Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Yıl 1988 / Sayı 3 / ss. 217 - 220

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA α-HAFİF TIKIZLIK

Doç. Dr. Doğan ÇOKER*
Yard. Doç. Dr. Haydar EŞ**

Özet: Bu çalışmada belirtisiz topolojik uzaylarda α-hafif tıkızlık ele alınmaktadır. Belirtisiz α-hafif tıkız uzayın belirtisiz sürekli görüntüsünün α-hafif tıkız olduğu ve belirtisiz α-hafif tıkız uzayın kuvvetli sürekli görüntüsünün α-sayılabilir tıkız olduğu gösterilmektedir.

Abstract: This paper discusses fuzzy α-light compactness in fuzzy topological spaces. We show that the continuous image of an α-light compact fuzzy topological space is α-light compact and that the fuzzy strongly continuous image of an α-light compact fuzzy topological space is α-countably compact.

GİRİŞ

Belirtisiz küme kavramı ilk kez Zadeh tarafından tanıtılmıştır.[1] Belirtisiz topolojik uzay ve tıkızlık kavramları Chang tarafından verilmiş,[2] Lowen tarafından farklı tıkızlık türleri araştırılmıştır.[3] Belirtisiz topolojik uzaylarda α-tıkızlık kavramı Ganter, Steinlage ve Warren tarafından[4]; α-sayılabilir tıkızlık ise, Malghan ve Benchalli tarafından verilmiştir.[8]

Chang anlamındaki belirtisiz topolojik uzaylarda bazı zayıf tıkızlıklar[5, 6, 7, 8]'de araştırılmıştır. Bu çalışmada α-tıkızlığın zayıf formlarından biri olan α-hafif tıkızlık ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

ÖNBİLGİLER

X boş olmayan bir küme ve $F(X)=\{f \mid f: X \rightarrow [0,1]\}$ olsun. $F(X)$ in öğelerine X in belirtisiz altkümeleri denir.[1] $\tau \subseteq F(X)$ altailesi için (i) $0 \in \tau$ ve $1 \in \tau$, (ii) $\forall f, g \in \tau$ için $f \wedge g \in \tau$ ve (iii) $\forall f_i \in \tau$, $\forall i \in I$ için $\bigvee_{i \in I} f_i \in \tau$ koşulları, sağlanıyorsa, τ ailesine X üzerinde bir belirtisiz topoloji denir.

* Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Öğretim Üyesi.
** Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Öğretim Üyesi.

Bir f belirtisiz kümesi için f nin kapanışı olan $\overline{f}$ ve f-nin içi olan f°
$\overline{f}=\inf\{g\varepsilon F(X):g\geqslant f,\quad g \text{ kapalı}\}$,
$f^{\circ}=\sup\{g\varepsilon\tau:g\leqslant f\}$
ile tanımlanır.[2]

Bir (X,τ) belirtisiz topolojik uzayı ve $\alpha\varepsilon[0,1)$ sayısı verilmiş olsun. Belirtisiz kümelerin bir U ailesi X in α-örtüsüdür $\Longleftrightarrow$ her $x\varepsilon X$ için $g(x)>\alpha$ olacak şekilde bir $g\varepsilon U$ belirtisiz kümesi vardır.[4] Bir (X,τ) belirtisiz topolojik uzayı α-tıkızdır $\Longleftrightarrow$ X in belirtisiz açık kümelerden oluşan her α-örtüsü sonlu bir α-altörtü bulundurur.

Bir (X,τ) belirtisiz topolojik uzayı ve $F\subseteq X$ altkümesi verilsin. F altkümesi X in α-kapalı altkümesidir $\Longleftrightarrow$ her $x\varepsilon X\text{-}F$ için $u(x)>\alpha$ ve $u\wedge\chi_F=0$ olacak şekilde bir $u\varepsilon\tau$ vardır. Burada F klasik anlamda altküme olup χ_F, F nin karakteristik fonksiyonudur.[9] (X,τ) belirtisiz uzayı için, A kümesi α-açıktır $\Longleftrightarrow$ X-A α-kapalıdır. Başka bir deyişle A α-açıktır $\Longleftrightarrow$ her $x\varepsilon A$ için $u(x)>\alpha$ ve $u\wedge\chi_{(X\text{-}A)}=0$ olacak şekilde bir $u\varepsilon\tau$ kümesi vardır.[11] Bir (X,τ) belirtisiz topolojik uzayı ve $A\subseteq X$ altkümesi verilsin. Bir $x\varepsilon X$ noktası A nın α-zayıf yığılma noktasıdır $\Longleftrightarrow$ $u(x)>\alpha$ olacak biçimde her $u\varepsilon\tau$ için $\overline{u}\wedge\chi_{A\text{-}\{x\}}\neq 0$ dır. A kümesinin α-zayıf kapanışı ise, A kümesi ile A nın α-zayıf yığılma noktalarının bileşimidir.[11]

(X,τ_X), (Y,τ_Y) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $g\varepsilon\tau_Y$ için $f^{-1}(g)\varepsilon\tau_X$ ise, f fonksiyonuna belirtisiz süreklidir denir. f belirtisiz süreklidir $\Longleftrightarrow$ her $g\varepsilon F(Y)$ için $\overline{f^{-1}(g)}\leqslant f^{-1}(\overline{g})$ dir.[13]

α-HAFİF TIKIZLIK

1. Tanım: Bir (X,τ) belirtisiz topolojik uzayı α-hafif tıkızdır $\Longleftrightarrow$ X in her sayılabilir α-açık örtüsünden kapanışları X in bir α-örtüsünü oluşturan bir sonlu altaile seçilebilir.

Açıktır ki her belirtisiz sayılabilir α-tıkız uzay α-hafif tıkızdır, ayrıca her belirtisiz α-hemen hemen tıkız uzay α-hafif tıkızdır. Belirtisiz α-hafif tıkız uzayı belirtisiz regüler açık kümelerle karakterize edebiliriz.

2. Teorem: Bir (X,τ) belirtisiz uzayı α-hafif tıkızdır $\Longleftrightarrow$ X in her sayılabilir regüler açık α-örtüsünden kapanışları X in bir α-örtüsünü oluşturan bir sonlu altaile seçilebilir.

Kanıt. Gereklilik açık olup yeterliliğini görelim: $U=\{u_i:i\varepsilon\mathbb{N}\}$, X in belirtisiz açık bir α-örtüsü olsun. O halde $\{(\overline{u_n})^{\circ}\}_{n\varepsilon\mathbb{N}}$, bir regüler açık α-örtüdür. Üstelik $u_i\leqslant\overline{u}^{\circ}_i\leqslant\overline{u_i}$ olduğundan $\{\overline{u_i}\}_{i=1,\ldots,n}$, X in sonlu α-örtüsüdür. O halde X α-hafif tıkızdır.

3. Teorem: Bir belirtisiz α-hafif tıkız uzayın bir α-zayıf kapalı altkümesi α-hafif tıkızdır.

Kanıt. F, (X,τ) α-hafif tıkız belirtisiz topolojik uzayın α-zayıf kapalı altkümesi olsun. $U=\{a_n : n\varepsilon|N\}$, F nin sayılabilir α-açık örtüsü ise F α-zayıf kapalı olduğundan her $x\ \varepsilon X$-F için $a_{nx}(x)>\alpha$ ve $\overline{a}_{nx}\wedge\chi_F=0$ olacak şekilde $a_{nx}\varepsilon\tau$ belirtisiz kümesi vardır. Bu durumda $\nu=\{a_{nx}:x\varepsilon X\text{-}F, n\varepsilon|N\}uU$, X in sayılabilir α-açık örtüsüdür. X in α-hafif tıkızlığından, bir $\{\overline{a}_{nx_1},\ldots,a_{nx_n}\}u\{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m\}$ ailesi X in α-örtüsüdür. Böylece $\{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_m\}$, F nin α-örtüsü olup, F α-hafif tıkızdır.

4. Teorem: Bir belirtisiz α-hafif tıkız uzayın belirtisiz sürekli görüntüsü de α-hafif tıkızdır.

Kanıt. (X,τ) ve (Y,τ^1) belirtisiz topolojik uzaylar olsun. Bir $f:X\rightarrow Y$ dönüşümü belirtisiz sürekli, örten ve $U=\{a_n:n\varepsilon|N\}$ ailesi de Y nin sayılabilir α-açık örtüsü ise, $f^{-1}(U)=\{f^{-1}(a_n):a_n\varepsilon U\}$ ailesi X in sayılabilir α-açık örtüsüdür. Gerçekten, her $x\varepsilon X$ için $f(x)\varepsilon Y$ olduğundan bir $a_{no}\varepsilon U$ belirtisiz kümesi vardır öyle ki $a_{no}(f(x))>\alpha$ dır. Böylece $f^{-1}(a_{no})(x)>\alpha$ olur. X α-hafif tıkız olduğundan sonlu bir $\{\overline{f^{-1}(a_1)},\ldots,\overline{f^{-1}(a_n)}\}$ α-altörtüsü vardır. Buradan $\{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n\}$, Y nin sonlu α-örtüsüdür. Gerçekten; $y\varepsilon Y$ ise, $\exists x\varepsilon X$ $y=f(x)$ dir. Böylece $\exists k$, $1\leqslant k\leqslant n$ öyle ki $\overline{f^{-1}(a_k)}(x)>\alpha$ dır. $f^{-1}(\overline{a}_k)(x)\geqslant\overline{f^{-1}(a_k)}(x)>\alpha$ olduğundan $\overline{a}_k(f(x))>\alpha$ veya $\overline{a}_k(y)>\alpha$ çıkar. Böylece Y uzayı α-tıkızdır.

Belirtisiz topolojik uzaylar için yapılan belirtisiz kuvvetli süreklilik tanımını vermek istiyoruz. (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. X'de her λ belirtisiz kümesi için $f(\overline{\lambda})\leqslant\overline{f(\lambda)}$ ise, f ye belirtisiz kuvvetli sürekli fonksiyon denir.[6] Belirtisiz topolojik uzaylar için verdiğimiz hafif tıkızlıkla ilgili bir özelliği α-hafif tıkız uzaylar için yineleyebiliriz:

5. Teorem: Bir belirtisiz α-hafif tıkız uzayın belirtisiz kuvvetli sürekli görüntüsü sayılabilir α-tıkızdır.

Kanıt. (X,τ_X) belirtisiz α-hafif tıkız ve $f:(X,\tau_X)\rightarrow(Y,\tau_Y)$ belirtisiz kuvvetli sürekli ve örten fonksiyon olsun. U ailesi Y nin α-açık örtüsü ise, $f^{-1}(U)$ ailesi X in sayılabilir α-açık örtüsüdür. (Kuvvetli sürekli her fonksiyon aynı zamanda süreklidir.) X in α-hafif tıkızlığından sonlu bir $\{f^{-1}(a_1),\ldots,f^{-1}(a_n)\}$ altailesi vardır öyle ki $\{\overline{f^{-1}(a_i)}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ X in bir α-örtüsüdür. Şimdi $\{a_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ nin Y nin bir α-örtüsü olduğunu gösterelim. $y\varepsilon Y$ ise, $y=f(x)$ olacak biçimde bir $x\varepsilon X$ vardır ve dolayısıyla $\overline{f^{-1}(a_{io})}(x)>\alpha$ olacak biçimde bir $_{io}$ vardır. Her λ için $f(\overline{\lambda})\leqslant\overline{f(\lambda)}$ tanımında $\lambda=f^{-1}(a_{io})$ alacak olursak $f(\overline{f^{-1}(a_{io})})\leqslant\overline{f(f^{-1}(a_{io}))}=a_{io}\Longrightarrow\overline{f^{-1}(a_{io})}\leqslant f^{-1}(a_{io})$ bulunur. Böylece $f^{-1}(a_{io})(x)>\alpha\Longrightarrow a_{io}(f(x))=a_{io}(y)>\alpha$ diye istenen şey elde edilir. O halde Y, α-sayılabilir tıkızdır.

Belirtisiz zayıf süreklilik tanımı Azad tarafından yapılmıştır: $f:X \to Y$ fonksiyonu verilsin; her $\mu \epsilon \tau_Y$ için $f^{-1}(\mu) \leqslant [f^{-1}(\bar{\mu})]^{\circ}$ ise, f ye belirtisiz zayıf sürekli fonksiyon denir.[14]

6. Teorem: Bir sayılabilir α-tıkız uzayın belirtisiz zayıf sürekli görüntüsü α-hafif tıkızdır.

Kanıt. 3.4 Teorem ve 3.5 Teoremde izlenen yöntemle görülür.

KAYNAKÇA

1. Zadeh, L. A, Fuzzy sets, **Inform. and Control**, 8 (1965) 338-353.
2. Chang, C.L., Fuzzy topological spaces, **Journal of Math. Anal. Appl.**, 24 (1968) 182-190.
3. Lowen, R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, **Journal of Math. Anal. Appl.,** 56 (1976) 621-633.
4. Ganter, T.E., Steinlage, R.C., Warren, R.H., Compactness in fuzzy topological spaces, **Journal of Math. Anal. Appl.**, 62 (1978) 547-562.
5. Di Concilio, A., Gerla, G., Almost compactness in fuzzy topological spaces, **Fuzzy Sets and Systems,** 13 (1984) 187-192.
6. Eş, A.H., Almost compactness and near compactness in fuzzy topological spaces, **Fuzzy Sets and Systems** 22 (1987) 289-295.
7. Çoker, D., Eş, A.H., On fuzzy RS-compact spaces (submitted).
8. Çoker, D., Eş, A.H., On fuzzy S-closed spaces,**Doğa Bilim Dergisi** (yayınlanacak)
9. Malghan, S.R., Benchalli, S.S., On fuzzy topological spaces, **Glasnik Mathematicki** 16 (1981) 313-325.
10. Rodabaugh, S.E., The Hausdorff separation axioms for fuzzy topological spaces, **Topology and its Applications** 11 (1980) 319-334.
11. Mashhour, A.S., Ghanim, M.H., Fath Alla, M.A., α-separation axioms and α-compactness in fuzzy topological spaces, **Rocky Mountain Journal of Math.**, 16 (1986) 591-601.
12. Hutton, B., Reilly, I., Separation axioms in fuzzy topological spaces, **Fuzzy Sets and Systems**, 3 (1980) 93-104.
13. Warren, R.H., Neighborhoods, bases and continuity in fuzzy topological spaces, **Rocky Mountain Journal of Math.**, 8 (1978) 459-470.
14. Azad, K.K., On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, **Journal of Math. Anal. Appl.** 82 (1981) 14-32.