biharmonik hiperyüzeyinin esas doğrultularından biridir. Bu durumdan dolayı, teğet uzayının metrik tensörünün pozitif tanımlı olmaması durumunda, ∇H teğet vektörünün ışıksal olduğu alt durumun ayrıca incelenmesi gerektiği Turgay tarafından [13] çalışmasında vurgulanmıştır. Bu çalışmada, $\mathbb{E}_1^{n+1}$ Minkowski uzayındaki ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan ve en fazla 5 farklı asli eğriliğe sahip biharmonik bir hiperyüzeyin olmadığı gösterilmiştir.

Bu makalenin temel amacı, indeksli 2 olan yarı-Öklid uzaylarındaki ortalama eğrilinin gradyenti ışıksal olan biharmonik hiperyüzeylerin varlıklarının incelenmesidir. Bu doğrultudaki ilk adımlar Upadhyay ve Turgay tarafından [14] çalışmasında atılmıştır. Bu makalede $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli bikonzörvatif ve ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olmayan hiperyüzeylerin şekil operatörlerini elde etmişlerdir. Ayrıca, bikonzörvatif köşegenleştirilmiş şekil operatörüne ve 3 farklı asli eğriliğe sahip hiperyüzeyleri sınıflandırmışlardır. Yakın zamanda ise Upadhyay $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli bikonzörvatif hiperyüzeylerin şekil operatörlerini incelemiş ve Minkowski uzaylarında benzeri olmayan alt durumlardan ikisi dışındaki incelemeler tamamlanmıştır, [15]. Bu çalışmada ise öncelikle, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan 2 indeksli biharmonik hiperyüzelerin şekil operatörlerinin kanonik formları elde edilecektir. Ardından, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal, 3 farklı asli eğriliğe sahip biharmonik 2 indeksli bir hiperyüzeyin olmadığı ispatlanacaktır. Ayrıca, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğrilik vektörünün gradyenti ışıksal, 2 farklı asli eğriliğe sahip biharmonik 2 indeksli bir hiperyüzeyin de olmadığı elde edilecektir.

2. Ön Hazırlık

Bu bölümde, ileride kullanılacak temel tanım ve notasyonlar verilecektir. Ayrıca, temel teoremlerin ispatında kullanılacak olan önceki bulgulardan da bahsedilecektir.

2.1. Temel Tanımlar ve Formüller

$\mathbb{E}_s^m$ yarı-Öklid uzayındaki sıfırdan farklı bir v vektörüne, eğer $\langle v,v\rangle > 0$, $\langle v,v\rangle < 0$ ya da $\langle v,v\rangle = 0$ ise, sırasıyla, uzaysal, zamansal ya da ışıksal vektör denir.

M, $\mathbb{E}_s^{n+1}$ uzayının yönlendirilmiş bir hiperyüzeyi olsun. $\mathbb{E}_s^{n+1}$ yarı-Öklid uzayının ve M hiperyüzeylerinin Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve ∇ notasyonları ile gösterilsin. $\mathbb{E}_s^{n+1}$ yarı-Öklid uzayının M hiperyüzeyi için Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla, her X,Y teğet vektör alanı için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)N, \tag{5}$$
$$\tilde{\nabla}_X N = -S(X) \tag{6}$$

şeklindedir. Burada N ile M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı gösterilmiştir ve h ile S ise, sırasıyla, M hiperyüzeyinin ikinci esas formu ve şekil operatörüdür ve

$$\langle SX,Y\rangle = \langle h(X,Y),N\rangle$$

denklemi sağlanır. M hiperyüzeyinin R eğrilik tensörü her X,Y,Z,W teğet vektörü için

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle h(Y,Z),h(X,W)\rangle - \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle \tag{7}$$

ile verilen Gauss denklemini sağlar. Ayrıca, Codazzi denklemi

$$\left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z) = \left(\bar{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \tag{8}$$

şeklindedir. Burada, $\nabla^\perp$ hiperyüzeyin normal konneksiyonu olmak üzere $\bar{\nabla}h$ ile

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla_X^\perp h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \tag{9}$$

şeklinde tanımlanan ikinci temel formun kovaryant türevi gösterilmiştir.

2.2. $\mathbb{E}_2^5$ Yarı-Öklid Uzayının Hiperyüzeyleri

Bu alt kısımda, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli hiperyüzeyler ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiştir.

$\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayındaki indeksi 2 olan bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve hiperyüzeyin metrik tensörü g ile gösterilsin. Ayrıca, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bu hiperyüzeyin teğet demetinin her $i,j = 1,2,3,4$ için

$$g_{ij} := g(e_i,e_j) = \langle e_i,e_j\rangle \in \{-1,0,1\}$$

koşulunu sağlayan bir (yerel) baz alanı olsun. Bu baz alanına karşı gelen ω_{ij} konneksiyon formları

$$\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle$$

denklemiyle tanımlanır ve

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

olur.
Buna ek olarak, M hiperyüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}hN \tag{10}$$

ve $\mathbf{H} = HN$ şeklinde tanımlansın. Burada H, M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği (ortalama eğrilik fonksiyonu) için kullanılmıştır. M hiperyüzeyinin indirgenmiş metriğe göre Laplace operatörü Δ

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i(\nabla_{e_i} e_i - e_i e_i) \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır.
Ayrıca, (8) Codazzi denklemi her $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ için

$$(\tilde{R}(e_i, e_j)e_k)^{\perp} = 0 \tag{12}$$

halini alır. Burada, $\tilde{R}$ ile $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayının eğrilik tensörü gösterilmiştir.
Bölüm 1' de anlatıldığı üzere, M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul (3) denkleminininin sağlanmasıdır. Bu koşul ise

$$(\Delta^2 x)^T = 0 \quad \text{ve} \quad (\Delta^2 x)^{\perp} = 0$$

denklemlerinin sağlanmasına denktir. Doğrudan hesap ile bu iki denklemden

$$S(\nabla H) = -2H\nabla H, \tag{13}$$

$$\Delta H = -H\mathrm{tr}S^2 \tag{14}$$

elde edilir. Sonuç olarak M hiperyüzeyinin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul (13) ve (14) ile verilen, 4. mertebeden, aşırı tanımlı denklem sisteminin sağlanmasıdır. Diğer taraftan, M hiperyüzeyinin S şekil operatörü sadece (13) denklemini sağlıyorsa bu hiperyüzeye bikonzörvatiftir denir. Bikonzörvatif hiperyüzeylerin sınıflandırılması ya da onların geometrilerinin irdelenmesi biharmonik hiperyüzeylerin teorisini anlamak için çok önemlidir. Ayrıca, (13) denkleminden dolayı M hiperyüzeyinin H ortalama eğriliği sabit değil ise ortalama eğriliğinin ∇H gradyenti, M hiperyüzeyinin bir esas doğrultusudur.
Şimdi, uygun baz alanları seçilerek $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayındaki 2 indeksli hiperyüzeylerin şekil operatörlerinin tüm mümkün kanonik formları elde edilecektir. S şekil operatörünün özdeğerlerine M hiperyüzeyinin asli eğrilikleri denir. Pozitif tanımlı bir vektör uzayı üzerinde simetrik bir matris köşegenleştirilebilir. Ancak, metrik pozitif tanımlı değilse durum daha karmaşık bir hal almaktadır. Petrov [16] çalışmasında pozitif tanımlı olmayan bir vektör uzayı üzerinde, simetrik bir matrisin olabileceği formları elde etmiştir. Upadhyay, [15] çalışmasında Petrov'un makalesinden yararlanarak $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli bir M hiperyüzeyinin şekil operatörünün kanonik formlarının aşağıdaki şekillerde olabileceğini ifade etmiştir.
M hiperyüzeyi için uygun $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yarı-ortanormal çatı alanı seçilirse, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayındaki 2 indeksli M hiperyüzeyinin S şekil operatörü aşağıdaki kanonik formlardan biri olur.

Durum I.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum II.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum III.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

Durum IV.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & k_3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum V.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum VI.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & k_3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum VII.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & \beta_1 & 1 & 0 \\ -\beta_1 & k_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & k_1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Durum VIII.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & k_3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Durum IX.

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k_1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada, herbir durum için g, M hiperyüzeyinin indirgenen metrik tensörüdür, yani, $g = (g_{ij})$'dir. Ayrıca, $k_1, k_2, k_3, k_4, \beta_1$ ve β_2 düzgün fonksiyonlardır.

3. Bulgular

Bu bölümde, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayındaki ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan, biharmonik hiperyüzeyler incelenecektir. Öncelikle, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğiışıksal olan hiperyüzeylerin şekil operatörleri belirlenecek; daha sonra ise, bu hiperyüzeylerin biharmonik olma durumları incelenecektir.

3.1. $\mathbb{E}_2^5$ Yarı-Öklid Uzayındaki Biharmonik Hiperyüzeyler

$x : M \to \mathbb{E}_2^5$, 2 indeksli bir M hiperyüzeyinden $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayına izometrik bir daldırma olsun. M hiperyüzeyi üzerinde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ yarı-ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} &\langle e_A, e_B \rangle = 1 - \delta_{AB}\ (A, B = 1, 2), \\ &\langle e_3, e_3 \rangle = 1, \langle e_4, e_4 \rangle = -1 \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde tanımlansın. M hiperyüzeyinin konneksiyonları

$$\begin{aligned} \nabla_{e_k} e_1 &= -\omega_{12}(e_k)e_1 + \omega_{13}(e_k)e_3 - \omega_{14}(e_k)e_4, \\ \nabla_{e_k} e_2 &= -\omega_{21}(e_k)e_2 + \omega_{23}(e_k)e_3 - \omega_{24}(e_k)e_4, \\ \nabla_{e_k} e_3 &= -\omega_{32}(e_k)e_1 - \omega_{31}(e_k)e_2 - \omega_{34}(e_k)e_4, \\ \nabla_{e_k} e_4 &= -\omega_{42}(e_k)e_1 - \omega_{41}(e_k)e_2 + \omega_{43}(e_k)e_3, \end{aligned} \tag{16}$$

sağlar. Burada, $\omega_{jk}(e_i) = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle$ şeklinde tanımlanmıştır.

M, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ∇H ışıksal olan bir hiperyüzey olsun. Upadhyay, [15] çalışmasında bikonzörvatif bir M hiperyüzeyinin şekil operatörünün kanonik formlarını elde etmiştir. [15] çalışmasından yararlanarak biharmonik bir M hiperyüzeyi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1. *M, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli ve ortalama eğriliğinin gradyenti ∇H ışıksal olan biharmonik bir hiperyüzey olsun. O halde, M hiperyüzeyinin şekil operatörünün uygun seçilmiş bir baz alanına göre matris temsili aşağıdaki formlardan birine eşittir.*

$$\textit{Durum I.}\ S = \begin{pmatrix} -2H & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8H - k_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\textit{Durum II.}\ S = \begin{pmatrix} -2H & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4H & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & 4H \end{pmatrix} \tag{18}$$

İki durumuda da M hiperyüzeyinin indirgenmiş metrik tensörü

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

şeklindedir. Ayrıca, k_3 ve $\beta_1 \neq 0$ düzgün fonksiyonlardır.

Not 3.2. M hiperyüzeyi sabit ortalama eğrilik vektörüne sahipse, (13) denklemi aşikar olarak sağlanır. Bu yüzden, çalışmada ortalama eğriliğinin gradyenti ∇H sıfırdan farklı kabul edilmiştir. Bu durumda, M hiperyüzeyi üzerinde $X(H) \neq 0$ olacak şekilde bir X vektör alanı vardır.

Öncelikle, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli ve şekil operatörü (17) kanonik formunda olan M hiperyüzeyi için aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 3.3. *$\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal, 3 farklı asli eğriliğe sahip şekil operatörü (17) şeklinde olan 2 indeksli biharmonik bir hiperyüzey yoktur.*

İspat. 3 farklı asli eğriliğe sahip, ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan biharmonik bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve M hiperyüzeyinin şekil operatörünün (17) formunda olduğu; yani,

$$\begin{aligned} &Se_1 = -2He_1, \quad Se_2 = e_1 - 2He_2, \\ &Se_3 = k_3 e_3, \quad Se_4 = (8H - k_3)e_4 \end{aligned} \tag{20}$$

eşitliklerinin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda,

$$\mathrm{tr}S^2 = 8H^2 + {k_3}^2 + (8H - k_3)^2$$

olur. M hiperyüzeyi 3 farklı asli eğriliğe sahip olduğundan, $k_3 - k_4$, $k_3 + 2H$, $10H - k_3$ ve $8H - 2k_3$ fonksiyonlarının sıfır olmadığı bir $\mathscr{O}$ açık kümesi vardır. Lokal olarak $M = \mathscr{O}$ olduğu varsayılacaktır. (20) denkleminden dolayı M hiperyüzeyinin sıfırdan farklı ikinci esas formunun bileşenleri

$$\begin{aligned} &h(e_1, e_2) = 2HN, \quad h(e_2, e_2) = -N, \\ &h(e_3, e_3) = k_3 N, \quad h(e_4, e_4) = (k_3 - 8H)N \end{aligned} \tag{21}$$

olarak elde edilir. Burada N, M hiperyüzeyinin birim normal vektörüdür.

M hiperyüzeyi biharmonik olduğundan (13) denklemi sağlanır. Ayrıca, ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olduğundan $\langle \nabla H, \nabla H \rangle = 0$ ve $\nabla H \neq 0$ gerçeklenir. Bu durumda, e_1 vektörü ∇H vektörü ile orantılıdır ve

$$e_2(H) \neq 0,\ e_1(H) = e_3(H) = e_4(H) = 0 \tag{22}$$

elde edilir.

Ayrıca, (22) denklemi kullanılarak

$$[e_1, e_3](H) = [e_1, e_4](H) = [e_3, e_4](H) = 0 \tag{23}$$

bulunur ve (23) denkleminde (16) denklemleri kullanılarak

$$\omega_{13}(e_1) = \omega_{14}(e_1) = 0, \quad \omega_{13}(e_4) = \omega_{14}(e_3) \tag{24}$$

eşitlikleri bulunur. Diğer taraftan, (12) Codazzi denklemi $(i, j, k) = (3, 1, 2)$ için

$$\omega_{23}(e_1)(2H + k_3) = 0 \tag{25}$$

eşitliğini verir. O halde, $\omega_{23}(e_1) = 0$ ya da $2H + k_3 = 0$ olur. Ancak, M hiperyüzeyinin 3 farklı asli eğriliği olduğundan $k_3 \neq -2H$ olur. Dolayısıyla, $\omega_{23}(e_1) = 0$ bulunur. Benzer şekilde, (i, j, k) değerleri $\{(3,2,1), (4,1,2), (4,2,1), (1,3,4), (1,4,3)\}$ şeklinde sıralı üçlüler seçilirse konneksiyonlar

$$\omega_{31}(e_2) = \omega_{24}(e_1) = \omega_{14}(e_2) = \omega_{13}(e_4) = \omega_{43}(e_1) = 0 \tag{26}$$

şeklinde elde edilir. Ek olarak, (12) Codazzi denkleminden (i,j,k) değerleri $(1,3,3)$ ve $(1,4,4)$ için sırasıyla

$$e_1(k_3) = -\omega_{13}(e_3)(k_3+2H) \quad (27)$$

ve

$$e_1(k_3) = \omega_{14}(e_4)(k_3-10H) \quad (28)$$

bulunur. Diğer taraftan, (7) Gauss denkleminde (26) denklemindeki konneksiyonlar kullanılarak

$$e_1(\omega_{13}(e_3)) = -\omega_{13}^2(e_3) - \omega_{12}(e_1)\omega_{13}(e_3) \quad (29)$$

bulunur. e_1 vektör alanı (27) ve (28) denklemlerine sırasıyla uygulanırsa

$$e_1e_1(k_3) = -e_1(\omega_{13}(e_3))(k_3+2H) + \omega_{13}^2(e_3)(k_3+2H), \quad (30)$$

$$e_1e_1(k_3) = e_1(\omega_{14}(e_4))(k_3-10H) + \omega_{14}^2(e_4)(k_3-10H) \quad (31)$$

olur. Ayrıca, (7) Gauss denkleminden,

$$e_1(\omega_{14}(e_4)) = \omega_{14}^2(e_4) - \omega_{12}(e_1)\omega_{14}(e_4) \quad (32)$$

elde edilir.
(30) ve (31) denklemlerinin eşit olduğu gözönüne alınır ve (29) ve (32) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 2\omega_{13}^2(e_3) & -2\omega_{14}^2(e_4) \\ \omega_{13}(e_3)\omega_{12}(e_1) & \omega_{14}(e_4)\omega_{12}(e_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1+2H \\ k_1-10H \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

bulunur. (33) denkleminin gerçeklenmesi için

$$\omega_{12}(e_1)\omega_{13}(e_3)\omega_{14}(e_4)\{\omega_{13}(e_3)+\omega_{14}(e_4)\} = 0$$

olmalıdır. O halde,

$$\omega_{12}(e_1)\omega_{13}(e_3)\omega_{14}(e_4) = 0 \text{ ya da } \omega_{13}(e_3)+\omega_{14}(e_4) = 0$$

olur. (12) Codazzi denkleminden $(\tilde{R}(e_i,e_j)e_k)^{\perp}) = 0$ olduğundan $(i,j,k) = (1,2,2)$ olarak alınırsa

$$\omega_{12}(e_1) = e_2(H) \quad (34)$$

bulunur. (22) denkleminden $e_2(H) \neq 0$ olduğundan $\omega_{12}(e_1) \neq 0$ olur. Bu durumda,

$$\omega_{13}(e_3)\omega_{14}(e_4) = 0 \text{ ya da } \omega_{13}(e_3)+\omega_{14}(e_4) = 0$$

gerçeklenir.
Durum a. $\omega_{13}(e_3)\omega_{14}(e_4) = 0$ olsun. O halde, $\omega_{13}(e_3) = 0$ veya $\omega_{14}(e_4) = 0$'dır. $\omega_{13}(e_3) = 0$ ise (27) denkleminden $e_1(k_3) = 0$ bulunur. M hiperyüzeyi 3 farklı asli eğrliğe sahip olduğundan $k_3 - 10H$ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, (28) denkleminden $\omega_{14}(e_4) = 0$ olur.
Diğer taraftan, (11) denkleminden

$$\Delta H = (e_1e_2 - e_2e_1 - e_3e_3 + e_4e_4 - \nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1)(H) \quad (35)$$

elde edilir. (35) denkleminde, M hiperyüzeyinin (16) kovaryant türevleri ve (22), (24), (26) denklemleri ve $\omega_{13}(e_3) = \omega_{14}(e_4) = 0$ olduğu kullanılarak

$$\Delta H = (\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_4}e_4)(H) = 0 \quad (36)$$

bulunur. Ayrıca, M hiperyüzeyi biharmonik olduğundan (14) ve (36) denklemlerinden

$$H\mathrm{tr}S^2 = 0 \quad (37)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $H(8H^2+k_3^2+(8H-k_3)^2) = 0$; yani, $H = 0$ ya da $8H^2+k_3^2+(8H-k_3)^2 = 0$ olur. $8H^2+k_3^2+(8H-k_3)^2$ ifadesinin sıfır olması mümkün değildir. O halde, M hiperyüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü sıfır olur bu ise varsayımla çelişir. $\omega_{14}(e_4) = 0$ olsun. İşlemler benzer şekilde devam ettirildiğinde M hiperyüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü sıfır bulunur. Bu da varsayımla çelişir.
Durum b. $\omega_{13}(e_3)+\omega_{14}(e_4) = 0$ olsun. Dolayısıyla, $\omega_{13}(e_3) = -\omega_{14}(e_4)$ olur. Ayrıca, M hiperyüzeyinin şekil operatöründen $k_3+k_4 = 8H$ ve (12) Codazzi denkleminden

$$-\omega_{14}(e_4)(k_1-k_4) = \omega_{13}(e_3)(k_1-k_3) \quad (38)$$

bulunur. (38) denkleminin gerçeklenmesi için $k_3 = k_4$ olmak zorundadır. Bu ise M hiperyüzeyinin 3 farklı asli eğriliğe sahip olması ile çelişir. O halde, $\omega_{13}(e_3)+\omega_{14}(e_4) = 0$ olamaz. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli ve şekil operatörü (18) kanonik formunda olan M hiperyüzeyi için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.4. *$\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal, şekil operatörü (18) kanonik formunda olan 2 indeksli biharmonik bir hiperyüzey yoktur.*

İspat. Ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan biharmonik bir M hiperyüzeyi göz önüne alınsın ve M hiperyüzeyinin şekil operatörünün (18) kanonik formunda olduğu; yani,

$$\begin{aligned} &Se_1 = -2He_1, \quad Se_2 = e_1 - 2He_2, \\ &Se_3 = 4He_3 - \beta_1 e_4, \quad Se_4 = \beta_1 e_3 + 4He_4 \end{aligned} \quad (39)$$

denklemlerinin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda, M hiperyüzeyinin sıfırdan farklı ikinci esas formunun bileşenleri $h(e_i,e_j)$, $(i,j = 1,2,3,4)$ için

$$\begin{aligned} &h(e_1,e_2) = 2HN,\ h(e_1,e_2) = 2HN,\ h(e_2,e_2) = -N, \\ &h(e_3,e_3) = 4HN,\ h(e_3,e_4) = \beta_1 N,\ h(e_4,e_4) = -4HN \end{aligned} \quad (40)$$

bulunur. Burada N, M hiperyüzeyinin birim normal vektörüdür. M hiperyüzeyinin bir $\mathscr{O}$ açık kümesi üzerinde $H = 0$ ise $\mathscr{O}$ üzerinde $\mathrm{grad}\,H = 0$ olur ki bu durum $\mathrm{grad}\,H$ vektörünün ışıksal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $p \in M$ $H(p) \neq 0$ olduğu varsayılacaktır.
M hiperyüzeyi biharmonik ve ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olduğundan Teorem 3.3 ispatına benzer olarak e_1 vektörü ∇H vektörü ile orantılıdır ve

$$e_2(H) \neq 0,\ e_1(H) = e_3(H) = e_4(H) = 0 \quad (41)$$

bulunur. (41) denklemi kullanılarak

$$[e_1,e_3](H) = [e_1,e_4](H) = [e_3,e_4](H) = 0 \quad (42)$$

elde edilir. (42) denkleminde (16) denklemleri kullanılarak

$$\omega_{13}(e_1) = \omega_{14}(e_1) = 0, \quad \omega_{13}(e_4) = \omega_{14}(e_3) \quad (43)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, (12) Codazzi denkleminden $(\tilde{R}(e_i,e_j)e_k)^{\perp}) = 0$ olduğundan (i,j,k) değerleri $\{(3,1,2)(3,2,1),(4,1,2),(4,2,1)\}$ sıralı üçlüleri seçilirse doğrudan işlemler sonucunda

$$\omega_{31}(e_2) = \omega_{32}(e_1) = \omega_{41}(e_2) = \omega_{42}(e_1) = 0 \tag{44}$$

bulunur. (12) Codazzi denkleminde (i,j,k) değerleri $\{(1,3,4),(1,4,3),(4,3,1),(1,3,3),(1,4,4)\}$ sıralı üçlüleri alındığında sırasıyla

$$e_1(\beta_1) = -\omega_{13}(e_3)\beta_1 - 6H\omega_{14}(e_3), \tag{45}$$
$$e_1(\beta_1) = -\omega_{13}(e_4)6H + \beta_1\omega_{14}(e_4), \tag{46}$$
$$(\omega_{13}(e_3) + \omega_{14}(e_4))\beta_1 = 0, \tag{47}$$
$$2\omega_{34}(e_1)\beta_1 = \omega_{31}(e_3)6H + \omega_{14}(e_3)\beta_1, \tag{48}$$
$$2\omega_{34}(e_1)\beta_1 = \omega_{31}(e_4)\beta_1 - \omega_{14}(e_4)6H \tag{49}$$

denklemleri bulunur. (48) ve (49) denklemleri kullanılarak

$$\omega_{13}(e_3) = \omega_{14}(e_3)\frac{\beta_1}{6H} \tag{50}$$

olur. (45) ve (46) denklemlerine e_1 vektör alanı uygulanırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} e_1(e_1(\beta_1)) = &-e_1(\omega_{13}(e_3))\beta_1 + \omega_{13}^2(e_3)\beta_1 \\ &+ 6H\omega_{13}(e_3)\omega_{14}(e_3) - 6He_1(\omega_{14}(e_3)) \end{aligned} \tag{51}$$

ve

$$\begin{aligned} e_1(e_1(\beta_1)) = &-e_1(\omega_{13}(e_4))6H + \omega_{14}^2(e_4)\beta_1 \\ &- 6H\omega_{13}(e_4)\omega_{14}(e_4) + \beta_1 e_1(\omega_{14}(e_4)) \end{aligned} \tag{52}$$

denklemleri elde edilir. Diğer taraftan, (7) Gauss denklemi kullanılarak uzun hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} e_1(\omega_{13}(e_3)) = &-2\omega_{34}(e_1)\omega_{13}(e_4) - \omega_{12}(e_1)\omega_{13}(e_3) \\ &- \omega_{13}^2(e_3) + \omega_{14}^2(e_3) \end{aligned} \tag{53}$$

ve

$$\begin{aligned} e_1(\omega_{14}(e_4)) = &-2\omega_{34}(e_1)\omega_{13}(e_4) - \omega_{12}(e_1)\omega_{14}(e_4) \\ &- \omega_{13}^2(e_4) + \omega_{14}^2(e_4) \end{aligned} \tag{54}$$

olur. (47) denkleminde $\beta_1 \neq 0$ olduğu kullanılırsa $\omega_{13}(e_3) = -\omega_{14}(e_4)$, dolayısıyla,

$$e_1(\omega_{13}(e_3)) = -e_1(\omega_{14}(e_4)) \tag{55}$$

gerçeklenir. (53) ve (54) denklemleri (55) denkleminde yerine yazılırsa $\omega_{13}(e_4)\omega_{34}(e_1) = 0$ olur. Bu durumda $\omega_{13}(e_4) = 0$ ya da $\omega_{34}(e_1) = 0$ bulunur.

Durum a. $\omega_{13}(e_4) = 0$ olsun. Bu durumda, $\omega_{14}(e_3) = 0$ ve (50) denkleminden $\omega_{13}(e_3) = \omega_{14}(e_4) = 0$ olur. Ayrıca, (45) denkleminden $e_1(\beta_1) = 0$ bulunur. Ek olarak, (11) denklemi kullanılarak $\Delta H = 0$ olarak hesaplanır. M hiperyüzeyi biharmonik olduğundan (14) denkleminden

$$-2H\mathrm{tr}S^2 = -80H^3 = 0 \tag{56}$$

olur. Dolayısıyla, M hiperyüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü sıfır bulunur, bu ise çelişkidir.

Durum b. $\omega_{34}(e_1) = 0$ olsun. (12) Codazzi denkleminden $(1,3,4)$ sıralı üçlüsü için

$$\omega_{14}(e_3)(-6H) = 0 \tag{57}$$

bulunur. H ortalama eğrilik vektörü sıfırdan farklı olduğundan $\omega_{14}(e_3) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\omega_{13}(e_4) = \omega_{13}(e_3) = \omega_{14}(e_4) = 0$ ve $\Delta H = 0$ bulunur. Durum a'ya benzer olarak devam ettirildiğinde H ortalama eğrilik vektörü sıfır olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, şekil operatörü (18) kanonik formunda olan bir biharmonik M hiperyüzeyi yoktur. □

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 gözönüne alınarak aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilebilir.

Sonuç 3.5. *$\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında indeksi 2 ve ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan biharmonik bir hiperyüzey yoktur.*

4. Tartışma ve Sonuç

B.-Y. Chen 1991 yılında yaptığı çalışmada, Öklid uzayının her biharmonik altmanifoldunun minimal olduğunu iddia etmiştir. Bu sanının, Öklid uzayında çeşitli kısıtlamalar altında doğruluğu gösterilmiştir. Ardından, bu sanının yarı-Öklid uzaylarında geçerli olup olmadığı geometriciler tarafından merak konusu olmuştur. Çevreleyen uzayın yarı-Öklid uzayı olması durumunda biharmonik altmanifoldların incelendiği çalışmalar yapılmış ve halen yapılmaktadır. Bu sanının yarı-Öklid uzaylarda geçerli olmadığını gösteren çeşitli çalışmalar mevcuttur.

Diğer taraftan, pozitif tanımlı bir vektör uzayı üzerinde simetrik matris köşegenleştirilebilir. Ancak uzay pozitif tanımlı değilse problem daha karmaşık bir hal almaktadır. Petrov, pozitif tanımlı olmayan bir vektör uzayı üzerinde, simetrik bir matrisin olabileceği formları [16] makalesinde göstermiştir.

Upadhyay, [15] çalışmasında Petrov'un makalesinden yararlanarak $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli bir M hiperyüzeyinin şekil operatörünün tüm olası kanonik formlarını elde etmiştir. Ayrıca, aynı çalışmada $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli bikonzörvatif hiperyüzeyler çalışılmıştır.

Bu çalışmada, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli ortalama eğriliğinin gradyenti ∇H ışıksal olan biharmonik hiperyüzeylerin varlıkları araştırılmıştır.

Öncelikle, $\mathbb{E}_2^5$ yarı-Öklid uzayında 2 indeksli hiperyüzeylerin şekil operatörlerinin tüm mümkün kanonik formlarından bahsedilmiştir. Ardından, bu hiperyüzeylerden ortalama eğriliğinin gradyenti ∇H ışıksal olan hiperyüzeylerin biharmonik olması durumunda şekil operatörlerinin kanonik formları elde edilmiştir. Ardından, $\mathbb{E}_2^5$ uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal, 3 farklı asli eğriliğe sahip biharmonik 2 indeksli bir hiperyüzeyin olmadığı ispatlanmıştır. Ayrıca, $\mathbb{E}_2^5$ uzayında ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal, 2 farklı asli eğriliğe sahip biharmonik 2 indeksli bir hiperyüzeyin de olmadığı elde edilmiştir. Bu teoremlerin sonucu olarak $\mathbb{E}_2^5$ uzayında indeksi 2 ve ortalama eğriliğinin gradyenti ışıksal olan biharmonik bir hiperyüzeyin olamayacağı doğrudan elde edilmiştir.

Kaynakça

[1] Eells, J., Sampson, J. H. 1964. Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math., 86 (1), 109–160.

[2] Dimitrić, I. 1989. Quadric representation and submanifolds of finite type, Michigan State University, Department of Mathematics, Ph.D. Thesis, USA.

[3] Arvanitoyeorgos, A., Defever, F., Kaimakamis, G. and Papantoniou, V. 2007. Biharmonic Lorentzian hypersurfaces in $\mathbb{E}_1^4$, Pac. J. Math., 229(2), 293–305.

[4] Arvanitoyeorgos, A., Kaimakamis, G. and Magid, M. 2009. Lorentz hypersurfaces in $\mathbb{E}_1^4$ satisfying $\Delta H = \alpha H$, lllinois J. Math., 53, 581–590.

[5] Chen, B.-Y. and Munteanu, M. I. 2013. Biharmonic ideal hypersurfaces in Euclidean spaces, Differential Geom. Appl., 31, 1-16.

[6] Chen, B.-Y. 1991. Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type, Soochow J. Math., 17 (2), 169-188.

[7] Chen, B.-Y. 1996. A report on submanifolds of finite type, Soochow J. Math., 22, 117-337.

[8] Defever, F. 1998. Hypersurfaces of $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector, Math. Nachr, 196, 61-69.

[9] Chen, B.-Y., Ishikawa, S. 1998. Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces, Kyushu J. Math., 52, 167-185.

[10] Arvanitoyeorgos, A., Defever, F., Kaimakamis, G. and Papantoniou, V. 2007. Hypersurfaces of $\mathbb{E}_s^4$ with proper mean curvature vector, J. Math. Soc. Japan, 59 , 797-809.

[11] Defever, F., Kaimakamis, G. and Papantoniou, V. 2006. Biharmonic hypersurfaces of the 4-dimensional semi-Euclidean space $\mathbb{E}_s^4$, J. Math. Anal. Appl., 315, 276-286.

[12] Turgay, N. C. 2016. Some classifications of biharmonic Lorentzian hypersurfaces in Minkowski 5-space, Mediterr. J. Math., 13 (1) , 401-412.

[13] Turgay, N. C. 2016. A classification of biharmonic hypersurfaces in Minkowski space of arbitrary dimension, Hacet. J. Math. Stat., 45, 1125-1134.

[14] Upadhyay, A. and Turgay, N. C. 2016. A Classification of Biconservative Hypersurfaces in a Pseudo-Euclidean Space, J. Math. Anal. Appl., 444(2), 1703–1720.

[15] Upadhyay, A. 2016. On the shape operator of biconservative hypersurfaces in $\mathbb{E}_2^5$, Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds, 1, 166-186.

[16] Petrov, A. Z. 1969. Einstein spaces, Pergamon Press, Oxford,.