Amasya Üniversitesi
Eğitim Fakültesi Dergisi
8(2), 240-271, 2019
Özgün araştırma makalesi

http://dergi.amasya.edu.tr

Matematik Öğretmen Adayları Doğal Sayıları Nasıl Tanımlıyor?**

Yusuf Emre Ercire* ve Serkan Narlı

Dokuz Eylül Üniversitesi, Türkiye

Alındı: 08.07.2019 - Düzeltildi: 24.08.2019 - KabulEdildi: 02.09.2019

Atıf: Ercire, Y. E. ve Narlı, S. (2019). Matematik Öğretmen Adayları Doğal Sayıları Nasıl Tanımlıyor? *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *8*(2), 240-271.

Öz

Kanıtlama ve problem çözme ile birlikte en temel matematiksel etkinliklerden biri olan tanımlama, alan bilgisinin ana bileşenlerinden biridir. Tanımlar; öğretim yöntemleri, konuların sırası, hangi teoremlerin ve kanıtların ele alınacağı gibi öğretmenlerin didaktik kararlarını da etkiler.Matematik eğitiminin en temel kavramlarından olan sayı kümelerinin doğru algılanması matematiğin de anlaşılmasının ve kullanılmasının yolunu açar. İlk halkası doğal sayılar olan sayı kümeleri, doğal sayılardan gerçek sayılara kadar birbirlerine ön şart ilişkisiyle bağlıdır. Matematik öğretmenlerinin ve öğretmen adaylarının bu kümeleri doğru bilmeleri ve titiz bir şekilde tanımlayabilmeleri öğrencilerin sayı sistemini doğru inşa edebilmeleri için önemlidir.Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmen

*Sorumlu Yazar: Tel.: 554 3721557, e-posta: yusuferc@gmail.com
**Bu çalışma ilk yazarın doktora tezinin bir bölümünden hazırlanmıştır.
ISSN: 2146-7811,

adaylarının alan ve pedagojik alan bilgilerini belirlemek amacıyla yapılmış olan daha geniş bir tez çalışmasının parçasıdır. Her sınıf düzeyinden 40'ar olmak üzere 160 ilköğretim matematik öğretmen adayına, sayılar ve işlemler öğrenme alanı ile ilgili 14 kavramın (doğal sayı, asal sayı, mutlak değer vs.) tanımlarını içeren açık uçlu bir ölçek uygulanmıştır. Bu çalışmada 'doğal sayı' tanımına ait yanıtlara yer verilmiştir. Tanımlar, Zazkis ve Leikin (2008) tarafından oluşturulan doğruluk ve zenginlikkriterleri bağlamında incelenmiştir. Araştırma sonuçları, öğretmen adaylarının doğal sayıyı tanımlarken daha genel ifadelerle veya daha özel ifadelerle gerek veya yeter şartlardan yoksun tanımlar yapabildiklerini göstermiştir. Uygun bazı tanımların ise matematiksel dildeki özensizliği ve minimal olmaması gibi nedenlerle titiz olmadığı görülmüştür. Tüm sonuçlar değerlendirildiğinde öğretmen eğitiminde tanımların yapısına, rolüne ve eş değer ifadelerine odaklanmanın ve hepsinden önce kavramlar üzerine düşünecek fırsatlar vermenin son derece önemli olduğu söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Tanımlama, Doğal Sayı, Öğretmen Eğitimi

Giriş

"Hocam, sınavda tanım soracak mısınız?"

Bu soruyla, gerek ortaokul veya lise gerekse üniversite düzeyinde sınavlardan önce çok kez karşılaşılmıştır. Öğrencilerin bu soruyu sorma nedenleri arasında tanımların gereksiz olduğu veya sorulmaya değer olmadığı düşüncesi yer alıyor olabilir. Hâlbuki gerek matematikte gerek matematik eğitiminde tanımların ve tanımlamanın rolü oldukça büyüktür (Vinner, 2002; Edwards ve Ward, 2004; Zazkis ve Leikin, 2007, 2008; Leikin ve Zazkis, 2010; Shield, 2004)

Tanımlama; kanıtlama ve problem çözme ile birlikte en temel matematiksel etkinliklerden biridir (Leikin ve Zazkis, 2010). Sadece matematikte değil birçok disiplinde tanımların önemi ve gücü kabul edilmiştir. Bir kavramın tanımının o kavramın özünü yakaladığı, kavramı oluşturduğu, örnek olan ve örnek olmayan durumlarını ortaya koymaya yönelik araç sağladığı söylenebilir. Tanım sayesinde, kavramla ilgili tüm örneklerin ortak özelliklerinin saptanabileceği, betimlenebileceği ve tartışılabileceği ifade edilebilir. Tümdengelimli doğasından dolayı matematik; notasyonlara, aksiyomlara ve tanımlara dayanır (Tirosh,1999). Yeni bir kavram birincil kavramlar ve daha önce tanımlanmış kavramlardan yola çıkarak tanımlanır. Teoremler tanımlanmış kavramlardan yararlanarak oluşturulur ve yine tanımlanmış kavramlar kullanılarak ispatlanır (Vinner, 2002).

Matematiğin öğretiminde ve öğrenilmesinde tanımların ve tanımlamanın öneminin göz ardı edilemeyeceği söylenebilir. Vinner (2002)'a göre tanımlar ve bu tanımların öğrencilere sunuluş biçimleri öğrencide oluşan kavram imajlarını şekillendirir. Bu kavram imajları öğrenenlerin düşünme süreçlerini etkiler ve bilgi yapısının önemli bir bölümünü oluşturur. Ayrıca tanımlama, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının didaktik kararlarını etkilemektedir. Tanımlar, öğretim yöntemlerine, öğrenilecek konuların sırasına, hangi teoremlerin ve ispatların öğrencilere aktarılacağına yön verir (Tall ve Vinner 1981; Vinner, 2002). Bu nedenle öğretmenlerin kavramla ilgili kendi kavram imajları ve bu kavramla ilgili yapmış oldukları kişisel tanımları, oluşturduğu öğretim tasarımını, sınıf içinde yaptığı açıklamaları, öğrencilere teoremleri kanıtlama ve problemleri çözme yolunda rehberlik etme yöntemini ve matematiksel tartışmaları nasıl yürüttüğünü etkiler. Öğretmenlerin matematiksel kavramların eşdeğer tanımlarını bilmesi, ders içinde esneklik ve akıcılık sağlar (Leikin ve Zazkis, 2010).

Öğretmenlerin matematiksel tanımlar hakkındaki bilgisi onların pedagojik yaklaşımlarını etkiliyor olsa da pedagojik alan bilgisinden ziyade konu alan bilgisinin temel unsuru olarak görülebilir. Çünkü Leikin ve Zazkis (2010)'e göre matematiğin yapısı, aksiyomların yeri ve rolü, bu yapıdaki tanımlar ve teoremler, matematiksel kavramların (kişisel tanımlar ve formal tanımlarla tutarlı kavram imajları dâhil) anlaşılması, tanımlama ve ispatlamanın anlamının kavranması konu alan bilgisi kapsamındadır. Ayrıca konu alan bilgisinin bir tanımın ne olduğu, bir aksiyom veya teoremden nasıl farklı olduğu, özellikleri ve mantıksal yapısını anlamak gibi meta matematiksel öğeleri de içerdiği de söylenebilir.

Vinner (2002)'ın söz ettiği gibi öğrencilerin kavram imajlarının biçimlenmesine neden olan tanımların öğretmenler tarafından doğru bir şekilde yapılması gerekmektedir. Hem alan bilgisinin temel elemanlarından biri olduğu için hem de öğretmenlerin didaktik süreçlerini etkilediği için tanımlamaya ve tanımlamanın rolüne odaklanmanın matematik öğretmenlerinin eğitiminde merkezi olması gerektiği söylenebilir.

Bir Tanım Nasıl Olmalıdır?

Öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımları inceleyen çeşitli araştırmalar mevcuttur (Wilson, 1990; Edwards & Ward, 2004; Zazkis & Leikin, 2007,2008; Leikin & Zazkis, 2010, Kubar, 2012; Baş ve diğerleri, 2015; Ünlü ve Horzum, 2018). Bu inceleme yapılırken tanımlar çeşitli kriterlere göre değerlendirilmektedir. Geçmişten günümüze tanımların nasıl olması gerektiği ile ilgili çeşitli prensipler ortaya konmuştur.

Van Dormalen ve Zaslavsky (2003)'e göre bir tanım için yedi mantıksal prensip vardır. Kriter olarak ifade edilecek bu prensipler "Hiyerarşi kriteri, var oluş kriteri, eşdeğerlik kriteri, aksiyomlaşma kriteri, minimallik kriteri, şıklık kriteri ve dejenerasyon kriteri" olarak sıralanabilir. Aşağıda bu yedi kriter açıklanmış ve örneklendirilmiştir.

Hiyerarşi kriteri

Aristo'ya göre herhangi bir yeni kavram, daha genel bir kavramın özel bir örneği olarak tanımlanması gerekmektedir. Yani tanımlarda genelden özele doğru bir gidiş olmalıdır. Bu durumda önce üçgenin daha sonra eşkenar üçgenin tanımlanması gerektiği söylenebilir.

Var oluş kriteri

Aristoteles'e göre, mevcut sistemde yeni tanımlanmış kavramın bir örneği olması gerekmektedir. Örneğin "Tüm kenar uzunlukları eşit olan geniş açılı üçgenlere 'eşgeniş üçgen' denir." şeklindeki bir tanım Öklid geometrisine göre bir örnek içermediği için bu kritere uygun değildir.

Eşdeğerlik kriteri

Başka bir kriter de tanımların birbirine eşdeğer olmasıdır. Yani, bir kavram için birden fazla tanım verildiğinde, tanımların eşdeğerliği kanıtlanmalıdır. Bu şekilde, tanımlardan bir tanesi bir kavramın tanımı olarak seçilir, diğeri ise kanıtlanacak bir teori haline gelir. Örneğin, aşağıdaki verilen paralelkenarın ilk tanımı bir tanım olarak seçilirse, diğerinin de paralelkenar olduğu kanıtlanmalıdır.

"Paralelkenar, karşılıklı kenarları paralel olan dörtgendir."

"Bir paralelkenar, karşılıklı kenarları eşit olan dörtgendir."

Aksiyomlaşma kriteri

Kavramlar hiyerarşi kriterine göre daha genel kavramların yardımıyla kurulabildiğine göre bu süreç bizi tanımlanamayan kavramlara götürür. Aristo bazı kavramları tanımlayabilmek için çeşitli aksiyomlar ve postulatlar yazmıştır. Örneğin doğal sayıların tanımında Peano Aksiyomlarına gidilmektedir.

Minimallik kriteri

Bu kriter, tanım yapılırken kavramın gereğinden daha fazla özellikle belirtilmemesi gerektiğini ifade eder. "Bir dikdörtgen dört dik açılı dörtgendir." tanımı minimallik kriterine uymamaktadır. Dikdörtgen kavramını aşağıdaki gibi tanımlamak yeterlidir: "Bir dikdörtgen üç dik açıya sahip dörtgendir." Çünkü bir dörtgenin dört açısının toplamının 360 dereceye eşit olduğu kanıtlanmıştır.

Bu kriter literatürde tartışmalı olarak görülmektedir. Pedagojik açıdan bakıldığında minimal olmayan bazı tanımların kavramla ilgili daha akılda kalıcı olabileceği söylenebilmektedir.

Şıklık kriteri

Bazen bir ders kitabı yazarı, eşdeğer olan iki tanım arasında seçim yaparken, daha güzel görünen, daha az kelime veya daha az sembole ihtiyaç duyan tanımı kullanır. "Sadece iki pozitif tam sayı böleni olan doğal sayılara asal sayı denir." tanımı ve "1'den büyük, sadece 1'e ve kendisine bölünebilen pozitif tam sayılara asal sayı denir." tanımları eşdeğer tanımlar olmasına karşın ilkinin daha şık olduğu söylenebilir.

Dejenerasyon kriteri

Kriter, bir tanımın, bazen kavramın bizim sezgisel fikrimize uymayan örneklerine izin verdiği durumları ifade eder. Örneğin, "A,B,C,D şeklindeki herhangi üçü doğrusal olmayan 4 noktayı AB,BC,CD ve DA şeklindeki 4 doğru parçasıyla birleştirerek oluşturulan şekle dörtgen denir." tanımı dörtgen dışında bir köşesi ortak iki üçgen çizimine de neden olabilir.

Teorik Çerçeve

İyi bilinen matematikçilerin tanımlarla ilgili işaret ettikleri mantıksal prensipler Zazkis ve Leikin (2008) tarafından da aşağıdaki gibi ortaya konulmuştur:

a) Tanımlanacak olan kavramın ismi tanımda geçmemelidir.

b) Tanım gerekli ve yeterli şartları sağlayarak kurulmalıdır.

c) Tanımda sadece daha önce tanımlanmış kavramlar veya temel (tanımlanmayan) kavramlar kullanılmalıdır.

d) Gerekli ve yeterli şartlar minimal olmalıdır.

e) Tanımlar keyfidir yani eşdeğer ifadelerden biri seçilebilir.

Zazkis ve Leikin (2008) öğretmenlerin yapmış oldukları tanım örneklerini analiz etmek için dört kategori ortaya koymuştur. Bu kategoriler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Öğretmen tanımlarının analizi teorik çatısına ait kriterler

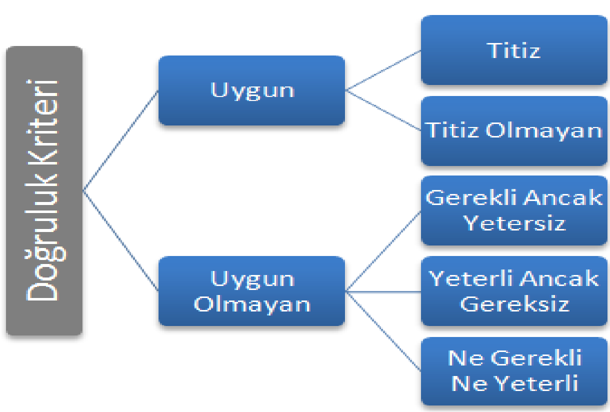
Kriterler	Temel Sorular	Analiz Edilecek Veri
Erişilebilirlik	Tanımdan kavrama kolaylıkla ulaşılabiliyor mu, yoksa uğraşmak mı	Sözlü

	gerekiyor?	
Zenginlik	Tanımlar hep aynı türden mi? Bir türde herhangi bir sıklık var mı? Rutin veya rutin olmayan türde bir tanım mı?	Sözlü ve Yazılı
Doğruluk	Matematiksel olarak doğru mu? (Verilen şartlar gerekli veya yeterli mi?) Tanım şık mı, minimal mi?	Sözlü ve Yazılı
Genellik/Somutluk	Yapılan tanım kavrama göre çok mu genel yoksa çok mu spesifik?	Sözlü

Tabloda belirtilen her bir kriter daha detaylı olarak aşağıdaki biçimde açıklanabilir:

a) Erişilebilirlik Kriteri: Öğretmen veya öğretmen adayının yapmış olduğu tanımla doğrudan kavrama ulaşılıp ulaşılmadığı, kavrama ait verdiği örneklerin yapılan tanımla tutarlılığı gibi konular bu kriter kapsamına girmektedir.

b) Doğruluk Kriteri: Bir tanımın gerek ve yeter şartları sağlayıp sağlamadığının incelenmesi, tanımın matematiksel olarak şıklığının ve minimalliğinin incelenmesi doğruluk kriteriyle ilgilidir. Bu kriter kapsamında Şekil 1'de görüldüğü gibi tanımlar, 'uygun' ve 'uygun olmayan' olarak, uygun tanımlar da 'titiz' ve 'titiz olmayan' olarak ayrılmaktadır.



Şekil 1. Doğruluk kriterinin alt kategorileri

Uygun ve titiz tanımlar

Tanımların uygun ve titiz örnekleri, tanımlanmış kavramın gerekli ve yeterli koşullarını sağlayan örnekler olmasının yanı sıra doğru matematiksel terminoloji ve sembolleri içermektedir. Bu tanımlar genellikle minimaldir. "Genellikle" denmesinin sebebi de minimalliği ciddi derecede bozmayan tanımlar da bu kategoride ele alınmaktadır. Karenin, "Kenarları eşit uzunlukta olan ve açılarının ölçüsü 90'ar derece olan dörtgenlerdir." tanımında olduğu gibi minimalliği bozan (3 açısı demesi minimallik için yeterliydi.) ancak nerdeyse tüm matematiksel kaynaklarda o şekilde yer alan tanımlar da Zazkis ve Leikin (2008) çalışmasında da kabul edildiği gibi "nerdeyse minimal" olarak değerlendirilmiş ve uygun ve titiz tanım olarak sınıflandırılmıştır.

Uygun ancak titiz olmayan tanımlar

Öğretmen adayları tarafından dikkat eksikliği ya da matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım nedeniyle yanlış terminoloji içeren ya da genellikle bazı kısıtlamaları atlayan tanımlardır. Minimalliği önemli derecede bozan tanımlar da bu kapsama girmektedir. "Kenarları eşit uzunlukta olan, iç açılarının ölçüleri 60'ar derece olan üçgenlere eşkenar üçgen denir." tanımı minimallik kriterine uymamaktadır. Verilen iki özellikten herhangi birinin verilmesi kavramı tanımlamak için yeterlidir.

Uygun olmayan tanımlar

Bir kavramı ortaya çıkaracak gerekli veya yeterli şartların eksikliği ile yapılmış tanımlar 'uygun olmayan tanım' şeklinde ifade edilmektedir. Gerek veya yeter şart eksikliği eşkenar üçgen tanımı üzerinden örneklendirilebilir:

Eşkenar üçgen;

i) "60 derecelik bir iç açıya sahip üçgenlerdir."

Yukarıdaki örnek eşkenar üçgen için gerekli olan bir şartı içermektedir. Ancak bu şart kavram için çok geneldir. İç açılarından biri 60 derece olan çeşitkenar üçgen de çizilebilir.

Bu nedenle kavramı ortaya çıkarmak için yeterli değildir. Kavramdan çok daha geniş bir kümeye işaret eden bu gibi örnekler "gerekli ancak yetersiz" şeklinde sınıflandırılmaktadır.

ii) "Kenarları 5'er cm olan üçgenlerdir."

Yukarıdaki tanım eşkenar üçgenin spesifik bir örneğini içermektedir. Eşkenar üçgene ulaşmak için yeterli bir şart olmasına karşın gereksiz bir kısıtlama içermektedir. Kavramın kendisinden çok daha dar bir kümeye işaret etmektedir. Bu nedenle bu gibi örnekler "yeterli ancak gereksiz" şeklinde sınıflandırılmaktadır.

iii) "Kenarları eşit uzunlukta olan dik üçgenlerdir."

|AB|=|BC|=|AC|=1 cm olmak üzere AB, BC ve AC kenarlarına sahip çokgenlerdir.

Yukarıdaki tanımlar gibi kavramın hiçbir örneğini sunmayan (kenarları eşit uzunlukta olan dik üçgen yoktur) veya kavramı bir yandan gereksiz sınırlarken diğer taraftan çok daha genel örnekleri işaret eden (sözü edilen çokgen beşgen de olabilir) tanımlar "ne gerekli ne yeterli" şeklinde sınıflandırılmaktadır.

c) Zenginlik Kriteri: Bu kriter,"Tanımlar hep aynı türden mi? Bir türde herhangi bir sıklık var mı? Rutin veya rutin olmayan türde bir tanım mı?"gibi sorulara yanıt arar. Yapılan tanımların türü ve yapısındaki farklılıklar, belirli bir bağlamın dışına çıkıp farklı bağlamlardan örneklendirilmesi zenginlik göstergesidir (Leikin ve Zazkis, 2010).Kare tanımını yaparken öğrencilerden çoğunun 'eşit uzunluktaki kenarlar ve dik açı' ifadelerini belirtirken, "Köşegenleri eşit ve birbirine dik olan dörtgenlerdir." şeklinde yapılan bir tanım zengin sayılabilir.

d) Genellik/Somutluk Kriteri: Genel tanımlardan ziyade spesifik ve hassas örnekler sunma yeteneğini ifade eder. Yapılan tanım örneklerinin genel mi yoksa spesifik mi olduğu önemlidir. Genel tanımlar belirli ölçülerde spesifiklere göre tercih edilir. Bazı genel tanımlar, kavramın sınıflarını işaret edip matematiksel anlayışın bir göstergesi olarak kabul edilirken bazıları da anlamada eksikliklere işaret edebilir. Yani, genellik bir yandan jeneratör diğer yandan koruyucu kalkan işlevi görür. Kenarları 2'şer cm olan bir kare spesifik bir kare örneğiyken, bir dikdörtgen veya bir yamuk da karenin genel sınıflarındandır. Bu nedenle tanımda arzulanan bir seviye vardır.

Bu kriterlerden erişilebilirlik ve genellik/somutluk kriteri mülakat gibi sözlü verilerin analiziyle incelenebilmekte iken zenginlik ve doğruluk kriteri yazılı verilerle de incelenebilmektedir (Leikin & Zazkis, 2010).

Araştırmanın Amacı

Tanımlar matematikte bazı nesnelerin (rasyonel sayılar, karmaşık sayılar vs.) matematiksel varlığını ortaya koymak için sıklıkla kullanılır. Ancak matematik tarihi, birçok durumda bu tür tanımların belirttiği kavramların hemen meşru birer matematiksel nesne olarak görülmediğini açığa çıkarır. Çoğunlukla matematikçilerin bunları kabul etmesi on yıllar, hatta yüzyıllar almıştır (Tirosh, 1999). Matematik camiası için kabul edilmesi yüzyıllar alan irrasyonel sayı, reel sayı, karmaşık sayı gibi kavramların öğrenciler tarafından kolaylıkla kabul edilmesinin ve anlaşılmasının zor olacağı öngörülebilir.

İlköğretim matematik eğitiminin en temel kavramlarından olan sayı kümelerinin doğru algılanmasının matematiğin de anlaşılmasının ve kullanılmasının yolunu açtığı söylenebilir. Doğal sayılardan gerçek sayılara kadar birbirleriyle ön şart ilişkisiyle bağlı olan sayı kümelerini öğretmen ve öğretmen adaylarının doğru bilmelerinin ve titiz bir şekilde tanımlayabilmelerinin öğrencilerin sayı sistemini doğru inşa edebilmeleri için oldukça önemli olduğu ifade edilebilir.

Öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarını sağlamak için, onları bu kavramlarla tanıştıran öğretmenlerin tanımları kendilerinin bilmesi ve doğru bir şekilde tanımlayabilmeleri oldukça önemlidir (Shield, 2004). Daha geniş bir araştırmanın bir bölümünü oluşturan bu çalışmada öğrencilerin ilk tanıştığı sayı kümesi olan doğal sayılarla ilgili ilköğretim matematik öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımları incelemek amaçlanmıştır. Bu incelemede Leikin ve Zazkis (2010) teorik çerçevesinde bulunan doğruluk ve zenginlik kriterlerine odaklanılmıştır.Bu kapsamda problem cümlesi aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

"Doğruluk ve zenginlik kriterleri bağlamında öğretmen adaylarının yapmış oldukları doğal sayı tanımları nasıldır?"

Yöntem

Öğretmen adaylarının tanımlamalarla ilgili var olan bilgilerini olduğu gibi ortaya koymayı amaçlayan bu betimsel çalışmanın modeli 'tarama modeli' olarak ifade edilmektedir. Tarama modelleri; geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekilde betimlemeyi amaçlayan araştırma modelidir (Karasar, 1999). Bu modele göre, araştırmaya konu olan birey veya nesne, kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır. Herhangi bir şekilde değiştirme veya etkileme çabası gösterilmez (Karasar, 1999). Tarama modelleri çeşitli açılardan sınıflandırılabilir. Bu çalışmada bir grubun bir konuyla ilgili bilgileri derinlemesine incelenmekte ve bireylerin konu ile ilişkisine yönelik bir yargıya varmak amaçlanmaktadır. Bu nedenle bu nitel çalışmanın modeli örnek olay tarama modeli olarak da ifade edilebilir.

Çalışma Grubu

Çalışma grubunu, Türkiye'nin İzmir ilinde yer alan ve ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 360 öğrenci arasından tabakalı ve rastgele örnekleme yöntemiyle seçilen 160 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Her sınıf düzeyindeki 90 öğrenci bir tabaka olarak kabul edilmiş ve her bir tabaka arasından 40'ar öğrenci rastgele örnekleme yöntemiyle seçilmiş ve bu öğrencilere açık uçlu ölçekler uygulanmıştır. Ayrıca bu öğrencilerin arasından rastgele örnekleme ile her sınıf düzeyinden ikişer öğrenci seçilip yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır.

Veri Toplama Araçları

Bu çalışma, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar ve işlemler öğrenme alanına ilişkin alan ve pedagojik alan bilgilerini incelemeyi amaçlayan doktora tezinin bir parçasını oluşturmaktadır. Tez kapsamında öğretmen adaylarının alan bilgilerini incelemek üzere dört ölçek geliştirilmiştir (Konu Ölçeği, Kavram Ölçeği, Problem Çözme Ölçeği, Epistemik Düzey Ölçeği).Bu ölçeklerden kavram ölçeği, 14 kavramın tanımını içeren açık uçlu bir ölçektir. Bu çalışmada ölçekte bulunan "Doğal sayı nedir? Tanımlayınız." sorusuna ait veriler değerlendirilmiştir.

Verilerin Analizi

Veriler, tanımlarla ilgili çeşitli kriterler baz alınarak analiz edilmiştir. Zazkis ve Leikin (2008) tarafından öğretmen tanımlarına yönelik geliştirilmiş olan kriterlerden zenginlik ve doğruluk kriteriyle birlikte Aristo tarafından belirtilen hiyerarşi kriterine göre tanımlar incelenmiştir. Doğruluk kriterine göre tanımlar; uygun (titiz ve titiz olmayan) ile uygun olmayan (gerekli ancak yeterli değil, yeterli ancak gerekli değil ne yeterli ne gerekli) şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Her kategoriye ve farklı sınıf düzeylerine ait öğrenci dağılımları frekans ve yüzdelerle birlikte özetlenerek yorumlanmıştır. Birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri seti kodlanır ve ortaya çıkan kodların benzerlikleri ve farklılıkları sayısal olarak karşılaştırılarak en az 0.70 düzeyinde bir güvenirlik yüzdesine ulaşmak gerekmektedir (Şimşek ve Yıldırım, 2011: 233). Bu çalışmada da veriler iki matematik eğitimcisi tarafından ayrı ayrı kodlanmış ve kodlama güvenirliğinin 0.88 olduğu görülmüştür. Farklılaşan maddeler üzerine tartışılarak uzlaşı sağlanmıştır.

Yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğretmen adayı ve araştırmacı arasında geçen diyaloglara çalışmada yer verilmiş ancak öğrencilerin gerçek isimleri yerine rumuzları kullanılmıştır.

Ayrıca, doğal sayıların sıfırdan veya 1'den başlaması çeşitli kaynaklara göre farklılık gösterebilmektedir (Bourbaki

1968; Halmos 1974; Courant & Robbins, 1996). Ortaokul düzeyinde 0, 1, 2, 3,… şeklinde alınan doğal sayılar üniversite düzeyinde ise 1, 2, 3, 4,… şeklinde de alınabilmektedir. Bu nedenle bu çalışmada sıfırın kümedeki varlığı veya yokluğu titizlik ölçüsü olarak değerlendirilmemiştir.

Bulgular

Çalışmada,tanımlamaların uygunluk oranına sınıf düzeylerinin etkisinin araştırılması amaçlanmamıştır. Ancak bu bölümde genel bir fikir vermesi açısından tablolar sınıf düzeyleri de göz önüne alınarak sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının doğal sayı tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Öğrenci yanıtlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere dağılımı (f, %)

		1.SINIF	2.SINIF	3.SINIF	4.SINIF	TOPLAM
Uygun	**Titiz**	12 (%30)	17 (%42,5)	19 (%47,5)	23 (%57,5)	**71 (%44,38)**
	Titiz Olmayan	5 (%12,5)	5 (%12,5)	6 (%15)	7 (%17,5)	**23 (%14,38)**
Uygun Toplam		17 (%42,5)	22 (%55)	25 (%62,5)	30 (%75)	**94 (%58,75)**
Uygun Olmayan	**Yetersiz**	22 (%55)	15 (%37,5)	14 (%35)	8 (%20)	**59 (%36,88)**
	Gereksiz	0 (%0)	2 (%5)	0 (%0)	1 (%2,5)	**3 (%1,88)**
	Ne Gerek Ne Yeter	1 (%2,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	1 (%2,5)	**4 (%2,5)**
Uygun		23	18	15	10	**66**

Olmayan Toplam	(%57,5)	(%45)	(%37,5)	(%25)	**(%41,25)**
TOPLAM	**40**	**40**	**40**	**40**	**160**

Tablodan da görüldüğü gibi, en temel sayılabilecek sayı kümesi olan "doğal sayılar" tanımında dahi öğrencilerin yaklaşık %40'ı uygun olmayan tanımlar yapmıştır. Ayrıca uygun tanım yapan öğrenci sayısının sınıf seviyesi ile birlikte arttığı görülmektedir. Her bir kategoriye ait yanıtların dağılımı detaylı olarak aşağıda verilmiştir.

Uygun Tanımlar

Gerek ve yeter şartların tam olarak verildiği ve verilen bu kıstaslarla doğal sayı kümesini oluşturabilen tanımlar uygun tanımlar olarak değerlendirilmektedir. 94 öğrenci yanıtının yer aldığı bu kategoride tanımlar, minimallik kriterini sağlayıp sağlamaması ve matematiksel dil kullanımındaki titizlik göz önüne alınarak titiz ve titiz olmayan tanımlar olarak iki alt kategoriye ayrılmıştır.

Uygun ve titiz tanımlar

Doğal sayıların uygun matematiksel terminoloji kullanılan, gerek ve yeter şartlarının tam olarak verildiği ve minimal olan tanım örnekleri bu kategoride yer almaktadır. 71 öğrencinin tanımları bu kapsamda değerlendirilmiştir. Bazı öğretmen adayları sayma sayılarından, bazıları tam sayılardan bazıları da ardışıklıktan yola çıkarak tanımlama yoluna gitmiştir. Tablo 3'te uygun ve titiz tanımların dağılımı verilmiştir:

Tablo 3. Uygun ve titiz tanımların sınıf düzeyine göre dağılımı (f)

	1.SINIF	**2.SINIF**	**3.SINIF**	**4.SINIF**	**TOPLAM**
0,1,2,3,… ifadesi yer alan tanımlar	5	4	9	8	**26**
Tam sayılara dayalı tanımlar	4	8	1	2	**15**

Sayma sayılarına dayalı tanımlar	2	0	2	5	**9**
Küme oluşturulan tanımlar	0	2	2	3	**7**
Pozitif tam sayılara dayalı tanımlar	0	2	2	3	**7**
Ardışıklığa dayalı tanımlar	1	1	3	0	**5**
Diğer	0	0	0	2	**2**
TOPLAM	**12**	**17**	**19**	**23**	**71**

Tabloda sınıf seviyesi arttıkça uygun ve titiz tanım yapan öğrenci sayısının da arttığı görülmektedir. Her sınıf düzeyinde hemen hemen her kategoriye ait cevap veren öğrencilerin olduğu göze çapmaktadır. Uygun ve titiz tanımlar incelenerek oluşturulan kategoriler detaylı bir şekilde aşağıda verilmiştir. Ayrıca bu kategoriler zenginlik ve hiyerarşi kriterleri bağlamlarında da incelenmiştir:

- **0,1,2,3,… ifadesi yer alan tanımlar:** "Sıfır veya 1'den başlayıp sonsuza kadar 0,1,2,3,… şeklinde giden sayılardır." şeklinde 26 öğrenci tanım yapmıştır. Bazı öğrenciler sıfır yerine 1'i başlangıç noktası olarak ele almıştır. 0,1,2,3,…, n, n+1,… şeklinde cebirsel genelleme içeren bir tanımın daha uygun olacağı düşünülse de bu şekilde tanım yapan öğrenci olmamıştır. Buna rağmen literatürde yapılan tanımlar göz önüne alınarak genel terim içermeyen tanımlar da uygun ve titiz olarak ele alınmıştır.

- **Tam sayılara dayalı tanımlar:** 15 öğrenci "Sıfırdan sonsuza kadar giden tam sayılardır." veya "[0, +∞) aralığındaki tam sayılardır." şeklinde tam sayılardan yola çıkarak tanım yapmıştır. Aristo'nun hiyerarşi kriteri göz önüne alındığında tanımı yapılacak olan kavram daha önce tanımı yapılmış bir kavramın özel bir durumu olmalıdır. Doğal sayıları da tam sayılardan yola çıkarak tanımlamak hiyerarşi kriterine göre uygundur. Ancak öte yandan bir kavramın tanımı öğrencinin ön bilgilerine dayalı olmalıdır (Zazkis&Leikin, 2008; Shield, 2004). Tam sayılardan önce doğal sayıları öğrenen öğrencilere bu örneklerdeki tanımların yapılması uygun değildir. Ancak burada tanımların doğruluğu incelendiği için tanımın genelden özele veya özelden genele olması önem teşkil etmemektedir. Bu nedenle örnekler uygun ve titiz olarak ele alınmıştır.

Görüşme yapılan 2.sınıf öğretmen adayı Çise ile araştırmacı arasında şu diyalog geçmiştir:

A: Doğal sayı nedir? Doğal sayıyı nasıl tanımlarız?
Ç: Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden sayılara denir.
A: Sıfırdan sonsuza kadar giden tüm sayılar mı? Mesela bu şekilde bir tanım yapılırsa 5,5'i de doğal sayı alamaz mıyız?
Ç: Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden tam sayılardır diyebiliriz o zaman.
A: Tam sayılardır diyorsun yani. Peki ya tam sayı nedir?
Ç: Doğal sayıların, onların negatiflerinin ve sıfırın birleşmesiyle oluşan sayılardır.
A: Doğal sayı tanımında tam sayıyı, tamsayı tanımında da doğal sayıyı kullandın.
Ç: Evet doğru olmadı bu şekilde sanırım (Gülerek)
A:Doğal sayıyı tam sayı kavramını kullanmadan nasıl tanımlarız peki?
Ç:Ardışıkdiyebiliriz aslında o zaman. Sıfırdan başlayıp ardışık ilerleyen ya da birer artarak ilerleyen sayılardır denilebilir.

Görüldüğü gibi Çise de ilk başta "Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden sayılardır." diyerek yeterli bir tanım yapmamıştır. Daha sonra tanımını düzeltip "Tam sayılardır." ifadesi eklemiştir. Böylece tanım uygun hale gelmiştir. Ancak tam sayı tanımı sorulduğunda da tanımın içerisinde 'doğal sayı' ifadesini kullanmıştır. Araştırmacının yeni bir doğal sayı tanımı istemesinin ardından ardışıklıktan yola çıkarak yeni ve uygun bir tanım yapmıştır.

• **Sayma sayılarına dayalı tanımlar:** 9 öğrenci sayma sayılarından yola çıkarak tanım yapmıştır: "Sayma sayılarına sıfırı ekleyerek oluşturduğumuz sayı kümesidir.", "Sıfırla başlayan sayma sayıları ile devam eden sayı kümesidir." ve

"Doğal sayılar, sayma sayılarıdır." şeklinde tanımlar yapılmıştır.

- **Küme oluşturularak yapılan tanımlar:** 7 öğrenci doğal sayıyı, "{0,1,2,3,...} kümesinin her bir elemanına denir." şeklinde küme oluşturarak tanımlama yoluna gitmiştir. Görüşme yapılan 4.sınıf öğrencisi Maksude ile araştırmacı arasında geçen diyalog şu şekildedir:

M:Cantor 1'le başlatıyordu ama ilkokul düzeyinde tanım yapacaksam sıfırla başlayan derim. Sıfırla başlayan sonsuza kadar giden sayılardır.

A:Öğrenci 0,757575... şeklindeki sayıyı doğal sayı almaz mı bu tanıma göre. Sonsuza gidiyor ve sıfırla da başlıyor.

M:Yok öyle sürekli halde olmayacak, ama onu nasıl söyleyebilirim.

A:Nasıl daha titiz bir tanım yapılabilir? Öğrencinin söylediğin tanımla birlikte tüm doğal sayıları ifade edebilmesi ve onlar dışında başka bir sayının tanıma uymaması gerekiyor.

M:Kesirli yazılamayacak derim. Ama ben bunu derste yapsam 'N' yazıp küme yapıp 0,1,2,3,… şeklinde gösteririm. Küme ile daha rahat anlaşılır.

Görüşmede Maksude sözel tanım yapmakta zorlanmış ve sonunda küme yaparak tanım yapılabileceğini ve bu şekilde kavramın daha anlaşılır olacağını ifade etmiştir.

- **Pozitif tam sayılara dayalı tanımlar:** 7 öğrenci hiyerarşi kriterine uygun ancak ön bilgilere dayalı olmayan pozitif tam sayılara dayalı tanım yapmıştır:

" $\mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ kümesinin elemanlarıdır."

"Sıfır ve pozitif tam sayıların birleşim kümesidir."

"Pozitif tam sayılar kümesidir."

- **Ardışıklığa dayalı tanımlar:**Ardışıklıktan yola çıkarak tanım yapan 5 öğrenci bulunmaktadır:

"0 veya 1'den başlayan sonsuza kadar birer artarak ilerleyen sayılardır."

> "Sıfırdan başlayan sonsuza kadar her bir adımda 1 eklenerek ilerleyen sayı kümesidir."
> "Sıfırdan veya 1'den başlayıp birer ardışık olarak sonsuza kadar giden sayılardır."

- **Zengin tanımlar:** "Diğer" kategorisinde yer alan iki tanım Leikin ve Zazkis (2008) zenginlik kriterinden yola çıkılarak zengin tanım olarak ele alınmıştır. 4.sınıf öğrencilerinden gelen bu iki tanım diğer tanımlara göre daha sıra dışı olarak düşünülmüştür.

Öğretmen adaylarından biri, "İlk terimi ve ortak farkı 1 olan aritmetik dizinin her bir terimine doğal sayı denir." şeklinde tanım yapmıştır. Bu tanım bizi 1,2, 3, 4, …, n,n+1,… aritmetik dizisine ve dolayısıyla doğal sayılara götürmektedir.

Bir başka öğretmen adayı ise "a,b$\in\mathbb{Z}$ ve b|a (b böler a)olmak üzere a/b şeklinde yazılabilen pozitif sayılardır." şeklinde bölünebilirlikten yola çıkarak tanım yapmıştır.

Her iki tanım da diğer tanımlara göre farklı bağlamlardan yola çıktığı ve rutinden uzaklaştığı için zengin tanım olarak değerlendirilmiştir.

Görüşme yapılan 2.sınıf öğrencisi Halit de bölünebilmeye dayalı bir tanım yapmıştır:

> **A:** Doğal sayı nedir? Öyle bir tanım yap ki bir cümlede doğal sayıları tam olarak ifade etsin.
> **H:** Yapayım. Üniversitede 1'den başlayarak gördük bu durumda 1'den başlayarak sonsuza kadar devam eden sayılardır. Kesri katıyor muyuz bunun içine?
> **A:** Kesirler var mı doğal sayılarda?
> **H:** Yok da 4/3 mesela 1'den büyük ya, öğrenci tanıma göre onu doğal sayı alabilir mi?
> **A:** Belki de. Peki, bunu engellemek için nasıl tanım yapmalıyız?
> **H:** 'Payı paydasına tam bölünen 1'den büyük sayılardır.' denir.
> **A:** 1'i doğal sayı almıyor muyuz?
> **H:** 1 ve 1'den büyük. 6/2 gibi yani.

Görüldüğü gibi, Halit ilk başta eksik bir tanım yapsa da kendisi tanımdaki eksikliği fark edip kesirlerden yola çıkarak yeniden tanımlama yoluna gitmiştir.

Uygun ancak titiz olmayan tanımlar

Gerek ve yeter şartları taşıdığı halde minimal olmayan veya matematiksel terminolojide hataları olan örnekler bu kategoride yer almaktadır.

- 11 öğrenci, "1'den veya sıfırdan başlayıp sonsuza kadar giden pozitif tam sayılardır." şeklinde tanım yapmıştır. Minimallik kriterine göre kavramı en az sayıda özellikle tanımlamak gereklidir. Burada pozitif tam sayıların verilmiş olması sayıların zaten 1'den veya sıfırdan (tanıma göre) başladığını göstermektedir. Her iki bilginin de verilmiş olması minimallik kriterine aykırıdır. Sadece "pozitif tam sayılardır." ifadesi kavramı oluşturmak için yeterlidir.
- 5 öğrenci "Sonsuza kadar giden sayma sayılarıdır.", "1'den başlayıp sonsuza kadar ilerleyen sayma sayılarıdır." şeklinde sayma sayılarına dayalı olarak tanım yapmıştır. Bu tanımlarda da minimallik kriterine uyulmamıştır. Sayma sayıları zaten 1'den başlayıp sonsuza kadar gitmektedir. Bu nedenle bu tanımlar uygun ancak titiz olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.
- 4 öğrenci, "{0,1,2,3,…,+∞} kümesinin her bir elemanıdır." şeklinde tanım yapmıştır. Kümenin içinde yer alan "+∞" terminoloji bakımından hatalıdır. Sonsuzu bir eleman olarak aldığı için bu tanım titiz olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.
- Diğer kategorisinde yer alan tanımlardan bir tanesi olağandan farklı olarak zengin tanım olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerden birinin yapmış olduğu tanım şu şekildedir: "Bir x reel sayısı a/b şeklinde yazıldığında ($b\neq 0$, $b\in\mathbb{Z}$) a, b'ye tam bölünebiliyor ve a=0 veya a ile b aynı işarete sahip ise ve $a.b\geq 0$ ise x bir doğal sayıdır." Öğrenci bölünebilmeden yola çıkmış ve reel sayılardan doğal sayılara hiyerarşi kriterine uygun tanım yapmıştır ancak altı çizili özelliklerden ikisini birden vererek minimallik kriterine uymamıştır.

Uygun ancak titiz olmayan tanımlara ait genel dağılım Tablo 4'te verilmiştir:

Tablo 4. Uygun ancak titiz olmayan tanımların sınıf düzeylerine göre dağılımı (f)

	1.SINIF	2.SINIF	3.SINIF	4.SINIF	TOPLAM
1'den başlayıp sonsuza kadar giden pozitif tam sayılardır.	3	2	2	4	**11**
Sonsuza giden sayma sayılarıdır.	0	0	3	2	**5**
$\{0,1,2, 3, \ldots,+\infty\}$ kümesinin her bir elemanıdır.	1	2	1	0	**4**
Diğer	1	1	0	1	**3**
TOPLAM	**5**	**5**	**6**	**7**	**23**

Uygun Olmayan Tanımlar

Kavramı oluşturacak olan özellikleri gerektiğinden fazla veya az veren, kavramdan daha genel veya daha spesifik olan ya da kavramla ilgisiz olan yanlış özellikler içeren tanım örnekleri bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar gerek ve yeter şartların varlığına göre üç kategoride incelenmiştir.

Gerekli ancak yetersiz tanımlar

Kavramı tanımlamak yerine sadece bazı özelliklerini listeleyen, kavramdan daha genel ifadeleri de örneklemeye neden olan tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımlar doğal sayıların özelliği olmasına karşı onları tanımlamak için yeterli değildir. Bu tanım örneklerinin dağılımı Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Gerekli ancak yetersiz tanımların sınıf düzeylerine göre dağılımı (f)

	1.SINIF	2.SINIF	3.SINIF	4.SINIF	TOPLAM
0 veya 1′den başlayan sonsuza giden (pozitif) sayılar	20	13	12	7	**52**
0 veya 1′den başlayan (pozitif) sayılar	1	2	1	1	**5**
0 veya 1′den başlayan ve a/b şeklinde yazılabilen sayılar	0	0	1	0	**1**
[0, +∞) aralığındaki sayılar	1	0	0	0	**1**
TOPLAM	**22**	**15**	**14**	**8**	**59**

Tabloda sınıf seviyelerindeki artışla birlikte yetersiz tanım yapan öğretmen adayı sayısının azaldığı dikkat çekmiştir. Birbirlerine yakın ifadeler içeren bu tanımlar bazı nüanslarla birbirlerinden ayrılmıştır.

- 52 öğrenci,"Sıfırdan başlayan sonsuza giden sayılar.", "Sıfırdan başlayan pozitif yönde sonsuza giden sayılar.", "Sıfırdan başlayıp artı sonsuza giden sayılar" şeklinde tanımlar yapmıştır. Bu tanımlarda başlangıç noktasından ve sonsuzdan bahsedilmesine rağmen sayıların nasıl devam ettiği ile ilgili bilgi yoktur. Tüm pozitif reel sayıları bu tanımlara göre doğal sayı kabul edebiliriz. Bu nedenle tanımda verilen şartlar yeterli değildir.

Görüşme yapılan 8 öğrenciden 6′sının ilk dile getirdiği tanımlar "Sıfırdan veya 1′den başlayıp sonsuza giden sayılar" olmuştur. Görüşmelerin devamında ise bu öğrencilerin tanımlarını düzelttikleri görülmüştür.

- "1′den başlayıp devam eden sayılar.", "Sıfırdan başlayan pozitif sayılar", "Sıfırdan büyük sayılar" şeklindeki tanımlar sadece başlangıç noktasını belirten tanımlardır. Sıfır veya 1′den başlanması ve sıfırdan büyük olunması gibi şartlar doğal sayılar için gerek şart niteliği taşımaktadır ancak bu özellikler sadece doğal sayıları işaret etmek için yeterli değildir. Çünkü bu örnekler ilk kategoride olduğu gibi doğal sayılara göre daha geniş olan rasyonel ve irrasyonel kümeleri de kapsayıcı ifadelerdir.

- "0 veya 1'den başlayan ve a/b şeklinde yazılabilen sayılar" şeklinde tanım yapan 1 öğrenci bulunmaktadır. Tüm doğal sayılar a/b şeklinde yazılabilmektedir. Bu nedenle bu özellik gerek şarttır ancak rasyonel sayılar da a/b şeklinde yazılabildiği için yeter şart değildir.
- "[0, +∞) aralığındaki sayılar." şeklinde tanım yapan 1 öğrenci olmuştur. Yine bu özellik doğal sayıları oluşturmak için yeterli bir şart değildir.

Yeterli ancak gereksiz tanımlar

Kavramı gerekli olmayan şartlarla sınırlayan, kavram yerine onun spesifik bir kısmını oluşturan tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride 3 öğrenci bulunmaktadır.Bu 3 öğrencinin yaptığı tanımlarla ("Sıfırdan dokuza kadar olan tam sayılar","sıfırdan dokuza tüm rakamlar", "sıfırdan n'e kadar olan sayma sayıları")elde edilen sayılar doğal sayılardır. Ancak elde edilen sayılar, doğal sayıların sadece spesifik bir kısmını içermektedir. Kısıtlama gereksiz bir kısıtlamadır. Bu nedenle bu tanımlar yeterli (elde edilen sayıların doğal sayı olduğu kastediliyor) ancak gereksiz tanımlar olarak sınıflandırılmaktadır.

Görüşme yapılan 1.sınıf öğrencisi Buse "Doğal sayı, sıfırdan dokuza kadar olan sayılardır." şeklinde bir tanım yapıp araştırmacının "Sıfırdan dokuza kadar mı?" şeklindeki sorusu üzerine, "Dokuz değil sonsuza kadar" şeklinde düzeltmiştir.

Ne gerekli ne yeterli tanımlar

Kavramı tanımlayabilmek için verilen özelliklerin kavramın oluşmasını sağlamak için yetersiz olması ve aynı zamanda gerekli olmayan özelliklere de sahip olması durumunda yapılan tanımlar bu kategoride ele alınmaktadır.

Bu kategoride yer alan 4 öğrencinin yanıtları aşağıda verilmiştir.

- Bir öğrenci (3.sınıf) doğal sayıyı,"Sıfırdan dokuza kadar olan sayılar" şeklinde tanımlamıştır. Bu tanım hem doğal sayıları sınırlamıştır, hem de sıfır ve dokuz arasındaki diğer sayıları (π gibi) da içerebilmektedir. Bu nedenle tanım ne yeter şart ne de gerek şarttır.
- "1'den n'e kadar tüm sayılar" şeklinde tanım yapan bir öğrencinin (2.sınıf) ifadesinde de gereksiz bir kısıtlama mevcutken n'in ne olduğu da açık değildir. Bu nedenle aynı zamanda tanım yetersizdir.
- 4. sınıfta okuyan öğretmen adayının "Sayılamaz sonsuz kümelere denk olan sayı kümesidir." tanımı ve 1. sınıf öğretmen adayının "Somut gösterilen sayılardır." tanımı da yeterli veya gerekli tanımlar değildir.

Tartışma ve Yorum

Bu çalışmada öğretmen adaylarının "doğal sayı" kavramına ilişkin yapmış oldukları tanımlar, Zazkis ve Leikin (2008) tarafından ortaya atılan "öğretmen tanımlarının analizi için oluşturulan kategoriler" ışığında incelenmiştir.

En temel sayı kümesi olan doğal sayılarda dahi öğretmen adaylarının uygun tanım yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Uygun tanım yapan öğretmen adaylarının oranı %58,75'te kalmıştır. Daha önce Zazkis ve Leikin (2008) tarafından yapılan çalışmada yine öğrencilerin ilkokul seviyesinde öğrendiği en temel şekillerden biri olan karenin tanımı sorulmuştur. Çalışmalarında, öğretmen adaylarının %60'ının uygun tanım yapabildiği görülmüştür. Hemen hemen herkesin ilkokuldan beri bildiği ve kolay olarak düşünebilecek kavramlar olan doğal sayı ve karede bile öğretmen adaylarının yarıya yakınının uygun tanım yapamaması düşündürücüdür.

Çeşitli araştırmalar göstermiştir ki kavramlar zorlaştıkça uygun tanımların oranında azalma olabilmektedir. Kubar (2012) öğretmen adaylarının 'tam sayı' tanımlarını incelemiş ve uygunluk oranının %52 olduğunu, Leikin ve Zazkis (2010) cebirsel bazı kavramlarda uygun tanımların yaklaşık olarak %35 oranında olduğunu ifade etmiştir.

Leikin ve Zazkis (2010) geometri, cebir ve analiz gibi farklı matematik alanlarındaki öğretmen adaylarının tanımlamaları üzerine yaptıkları çalışmada yapılan tanımları bu çalışmada olduğu gibi doğruluk ve zenginlik kriterleri bağlamında incelemiştir. Araştırmanın bulguları bu çalışmadaki gibi bazı tanımların çeşitli kısıtlamaları atladığı için yetersiz olduğunu, bir kısmının ise gereksiz şartlarla kavramı kısıtladığını göstermiştir.

Ayrıca öğrencilerin hiçbirinin doğal sayıları Peano Aksiyomlarına dayalı olarak tanımlamamaları dikkat çekmiştir. Van Dormolen ve Zaslavsky (2003) çalışmasında da aksiyomatik yapıya dayalı formal tanımların çok yapılmadığı belirtilmiştir. Bu iki sonuç dikkate alındığında öğretmen eğitiminde formal tanımlara daha sık yer verilmesi gerektiği söylenebilir.

Araştırma sonuçlarına göre bir diğer dikkat çekici bulgu, sınıf seviyesi ile birlikte uygun tanım yapan öğrenci oranının da yükselmesi olmuştur. 1. sınıflarda %42,5 olan uygunluk oranı, 4. sınıflarda %75'e kadar çıkmıştır. Buradan üniversite eğitiminin doğal sayı tanımları açısından öğretmen adayları üzerinde olumlu etkisinin olduğu sonucu çıkarılabilir.

Leikin ve Zazkis (2010) ayrıca tanımlamanın matematik öğretmen adayları için zorlu bir görev olduğu ve bir tanımın ne olduğu konusunda öğretmen adaylarının bilgi eksikliklerinin olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmada da yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının uygun olmayan tanımlar yapmalarına rağmen doğal sayının ne olduğunu bildikleri görülmüştür. Kavram imajları ve yapılan tanımlardaki uyuşmazlıkların nedenini anlamak için öğretmen adaylarına matematiksel bir tanımın nasıl olması gerektiği de sorulmuştur. Her ne kadar bu çalışmanın konusu olmasa da matematiksel bir tanımın nasıl olması gerektiğiyle, gerek ve yeter koşulların önemi ile ilgili farkındalıklarının olmadığı görülmüştür.

Görüşme yapılan 4.sınıf öğrencisi Şeyma'nın, "Ben bu ölçeği uyguladıktan sonra eve gidip bazı kavramların tanımlarının nasıl yapılacağına baktım. Bunları daha önce düşünmememe de şaşırdım açıkçası. Çünkü bunları öğrenciler sorabilir. Çok alt düzeyde ama biz bunların üzerine düşünmüyoruz hiç. Üniversitede sürekli ispat teorem yapıyoruz. Doğal sayıları da biliyorum ama işte ölçeği uygularken nasıl tanımlarım diye düşündüm, 1′den sonsuza kadar demiştim. Şimdi ise 1′den sonsuza kadar birer ardışık ilerleyen sayılar diyorum." şeklindeki öz farkındalık içeren doğal sayı tanımıyla önemli bir sorunu dile getirdiği söylenebilir. Öğretmen eğitiminde kavramların üzerinde düşünülmemesi ve tanımlanmaması sonucunda öğretmen adaylarında da "Bir kavram tanımı nasıl olmalıdır?" şeklinde bir düşüncenin oluşmasını beklemek gerçekçi olmayabilir. Wilson'un (1990) da belirttiği ettiği gibi tanımları sık sık kullansak bile, tanımlamaların niteliğine nadiren odaklandığımızı ve neyin iyi bir tanım olacağıyla ilgili az düşündüğümüzü söyleyebiliriz. Baş ve diğerleri (2015) geniş bir literatür taramasıyla ortaya koymuş oldukları öğrencilerin tanım yapamama nedenleri arasında gösterdikleri" matematiksel terminolojinin ve matematiksel dilin doğru kullanılmaması" ve "öğretmenlerin matematiksel kavramları öğretmeyi ihmal etmeleri" bu çalışmayla da ilişkilendirilebilir. Yapılan bu çalışmada görülmüştür ki, matematiksel dilin kullanımındaki dikkatsizlikler öğretmen adaylarında da olabilmektedir. Doğal sayı kümesinin liste yöntemiyle gösteriminde "∞" sembolünün küme içerisinde sanki bir elemanmış gibi yazımı bu kapsamda değerlendirilebilir. Ayrıca yine Baş ve diğerlerinin (2015) ifade etmiş olduğu "öğretmenlerin matematiksel kavramları öğretmeyi ihmal etmeleri" öğretmenlerin kendilerinin de tanım üzerine düşünmemelerinden kaynaklı olabileceği söylenebilir.

Doğal sayı tanımında ardışıklıktan, tam sayılardan hatta aritmetik dizilerden yola çıkılabildiği bu çalışmada görülmüştür. Hatta görüşme yapılan bir öğrencinin doğal sayıyı tam sayılardan yararlanarak tanımladığı, tam sayıyı da doğal sayıdan yararlanarak tanımladığı dikkat çekmiştir. Bu şekilde bir X kavramını tanımlarken Y kavramından, Y kavramını tanımlarken aynı zamanda X kavramından yararlanmak pedagojik açıdan doğru kabul edilmeyebilir. Ancak birbirleriyle alt küme ilişkisiyle bağlı kavramlarda X'den yola çıkarak Y'nin tanımlanması veya tam tersinin olması matematiksel olarak yanlış değildir. Sadece pedagojik yönden itiraz edilebilir (Zazkis & Leikin, 2008). Pedagojik açıdan bakıldığında tanımlar öğrencilerin ön bilgilerine dayalı olarak yapılmalıdır (Shield, 2004; Zazkis & Leikin, 2008).

Sonuçlar

Doğal sayı kavramının eşdeğer tanımlarla farklı şekillerde tanımlanabildiği görülmüştür. Kubar (2012) öğrencilerin matematiği keyfi bir kural ve tanımlar topluluğu olarak algılamaması için öğretmenlerin bazı kavram veya terimlerin neden başka bir şekilde değil de belirli bir şekilde tanımlandığını açıklayabilmelerinin gerekliliğini ifade etmiştir. Bu nedenle öğretmenler için sadece tanımı bilmenin yeterli olmadığını dile getirmiştir. Öğretmen adayının tanımlamalarda esnek ve akıcı olması tercih edilir. Buna göre bir öğretmen adayının eşdeğer tanımları bilmesinin ve kavramla ilgili zengin tanım yapabilmesinin önemli olduğu söylenebilir.

Öğretmen eğitimde çeşitli tanımlama faaliyetlerinin yapılması gerektiği ifade edilebilir. Vinner (2002)tarafından belirtildiği üzere, tanımlama faaliyetleri öğretmen adayının kavram imajı ile kavram tanımının örtüşmesini sağlar. Öğretmen ders içinde yapacağı tanımla öğrencilerin kavram imajlarının biçimlenmesinde rol oynayacağı için bu örtüşmenin çok önemli olduğu söylenebilir. Öğretmenin ders içerisinde yapacağı tanım, ne kadar kavram tanımına yakınsa öğrencilerde de o derece yakın bir imajın oluşması beklenir. Kavram imajlarının öğrencinin tüm düşünme ve öğrenme sürecini biçimlendirdiği göz önüne alınırsa doğal sayıyı eksik veya hatalı öğrenen bir öğrencinin tam sayı, rasyonel sayı ve irrasyonel sayı gibi diğer sayı kümelerinin öğreniminde de zorluk yaşayacağı düşünülebilir.

Öneriler

Bu araştırmada öğretmen adaylarının aslında çok iyi bildiğini düşündüğümüz doğal sayı kavramını tanımlarken yaşadıkları sıkıntılar ortaya konulmaya çalışılmıştır. Tüm sonuçlar değerlendirildiğinde bazı öneriler sunulabilir:

Doğal sayı tanımlanırken, tüm doğal sayılara ulaştırabilecek ve fazlasına işaret etmeyecek gerek ve yeter şartların ifade edilmesi gerekir. Bunun yanı sıra öğretmenler minimalliğe dikkat etmeli ve gereğinden fazla bilgi vermemelidir. Bu da öğretmen eğitiminde tanımların yapısına odaklanılması gerektiğini düşündürebilir. Bir tanımda olması gereken gerek ve yeter şartlarla birlikte tanımın minimalliğinin önemi vurgulanmalıdır.Üniversitede çeşitli tanımlama etkinlikleri yapılarak temel kavramlar için gerekli ve yeterli olan şartlar tartışılabilir.

Görüşme yapılan 4. sınıf öğrencisi Şeyma'nın tanımlara üniversite eğitiminde çok odaklanılmadığı eleştirisi göz önüne alındığında matematikte ve matematik eğitiminde tanımların rolünün ve öneminin bilincinin öğretmen adaylarına kazandırılması gerektiği söylenebilir. Tanımların önemini içselleştiren bir öğretmen adayının ileride yaşayacağı kendi öğretim tecrübesinde tanımları göz ardı etmeyeceği tahmin edilebilir.

Doğal sayı kavramında farklı şekilde tanımlamalar yapıldığı göz önüne alındığında öğretmen eğitiminde yapılacak her tanıma eş değer tanımların aranabileceği ve bununla ilgili çalışmalar yapılabileceği söylenebilir. Böylece adayların hangi tanımın daha şık olduğu konusunda da fikir yürütmesi sağlanabilir.

Sayı kümelerinin tanımlarının üzerinde özenle durulması gerektiği söylenebilir. Hem doğal sayıdan başlayarak gerçek sayıya doğru, hem de gerçek sayıdan başlayarak doğal sayıya doğru sayı kümelerinin tanımlarının yapılmasına teşvik etmenin hiyerarşiyi kavrama açısından da eş değer tanımlar üretme açısından da faydalı olacağı düşünülebilir. Ayrıca her bir sayı kümesiyle ilgili ortaokul düzeyinde yapılabilecek tanımların tartışılmasının öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisinin gelişimine katkı sağlayacağı düşünülürken, aksiyomatik yapıdaki formal tanımların da “matematik alan bilgisi” açısından önemli olduğu söylenebilir. Bu nedenle öğretmen eğitiminde her ikisinin de üzerinde durulması gerektiği ifade edilebilir.

Öğretmenlere, tanımlamanın rolünü, önemini ve çeşitli kavramların tanımlarını içeren bir hizmet içi eğitim verilerek tanımlama faaliyetleri yaptırılabilir. Çünkü belki de her şeyden önce öğretmenlere kavramlar üzerine düşünecek fırsatlar vermek gerekmektedir.

Ayrıca araştırmacılar için farklı kavramları içeren veya farklı öğrenme alanlarına yönelik tanımlama çalışmaları önerilebilir. Sadece öğretmen adaylarının değil öğretmenlerin veya ilkokul, ortaokul veya ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerin de tanımları incelenebilir.

Kaynaklar

Baş, F., Çakmak, Z., Işık, A. ve Bekdemir, M. (2015). Öğretim elemanları ile öğrencilerin derste oluşturduğu tanımlar arasındaki farklar ve sebepleri. *İlköğretim Online, 14*(4), 1276-1289.

Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets: Elements of Mathematics,*Hermann.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). "The Natural Numbers." Ch.1 in *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods,* 2nd ed. England: Oxford University Press, pp. 1-20.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411-424.

Halmos, P. R. (1974). How to talk mathematics. *Notices of the American Mathematical Society, 21*(3), 155-158.

Karasar, N. (1999). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yay.

Kubar, A. (2012). *Pre-service elementary mathematics teachers' knowledge about definitions of integers and their knowledge about elementary students' possible misconceptions and errors in* *describing integers.* Unpublished master's thesis. METU, Ankara.

Leikin, R. & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers’ knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 451-466.

Shield, M.(2004). Formal definitions in mathematics. *Australian Mathematics Teacher, 60*(4), 25–28.

Şimşek, H. ve Yıldırım, A. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Tall, D. &Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(3), 341-349.

Unlu, M. & Horzum, T. (2018). Mathematics Teacher Candidates' Definitions of Prism and Pyramid. *International Journal of Research in Education and Science, 4*(2), 670-685.

Van Dormolen, J. & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91-106.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Springer, Dordrecht.

Wilson P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 31-47.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2),15-21.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.

How Do Prospective Mathematics Teachers Define Natural Numbers? *

Yusuf Emre Ercire,† and Serkan Narlı

Dokuz Eylül University, Turkey

Received: 08.07.2019 - Revised: 24.08.2019 - Accepted: 02.09.2019

Citation: Ercire, Y. E. and Narlı, S. (2019). How Do Prospective Mathematics Teachers Define Natural Numbers? *Amasya Education Journal*, *8*(2), 240-271.

Summary

Problem Statement: Defining, which is one of the major mathematical efficiencies together with proving and problem solving, is one of the main components of content knowledge (Leikin and Zaskis, 2010). Definitions affect teachers' didactic decisions such as teaching methods, the order of topics and which theorems and proofs will be handled. Definitions and the ways these definitions are presented to students shape the concept images of students. These concept images affect the thinking processes of learners (Tall and Vinner 1981; Vinner, 2002). It may be noted that the correct perception of number sets, which is one of the major concepts of mathematics education leads to the understanding of mathematics and its use in daily life. Number sets whose first ring is natural numbers are connected to each other with precondition relation, from natural numbers to real numbers. It is important that teachers and prospective teachers should have correct knowledge of these sets and ability to describe them in

*Corresponding Author: Phone: +90 554 3721557, e-mail:yusuferc@gmail.com

†This study was prepared using a part of the first author's PhD thesis

ISSN: 2146-7811,

accordance with the various criteria (correctness, richness, accessibility, generality).

Purpose of the Study: This research is part of a thesis with a larger scope, written in order to determine the content and pedagogical content knowledge of prospective teachers. It aims to examine the natural number definitions of prospective teachers within the context of correctness and richness criteria.

Method(s): An open-ended scale including the definitions of 14 concepts (natural number, prime number, absolute value etc.) was implemented on 160 primary mathematics teacher candidates, 40 from each grade. Moreover, semi-structured interviews were conducted with 8 prospective teachers, two from each grade. In this study, the definition samples of prospective teachers regarding the "natural number" concept, which is one of the basic concepts of this learning domain, were examined with regard to the criteria formed by Zazkis and Leikin (2008).

Findings and Discussions: According to the research results, even with natural numbers, which may be expressed as the most basic number set, the prospective teachers were observed to have difficulty in making appropriate definitions. The ratio of prospective teachers making appropriate definitions remained at 58,75%. On the other hand, some appropriate definitions were observed not to be rigorous for reasons such as negligence in mathematical language and not minimal. The increase in the ratio of the prospective teachers making appropriate definitions parallel to the class level attracted attention. The prospective teachers are expected to be flexible and fluent about defining the concepts. It may be noted that this is why it is important that they are able to make equivalent definitions within different contexts. The definition of "natural number," was observed to have been made based on integers, counting numbers and even arithmetic sequences. That no prospective teacher made a definition based on an axiomatic structure such as axioms of Peano attracted attention. The similar case is also mentioned in the study of Van Dormolen and Zaslavsky (2003). Furthermore, in the interview, it was observed that, when the student, who defined "natural number" by benefiting from integers, was asked the definition of integers, s/he answered the question by benefiting from natural numbers. Even though this situation can be criticized when it is examined pedagogically, it may be claimed that it does not pose a problem mathematically (Zazkis and Leikin, 2008). Moreover, the situations in which the interviewed students could not make appropriate definitions even though they knew what "natural number" is drew attention. When the reason for this was questioned, it was understood that the prospective teachers had not thought on the concept in detail before and that they did not have sufficient information regarding the importance of necessary and sufficient conditions.

Conclusions and Recommendations: Consequently, the aim of the study was to reveal the difficulties experienced by all the prospective teachers in defining "natural numbers," which we may expect them to know so well. When all results are evaluated, it may be asserted that, in teacher training it is quite important to focus on the structure, role and equivalent expressions of definitions and above all, to give them opportunities to think about concepts.

Keywords: Defining, Natural Number, Teacher Training