

DOLDURMA SERVİS KISITLI DİNAMİK ÖBEK BÜYÜKLÜĞÜ BELİRLEME PROBLEMİNİN STATİK- DİNAMİK BELİRSİZLİK STRATEJİSİ ALTINDA İNCELENMESİ

Ulaş ÖZEN*
Mustafa K. DOĞRU**

Öz

Bu çalışmada rassal ve dinamik öbek büyüklüğü belirleme problemi doldurma servis kısıtı ile ele alınmaktadır. Bu problem statik-dinamik belirsizlik stratejisi altında incelenmekte ve literatürde önerilmiş olan modellerden daha gerçekçi bir model geliştirilmektedir. Geliştirilen model için etkili bir çözüm yöntemi de önerilmektedir. Sayısal deneyler çözüm yönteminin etkinliğini göstermektedir.

Anahtar Sözcükler: Öbek büyüklüğü belirleme problemi, rassal talep, doldurma servis kısıtı, gevşetme, statik-dinamik belirsizlik stratejisi.

Abstract

In this study, stochastic and dynamic lot sizing problem is considered with fill rate service constraints. The problem is analyzed under the static-dynamic uncertainty strategy and a model, which is more realistic than the ones proposed in the literature, has been developed. An efficient solution procedure is proposed for the developed model. Numerical tests demonstrate the efficacy of the solution procedure.

Keywords: Lot sizing problem, stochastic demand, fill rate constraint, relaxation, static-dynamic uncertainty strategy.

* Dr., Alcatel-Lucent Bell Labs, Blanchardstown Industrial Park, Dublin 15, IRELAND, ulas.ozen@alcatel-lucent.com

** Dr., Alcatel-Lucent Bell Labs, 600 Mountain Avenue, Murray Hill, NJ 07974, USA, mustafa.dogru@alcatel-lucent.com

GİRİŞ VE LİTERATÜR TARAMASI

Bu çalışmada rassal ve dinamik öbek büyüklüğü belirleme problemi doldurma servis kısıtı altında incelenmektedir. Amaç sonlu planlama ufku içerisinde sipariş zamanlarının ve miktarlarının, sipariş ve envanter tutma maliyetlerini minimize edecek şekilde belirlenmesidir. Deterministik versiyonundan farklı olarak rassal öbek büyüklüğü belirleme probleminde, talep rassaldır. Deterministik öbek büyüklüğü belirleme problemi özellikle MRP planlaması bağlamında büyük ilgi görmüş ve literatürde geniş olarak incelenmiştir. Wagner ve Whitin (1958) kapasite kısıtı ve ardışıklama olmayan şartlar altında ilk öbek büyüklüğü belirleme problemini dinamik programlama modeli olarak formüle etmiş ve optimal politikayı bulmuştur. Zangwill (1969), Wagner ve Whitin modelini ardışıklamaya izin verilecek şekilde geliştirmiştir. Evans (1985), Federgruen ve Tzur (1991), Wagelmans *v.d.* (1992), Heady ve Zhu (1994) optimal çözümü bulmak için etkin algoritmalar önermişlerdir. Deterministik versiyonu üzerinde yapılan çalışma sayısı yüksek olsa da rassal öbek büyüklüğü belirleme problemi ile ilgili çalışmalar sınırlıdır ve periyodik envanter planlaması problemleriyle örtüşmektedir.

Çalışmamıza konu olan problemi ilk ele alan eserlerden bir tanesi Bookbinder ve Tan (1988) makalesidir. Yazarlar bu problemi statik-dinamik belirsizlik stratejisi altında çözmeyi önermişlerdir. Statik-dinamik belirsizlik stratejisinde sipariş verilecek periyotlar planlama ufku başında belirlenip sabitlenirken, sipariş miktarlarına ise ileride, sipariş verilecek periyotlarda karar verilir. Bu strateji envanter literatüründe periyodik ve çevrimsel bir politika olan (R_n, S_n) envanter politikasına denk gelmektedir. Bookbinder ve Tan, α -servis kısıtı (her periyot sonunda envanter seviyesinin negatif olma olasılığının α 'dan küçük olması) altında, rassal ve dinamik öbek büyüklüğü belirleme problemi için şans kısıtları (chance constraints) kullanarak eşdeğer bir deterministik model tanımlamıştır. Ortaya çıkan bu modeli çözmek için çeşitli bulgusal (heuristic) yollar önermiştir. Aynı varsayımlar altında, Tarim ve Kingsman (2004), Bookbinder ve Tan modeli için karışık tamsayı programlama modeli geliştirmiştir. Tarim ve Smith (2008) aynı problem için eşdeğer kısıt programlama (constraint programming) formülasyonu önermişlerdir. Sayısal sonuçlar kısıt programlama formülasyonunun karışık tamsayı programlama modeline yakın bir performans elde ettiğini göstermektedir.

Yakın zamanda yapılan bir çalışmada Tarim *v.d.* (2011), Tarim ve Kingsman (2004) karışık tamsayı programlama modelinin çözümü için etkili bir sayısal metod geliştirmişlerdir. Önerilen metodun standart karışık tamsayı programlama çözücülerinden (örneğin CPLEX) daha hızlı bir şekilde optimal

çözümü bulduğu birçok parametre bölgesinde göstermişlerdir. Başka bir çalışmada, Tempelmeier (2007) aynı problemi doldurma servis kısıtı altında ele almıştır. Yazar, Tarim ve Kingsman (2004)'ün karışık tamsayı programlama modelini doldurma servis kısıtlı problem için adapte etmiştir. Tempelmeier modeli, Tarim and Kingsman modelinden farklı olarak amaç fonksiyonunda fiziksel envanter seviyelerini kullanmaktadır.

Bu çalışmada Tempelmeier (2007) makalesindeki problemi ele almaktayız. Öncelikle, her ne kadar Tempelmeier pekin bir model (exact model) geliştirdiğini ileri sürse de, Tempemeier modelinin eldeki problem için yaklaşık bir model olduğunu göstermekteyiz. Bu problem için, Tempelmeier modelinden esinlenerek, daha gerçekçi bir model önermekteyiz. Modelimiz için etkili bir çözüm yöntemi de geliştirmekteyiz. Önerdiğimiz yöntem, ana hatlarıyla, Tarim *vd.* (2011) makalesinde önerilen yöntemin bir adaptasyonudur. Sayısal deneyler önerdiğimiz yöntemin ne kadar etkili olduğunu göstermektedir.

Çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. İzleyen bölümde envanter modelinin formülasyonu sunulmaktadır. Model için önerilen çözüm yöntemi üçüncü bölümde verilmektedir. Bu bölümde sayısal sonuçlar da tartışılmaktadır. Son olarak, dördüncü bölüm sonuç ve değerlendirmelere ayrılmıştır. Ana metinde verilmeyen teorem ispatları, Ekler bölümünde sunulmaktadır.

1. MODELİN FORMÜLASYONU

Bu çalışmada rassal ve dinamik öbek büyüklüğü belirleme problemi statik-dinamik envanter stratejisi altında incelenmektedir. Sistemde tek bir ürünün envanteri sonlu planlama ufkunda kontrol edilmektedir. Tedarikçide herhangi bir kapasite kısıtı bulunmamaktadır; her sipariş miktarı tedarikçi tarafından karşılanabilir. Planlama ufku eşit süreli zaman periyotlarından oluşmaktadır ve periyodik gözden geçirme uygulanmaktadır.

Periyot indisi $t \in \{1, \dots, N\}$ ile gösterilir. Planlama ufkunun ilk periyodu 1, son periyodu ise N ile ifade edilir. Talep rassal olup d_t rassal değişkeni t periyodundaki talebi gösterir. Periyot talepleri birbirinden bağımsızdır ve farklı dağılımlıdır. Diğer bir deyişle, d_t ve d_{t+1} bağımsız rassal değişkenler olmakla beraber, farklı olasılık dağılımlarına sahip olabilirler. Talep d_t sürekli rassal değişkendir, $t = 1, \dots, N$, ve artan birikimli dağılım fonksiyonuna sahiptir. Eğer bir periyottaki talep eldeki envanterden fazla ise aradaki fark arızaların ve en kısa sürede karşılanır. Siparişler periyot başlarında verilebilir ve hemen ele geçer; tedarik süresi sıfırdır.¹ Sistemde iki adet birim maliyeti kullanılmaktadır:

a : sipariş sabit maliyeti (TL/ sipariş)

h : birim envanter bulundurma maliyeti (TL/adet).

Sipariş maliyetleri periyot başlarında ödenirken, envanter bulundurma maliyetleri dönem sonunda elde kalan envanter üzerinden ücretlendirilir. Ardışık iki sipariş arasındaki zaman aralığı çevrim (replenishment cycle) olarak tanımlanır. Her çevrimde β ile ifade edilen hedef doldurma oranı (target fill rate) sağlanmak durumundadır. Amaç her çevrimdeki servis kısıtını sağlarken beklenen toplam maliyeti minimize eden envanter politikasını hesaplamaktır.

Yukarıda tarif edilen envanter sistemi statik-dinamik envanter stratejisi altında incelenmiştir. Planlama ufkunun başında (ilk periyodun başı) hangi periyotlar sipariş verileceği belirlenir ve bu karar fikslenir. Diğer bir deyişle, planlanma ufku içerisinde kaç adet sipariş verileceği ve bu siparişlerin zamanları ilk periyodun başında kesinleştirilir. Bu karar, Bookbinder ve Tan (1988) tarafından “statik-dinamik belirsizlik stratejisi” olarak isimlendirilmiş envanter kontrol yaklaşımının “statik” bölümünü oluşturmaktadır. Sipariş verilen bir periyotta tedarikçiden istenilecek miktar ise o zamana kadar gerçekleşen talepler gözlemlenerek belirlenir. Diğer bir deyişle, sipariş miktarlarına sipariş zamanları geldiğinde karar verilir. Bu karar ise stratejinin “dinamik” bölümünü oluşturmaktadır.

Daha önce de belirtildiği gibi statik-dinamik belirsizlik stratejisi ilk olarak Bookbinder ve Tan (1988) tarafından literatüre tanıtılmıştır. Yazarlar α -servis² kısıtlarının bulunduğu bir envanter sistemini incelemiş ve iki aşamalı bir çözüm yöntemi önermişlerdir. İlk aşamada bulgusal (heuristic) bir yaklaşımla sipariş verilecek periyotlar belirlenmektedir. İkinci aşamada ise doğrusal programlama kullanılarak baz stok (base stock) seviyeleri hesaplanmaktadır. Tarim ve Kingsman (2004) Bookbinder ve Tan modelini optimize eden karma tamsayı programlama modeli geliştirmişlerdir. Tempelmeier (2007), Tarim ve Kingsman modelinden esinlenerek, bu makaledeki çalışmaya konu olan doldurma kısıtlı envanter modeline karma tamsayı programlama modeli önermiştir. Bir sonraki bölümde Tempelmeier modeli detaylı bir şekilde incelenecek ve eleştirisi yapılacaktır.

1.1. Tempelmeier Modeli

Tempelmeier doldurma oranı kısıtlı envanter sisteminin statik-dinamik belirsizlik stratejisi altında incelenmek amacıyla aşağıdaki karma tamsayı programlama modelini geliştirmiştir; bakınız Tempelmeier (2007).

$$\min \mathbb{E}[TC] = \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h\tilde{I}_t^+) \quad (1)$$

s. t.

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{I}_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$\tilde{I}_t = \tilde{S}_t - \tilde{d}_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$\tilde{I}_t \geq \sum_{j=1}^t \left[\Gamma_{\tilde{d}_{t-j+1} + \dots + \tilde{d}_t}^{-1}(\beta) - \sum_{k=t-j+1}^t \tilde{d}_k \right] P_{tj} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\tilde{S}_t - \tilde{I}_{t-1} \leq M\delta_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

$$\tilde{I}_t^+ = \sum_{j=1}^t \left[\left(\sum_{k=1}^j \Gamma_{\tilde{d}_{t-j+1} + \dots + \tilde{d}_t}^{-1}(\beta) - \sum_{l=t-j+1}^{t-j+k} \tilde{d}_k \right) + \Gamma(S_{t-j+1}^*, d_{t-j+1} + \dots + d_{t-j+k}) \right] Q_{t,j} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^t P_{t,j} = 1 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$P_{t,j} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^t \delta_k \quad t = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (8)$$

$$Q_{t,j} \geq P_{t,j} - P_{t+1,j+1} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} P_{N+1,j} = 0 \quad (10)$$

$$\tilde{S}_t, \tilde{I}_t \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

$$\delta_t \in \{0,1\} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

$$P_{t,j}, Q_{t,j} \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (13)$$

Burada,

- TC:** planlama ufkundaki toplam maliyet miktarı
 δ_t : t periyodunda sipariş verilip verilmediğini gösteren 0-1 tamsayı değişkeni
 \tilde{I}_t : t periyodunun sonundaki beklenen net envanter seviyesi
 \tilde{I}_t^+ : t periyodunun sonundaki beklenen fiziksel envanter seviyesi, $\tilde{I}_t^+ = \max\{0, \tilde{I}_t\}$
 \tilde{S}_t : t periyodunun başındaki envanter seviyesi
 \tilde{d}_t : t periyodunda beklenen talep, $\tilde{d}_t = \mathbb{E}[d_t]$
 M : çok büyük bir sayı
 β : hedef doldurma oranı, $\beta \in [0, 1]$
 $\Gamma(y, Y)$: birinci derece kayıp fonksiyonu (first-order loss function),
 $\square(y, Y) = \mathbb{E}[\max(0, Y - y)]$
 Γ_X^{-1} : X rassal değişkeninin birinci derece kayıp fonksiyonunun ters fonksiyonu.
 $\square(x, X) = \beta \rightarrow \square_X^{-1}(\beta) = x$
 S_{t-j+1}^* : $t - j + 1$ ve t periyotları arasındaki talebi β doldurma oranında karşılayabilmek için gereken minimum açılış envanter miktarı,
 $S_{t-j+1}^* = \square_{d_{t-j+1} + \dots + d_t}^{-1}(\beta)$.

İfade etmektedir.

Amaç fonksiyonu (1) beklenen toplam maliyeti minimize etmektedir. Toplam maliyet, planlama ufkundaki sabit sipariş maliyetleri ile elde envanter tutma maliyetlerinin toplamıdır. Kısıt (2) sipariş verilen periyotlarda sipariş miktarının negatif olmamasını sağlamaktadır. Kısıt (3) ise periyot sonu beklenen envanter seviyesini (periyot envanter açılış seviyesi eksi beklenen periyot talebi) tanımlamaktadır. Sipariş verilen periyotlar kısıt (5) ile belirlenmektedir. Kısıt (6) ise beklenen fiziksel periyot sonu envanter seviyesini tanımlamaktadır. Değişkenler $P_{t,j}$ ve $Q_{t,j}$, verilen siparişlerin hangi periyotların taleplerini karşılamak için kullanılacağını saptamakta kullanılmaktadır. Eğer periyot t 'den önceki ilk sipariş verilen periyot $t - j + 1$ ise $P_{t,j} = 1$ olmaktadır; yoksa $P_{t,j}$ sıfır değerini alır. Negatif olmayan değişkenler (11) ve (13) kısıtları ile verilmektedir. Son olarak, (12) 0-1 tamsayı kısıtıdır.

Öncelikle, Tempelmeier (2007) tarafından verilen yukarıdaki formülasyonun aslında *yaklaşık* bir model olduğunu işaret etmek istiyoruz. Tempelmeier modelinde

$$“P_{t,j} = 1 \text{ ise yeni çevrim } S_{t-j+1}^* = \Gamma_{d_{t-j+1} + \dots + d_t}^{-1}(\beta) \text{ envanter düzeyi ile başlar}”$$

varsayımı yapılmaktadır. Bu varsayım, yeni bir çevrimin açılış envanter düzeyinin $\Gamma_{d_{t-j+1} + \dots + d_t}^{-1}(\beta)$ seviyesinin (yeni çevrimde hedef doldurma oranını sağlayan minimum envanter seviyesi) üzerinde olduğu durumları dahil

etmemektedir. Diğer bir deyişle, $t - j + 1$ periyodundaki başlangıç envanter düzeyi $S_{t-j+1}^* = \Gamma_{d_{t-j+1}+\dots+d_t}^{-1}(\beta)$ seviyesinden daha yüksek (olasılık dahilinde olan bir olay) ise periyot i ($i = t - j + 1, \dots, t$) sonundaki fiziksel envanter seviyesi

$$\tilde{I}_i^+ = S_{t-j+1} - \mathbb{E}[d_{t-j+1} + \dots + d_i] + \Gamma(S_{t-j+1}^*, d_{t-j+1} + \dots + d_i)$$

olur. Kısacası Tempelmeier (2007), Tarim ve Kingsman (2004) tarafından geliştirilmiş modeli, fiziksel envanter miktarını ekleyerek doldurma oranı kısıtlı sistemlere genişletmiş olsa da Tempelmeier modeli yaklaşıklamadır. İzleyen bölümde gerçek sistem için alternatif bir matematiksel programlama modeli tarafımızca sunulmaktadır.

1.2. Önerilen Model

Tek aşamalı doldurma oran kısıtlı envanter sistemini statik-dinamik belirsizlik stratejisi altında incelemekteyiz. Bu bölümde gerçek sistem için deterministik eşdeğer bir model önermekteyiz. Tempelmeier modeli gibi bizim modelimiz de Tarim ve Kingsman (2004) tarafından geliştirilmiş olan karma tamsayı matematiksel programlama modelinden esinlenmektedir. Bu nedenle aşağıda sunulan model ile Tempelmeier modeli bir çok ortak değişken ve kısıt paylaşmaktadır.

Model P

$$\min \mathbb{E}[TC] = \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h\tilde{I}_t^+) \quad (14)$$

s. t.

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{I}_{t-1} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

$$\tilde{I}_t = \tilde{S}_t - \tilde{d}_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

$$\tilde{S}_t - \tilde{I}_{t-1} \leq M\delta_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\tilde{S}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq -M\delta_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

$$\tilde{I}_t \geq \sum_{j=1}^t \left[\Gamma_{d_{t-j+1}+\dots+d_t}^{-1}(\beta) - \sum_{k=t-j+1}^t \tilde{d}_k \right] U_{t,j} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

$$\tilde{I}_t^+ \geq \sum_{j=1}^t \left(\tilde{S}_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+1}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_{t-j+1}, d_{t-j+1} + \dots + d_{t-j+k}) \right) U_{t,j} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^t U_{t,j} = 1 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

$$U_{t,j} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^t \delta_k \quad t = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (22)$$

$$\tilde{I}_t \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

$$\tilde{S}_t \geq 0 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

$$\delta_t \in \{0,1\} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

$$U_{t,j} \in \{0,1\} \quad t = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (26)$$

Önerilen modelin Tempelmeir modelinden iki temel farkı bulunmaktadır. İlk olarak, yaklaşık bir model yerine kesin bir model sunulmuştur. Denklem (6) ve (20) karşılaştırıldığında görüldüğü gibi Tempelmeir modeli her yeni çevrimin $S_{t-j+1}^* = \Gamma_{d_{t-j+1} + \dots + d_t}^{-1}(\beta)$ envanter düzeyi ile başladığını varsayarken bizim modelimiz envanter seviyesini \tilde{S}_{t-j+1} ile karar değişkeni olarak ele almaktadır. İkinci olarak, önerdiğimiz model kısıt (20) nedeniyle doğrusal olmayan programlama modeli olmaktadır. Önümüzdeki bölümde önerilen modelin nasıl çözüleceği tartışılacaktır.

2. MODELİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde önerilen modelin (Model P) çözümü tartışılmaktadır. Model P'nin bir varyasyonunu düşünelim. Yeni model sipariş verilen periyotları girdi olarak almaktadır. Diğer bir deyişle δ_t , $t = 1, 2, \dots, N$ karar değişkenleri olmayıp yeni model için girdi olarak kabul edilmektedir. Birleşimleri $\{1, 2, \dots, N\}$ olan iki ayrık küme tanımlıyoruz:

- A kümesi $\delta_i = 1$ eşitliğini sağlayan tüm $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ elemanlarından oluşur, (27)

- \bar{A} kümesini $\delta_i = 0$ eşitliğini sağlayan tüm $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ elemanlarından oluşur. (28)

Diğer bir deyişle, zaman periyotları kümesini ikiye bölmekteyiz: sipariş verilen periyotların kümesi A ve sipariş verilmeyen periyotların kümesi \bar{A} . Yukarıda (27) ve (28) ile verilen A ve \bar{A} kümelerini “sipariş çizelgesi” (replenishment schedule) olarak tanımlanmaktadır.

Teorem 1: Verilen bir sipariş çizelgesini (A ve \bar{A}) girdi olarak alan Model P için optimal çözüm aşağıda verilmiştir.³

$$\tilde{S}_t = \begin{cases} \max \left\{ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1}, \Gamma_{d_t+d_{t+1}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta), \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \right\} & t \in A \\ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A} \end{cases} \quad (29)$$

$$\tilde{I}_t^+ = \tilde{S}_t - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + d_{t+1} + \dots + d_t) \quad t \in A \cup \bar{A} \quad (30)$$

Yukarıda verilen \tilde{S}_0 , \tilde{d}_0 , T ve \underline{t} aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\tilde{S}_0 = I_0, \tilde{d}_0 = 0,$$

$$\underline{t} = \max \{k | \delta_k = 1, k \leq t\},$$

$$T = \begin{cases} N + 1 & \text{eğer} & t = N \\ N + 1 & \text{eğer} & \delta_k = 0 \forall k \in \{t + 1, \dots, N\} \\ \min \{k | \delta_k = 1, k > t\} & \text{aksi halde.} \end{cases} \quad (31)$$

İspat: Bakınız Ek.

Sipariş çizelgesi hangi periyotlarda sipariş verilir hangilerinde sipariş verilmeyeceğini gösterir. Teorem 1 verilen bir sipariş çizelgesi için optimal sipariş miktarı fonksiyonunu vermektedir. Sipariş çizelgesi biliniyor ise optimal envanter seviyeleri (sipariş sonrası) (29) denklemi kullanılarak kolayca hesaplanabilir. İlk \tilde{S}_1 bulunur, sonra \tilde{S}_2 ve bu şekilde devam ederek en son olarak \tilde{S}_N hesaplanır. Benzer şekilde fiziksel envanter seviyeleri (30) denklemiyle bulunur.

Teorem 1'i kullanarak Model P için denk yeni bir model aşağıda verilmektedir.

Model PE

$$\begin{aligned} \min_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N} \mathbb{E}[TC] &= \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h\tilde{I}_t^+) \\ s. t. \tilde{S}_t &= \begin{cases} \max \left\{ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1}, \Gamma_{d_t+d_{t+1}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta), \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \right\} & t \in A \\ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A}, \end{cases} \\ \sim + \\ I_t &= \tilde{S}_t - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + d_{t+1} + \dots + d_t). \quad t \in A \cup \bar{A}. \end{aligned}$$

2.1. Önerilen Modelin Gevşek Şekli: Model PR

Bu bölümde Model P'deki bazı kısıtlar gevşetilerek yeni bir model önerilmektedir. Kısıt (15) ve (23) gevşetilerek oluşturulan modele "Model PR" olarak adlandırmaktayız. Model PR'yi Model P'den ayırıştırabilmek için tüm \hat{S}_t ve \hat{I}_t^+ değişkenlerini ve \hat{I}_t^{r+} ile değiştirilmiştir. Bir sonraki teoremden, verilen bir sipariş çizelgesi altında Model PR'nin optimal çözümünü sunmaktayız.

Teorem 2: Verilen bir sipariş çizelgesini (A ve \bar{A}) girdi olarak alan Model PR için optimal çözüm aşağıda verilmiştir:

$$\hat{S}_t^r = \begin{cases} \Gamma_{d_t+d_{t+1}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta) & t \in A \\ \hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A} \end{cases} \quad (32)$$

$$\hat{I}_t^{r+} = \hat{S}_t^r - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\hat{S}_t^r, d_{\underline{t}} + d_{\underline{t}+1} + \dots + d_t) \quad t \in A \cup \bar{A}, \quad (33)$$

$\hat{S}_0^r = I_0, \tilde{d}_0 = 0$ ve \underline{t}, T Teorem 1'deki gibi tanımlanmaktadır.

İspat: Bakınız Ek.

Model P için geliştirdiğimiz denk modele benzer bir şekilde Model PR için eşdeğer bir model verilecektir. Teorem 2, verilen bir sipariş çizelgesi için tüm periyot başı ve sonu envanter seviyelerini vermektedir. Bu bilgiyi kullanarak Model PR'ye denk yeni bir model aşağıda verilmektedir:

Model PRE

$$\min_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N} \mathbb{E}[TC] = \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h\hat{I}_t^{r+})$$

s. t.

$$\hat{S}_t^r = \begin{cases} \Gamma_{d_t+d_{t+1}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta) & t \in A \\ \hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A}, \end{cases}$$

$$\hat{I}_t^{r+} = \hat{S}_t^r - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\hat{S}_t^r, d_{\underline{t}} + d_{\underline{t}+1} + \dots + d_t) \quad t \in A \cup \bar{A}.$$

2.2. Eşdeğer En Kısa Yol Formülasyonu

Model PRE, ağ optimizasyonu alanında derinlemesine çalışılmış en kısa yol problemine dönüştürülebilir. Çevrimsiz ağ (acyclic network) $\mathcal{F} = (D, \mathcal{A})$ düğüm kümesi $D = \{1, 2, \dots, N + 1\}$ ve ayrıt kümesi \mathcal{A} 'dan oluşmaktadır.

Düğüm $N + 1$ takma olup planlama ufkunun sonunu temsil etmektedir. Ayrıt kümesi, her düğüm çiftini birbirine bağlayan $(i, j \in D)$ ve $i < j$ sağlayan (i, j) ayrıtlarından oluşur. Her (i, j) ayrıtlının $c_{i,j}$ ile ifade edilen ve negatif olmayan bir maliyeti vardır. Bu maliyet, i periyodunda envanter seviyesini $\Gamma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_{j-1}}^{-1}(\beta)$ düzeyine çıkaracak kadar sipariş vererek $j - 1$ periyodunun sonuna kadar olan talep ihtiyaçlarını karşılayacak ve $j - 1$ periyodunun sonunda hedef servis seviyesini sağlayacak envanter miktarını buldurmanın maliyetidir. Periyot i başında sipariş verilip periyot j 'ye kadar başka sipariş verilmemektedir. Bunun sonucu olarak $c_{i,j}$ maliyeti aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$c_{i,j} = a + h \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Gamma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_{j-1}}^{-1}(\beta) - \sum_{m=i}^k \tilde{d}_m \right). \quad (34)$$

Model PRE için bir çözüm düşünelim: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$. Sipariş verilen ardışık i ve j periyotlarını ele alalım; diğer bir deyişle, $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $i < j$, $\delta_i = 1$, $\delta_{i+1} = \delta_{i+2} = \dots = \delta_{j-1} = 0$ ve $\delta_j = 1$. Model PRE'nin amaç fonksiyonundan görüleceği gibi periyot i 'den j 'ye kadar olan tüm periyotların maliyeti aşağıda verilmektedir:

$$a + h \sum_{k=i}^{j-1} \left(\Gamma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_{j-1}}^{-1}(\beta) - \sum_{m=i}^k \tilde{d}_m \right).$$

Yukarıdaki ifade (34) denkleminde verilen $c_{i,j}$ maliyetine eşdeğerdir. O zaman şu sonuca varabiliriz:

“Model PRE için i periyodunda envanter düzeyini $\Gamma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_{j-1}}^{-1}(\beta)$ seviyesine yükseltecek kadar sipariş verip j ($j > i$) periyoduna kadar sipariş vermemek, \mathcal{F} ağında (i, j) ayrıtlını seçmeye eşdeğerdir.”

Dolayısıyla, Model PRE'nin optimal çözümü, \mathcal{F} ağında 1 ve $N + 1$ düğümleri arasındaki en kısa yol probleminin çözümüne eşdeğerdir.

En kısa yol problemleri için geliştirilmiş verimli çözüm algoritmaları literatürde mevcuttur. \mathcal{F} çevrimsiz bir ağ olduğu için “ulaşan algoritma” (reaching algorithm), 1 düğümünden $N + 1$ düğümüne giden en kısa yolu $O(|\mathcal{A}|)$ zamanda bulur. \mathcal{F} ağında $N(N + 1)/2$ adet ayrıtlı olduğu için Model PRE'yi polinom zamanda çözebilecek etkin bir algoritma bulunmaktadır. Bir sonraki bölümde bu noktaya kadar çıkarılan sonuçlar kullanılarak Model P için bir çözüm algoritması sunulmaktadır.

2.3. Çözüm Yöntemi

Model PRE, §3.1’de gösterildiği gibi, Model PR’nin eşdeğeridir. Model PR ise Model P’nin gevşetilmiş bir şeklidir. Dolayısıyla,

- Model PRE, Model P için gevşetilmiş bir modeldir, ve
- Model PRE için optimal olan bir çözüm Model P için olurlu (feasible) ise, bu çözüm Model P için de optimaldir.

Model P için yukarıdaki çıkarımları baz alan üç aşamalı bir çözüm yöntemi önermekteyiz. Model P’nin optimal çözümünün karar değişkenleri * üstsimgesiyle (δ_t^* ve \hat{S}_t^* , $t = 1, 2, \dots, N$) gösterilmektedir. Ayrıca optimal amaç fonksiyonun değeri TC^* ile ifade edilir.

Aşama 1: En kısa yol probleminin çözümü

İlk aşamada Model PRE’nin optimal çözümü bulunur. §3.2’de detaylı olarak tartışıldığı gibi Model PRE’ye eşdeğer bir en kısa yol problemi oluşturmak mümkündür. En kısa yol problemi için her ayrıntın maliyetinin hesaplandığı bir ön hazırlık yapılması gerekmektedir. Toplam ayrıntı sayısı $N(N + 1)/2$ olduğu için bu hazırlık aşaması etkin bir şekilde tamamlanabilir. En kısa yol problemi “ulaşan algoritma” kullanılarak etkin bir şekilde çözülür. Aşama 1 sonunda elde edilen çözümünün karar değişkenleri ve amaç fonksiyon değeri r üstsimgesiyle ifade edilmektedir: δ_t^r , \hat{S}_t^r , $t = 1, 2, \dots, N$ ve TC^r .

Aşama 2: Olurluluk testi

Aşama 1 sonunda elde edilen çözüm (δ_t^r ve \hat{S}_t^r , $t = 1, 2, \dots, N$) Model P için olurluluk (feasibility) testinden geçirilir:

$$\hat{S}_t^r \geq \hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in A.$$

Diğer bir deyişle, $\delta_t^r = 1$ eşitliğini sağlayan her t periyodu için (sipariş verilen periyotlar) periyot başlangıç envanter seviyesinin (\hat{S}_t^r), bir önceki periyodun bitiş envanter seviyesinden ($\hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1}$) daha düşük olmaması gerekmektedir. Bu şart sağlanıyorsa algoritma

$$\delta_t^* = \delta_t^r \text{ ve } \tilde{S}_t^* = \hat{S}_t^r \quad t = 1, 2, \dots, N$$

çözümünü ve $TC^* = TC^r$ amaç fonksiyon değerini vererek sonlanır. Diğer durumda,

$$\exists t \in A \text{ öyle ki } \hat{S}_t^r < \hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1},$$

algoritma üçüncü aşamaya ilerler.

Aşama 3: Bulgusal Çözüm

Eğer ikinci aşamada algoritma sonlanmaz ise aşama 3'de, Model PRE'nin optimal çözümü baz alınarak bulgusal bir çözüm hesaplanır. Aşama 1 sonunda elde edilen çözümün sipariş zamanları (δ_t^r , $t = 1, 2, \dots, N$) Model P'ye girdi olarak verilirse, envanter seviyeleri Teorem 1 kullanılarak hesaplanabilir. Aşama 3 çözümü δ_t^r , $t = 1, 2, \dots, N$ ve bu değerlerin Teorem 1'deki \hat{S}_t tanımına yerleştirilmeleri ile hesaplanan \tilde{S}_t , $t = 1, 2, \dots, N$ değerlerinden oluşur.

2.4. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde §3.3'de önerilen sayısal yöntemin optimal çözümü ikinci aşama sonunda ne sıklıkla bulabildiğini sayısal olarak test edeceğiz. Model PRE'nin çözümü aşama 2'deki olurluluk şartlarını sağlar ise bu çözüm Model P için de optimal olmaktadır.

Sayısal çalışma için planlama ufku 26 periyot seçilmiş ($N = 26$) ve altı farklı talep deseni kullanılmıştır:

- D1: durağan talep
- D2: mevsimsel talep
- D3: ürün yaşam döngüsü talebi
- D4: artan talep
- D5: azalan talep
- D6: hektik talep

Planlama ufku için 26 periyot seçilirken hem endüstri uygulamaları hem de literatürde yayınlanmış sayısal deneyler göz önüne alınmıştır. Her periyodun bir haftaya karşılık geldiği ortamlarda 26 hafta 6 aylık bir planlama ufkuna denktir. Tarım v.d. (2011) planlama ufkunu 30, 40, 50 ve 60 alan sayısal bir çalışma yapmışlardır. Tarım ve Kingsman (2004) $N = 10$ olan sayısal sonuçlar bildirirken, Tarım ve Smith (2008) 24 ile 50 arasında değişen planlama ufuklarıyla çalışmışlardır. Benzer bir şekilde, bu çalışmadaki talep desenleri seçilirken literatürdeki diğer çalışmalardan esinlenilmiştir. Tarım ve Smith (2008) D1-D4 desenlerini, Tarım v.d. (2011) ise D1-D5 desenlerini kullanmışlardır. Literatürdeki bu desenlere ek olarak, özellikle telekomünikasyon sektöründe sıkça gözlemlenen, hektik talep deseni de çalışmamıza eklenmiştir.

İlk beş talep deseninde kullanılan baz talep değerleri Tablo 1’de verilmektedir. Tablo 1 altı sütundan oluşmaktadır. İlk sütun periyot sayısını ($t = 1, 2, \dots, 26$) gösterirken, diğer sütunlar her talep deseni için kullanılan baz talep değerini (d_t^b) vermektedir. Örneğin, beşinci periyot ($t = 5$) için D1 talep deseninde kullanılan baz talep miktarı 38.9 ($d_5^b=38.9$) iken D3 deseninin baz talep değeri 18.1’dir ($d_5^b=18.1$). Tablo 1’in son satır ise planlama ufkuındaki toplam baz talep miktarını vermektedir. Görüldüğü gibi tüm desenler için planlama ufku içindeki toplam baz talebini sabit tutmaktayız. Tablo 1’in grafiksel görünümü Şekil 1’de verilmektedir. Şekil 1’deki yatay eksen periyot sayısını (t), dikey eksen ise baz talep değerlerini (d_t^b) göstermektedir. Her talep deseni (D1-D5) ayrı bir renkle gösterilmiştir.

Tablo 1: Talep Desenlerinde Kullanılan Baz Talep Değerleri

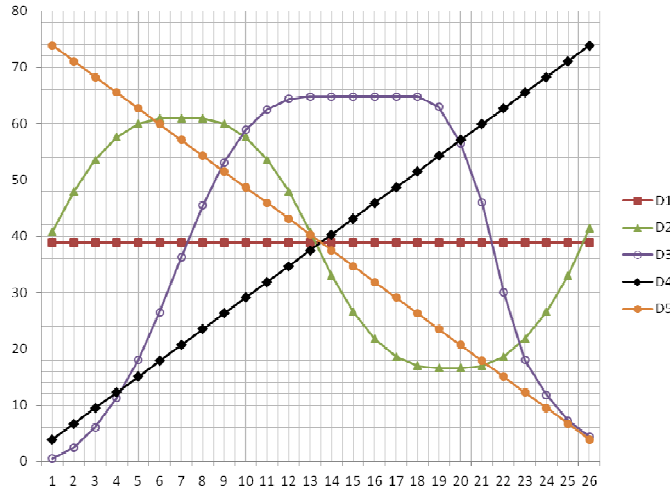
t	D1 d_t^b	D2 d_t^b	D3 d_t^b	D4 d_t^b	D5 d_t^b
1	38.9	40.8	0.5	3.9	73.9
2	38.9	48.0	2.5	6.7	71.1
3	38.9	53.6	6.1	9.5	68.3
4	38.9	57.6	11.3	12.3	65.5
5	38.9	60.0	18.1	15.1	62.7
6	38.9	60.9	26.5	17.9	59.9
7	38.9	61.0	36.3	20.7	57.1
8	38.9	60.9	45.5	23.5	54.3
9	38.9	60.0	53.1	26.3	51.5
10	38.9	57.6	58.9	29.1	48.7
11	38.9	53.6	62.5	31.9	45.9
12	38.9	48.0	64.4	34.7	43.1
13	38.9	40.8	64.8	37.5	40.3
14	38.9	33.0	64.8	40.3	37.5
15	38.9	26.6	64.8	43.1	34.7
16	38.9	21.8	64.8	45.9	31.9
17	38.9	18.6	64.8	48.7	29.1
18	38.9	17.0	64.8	51.5	26.3
19	38.9	16.6	63.0	54.3	23.5
20	38.9	16.6	56.5	57.1	20.7
21	38.9	17.0	46.0	59.9	17.9
22	38.9	18.6	30.0	62.7	15.1
23	38.9	21.8	18.0	65.5	12.3
24	38.9	26.6	11.8	68.3	9.5
25	38.9	33.0	7.2	71.1	6.7
26	38.9	41.4	4.4	73.9	3.9
Toplam	1011.4	1011.4	1011.4	1011.4	1011.4

Değişkenlerden biri sabit tutulup, $h = 1$, diğer parametreler rasgele oluşturularak her talep deseni için 1 milyon senaryo yaratılmıştır. Sipariş sabit maliyeti a 10 ile 10,000 arasında ve servis seviyesi β ise 0.8 ile 0.999 arasında birbçimli (uniform) olarak rasgele seçilmiştir. Periyot t için talep Normal olarak $\mu \cdot d_t^b$ ortalaması ve $cv \cdot \mu d_t^b$ standart sapması ile dağılmaktadır:

$$d_t \sim Normal(\mu d_t^b, cv \mu d_t^b) \quad t = 1, 2, \dots, 26.$$

(Not: d_t^b talep desenine göre Tablo 1’de verilen değerleri almaktadır. Talep sapma katsayısı (coefficient of variation) cv ile ifade edilmektedir ve planlama ufku boyunca sabittir.) Her senaryo için μ 0.4 ile 1.6 ve cv 0.01 ile 0.25 arasında birbçimli olacak şekilde rasgele seçilmiştir. Altıncı talep deseni için talepler daha farklı bir biçimde oluşturulmuştur. Diğer desenlerde olduğu gibi her periyodun talebi Normal dağılmaktadır. K periyodun, $K \in \{1, 2, 3\}$, taleplerinin ortalamaları 120 ile 150 arasında birbçimli olarak rasgele seçilirken, diğer $26 - K$ periyotların taleplerinin ortalamaları 1 ile 20 arasında birbçimli olarak rasgele seçilir. K ’nin aldığı değer ve yüksek talepli periyotların hangileri olacağı her senaryo için rastgele belirlenmiştir. Her periyodun talep standart sapması yaratılan ortalamanın cv katı kadardır ve diğer desenlerde olduğu gibi cv 0.01 ile 0.25 arasında birbçimli olacak şekilde rasgele seçilmiştir.

Şekil 1: Talep Desenleri



Çalışmanın sonuçları Tablo 2’de verilmektedir. Tablo 2 toplam beş sütundan oluşmaktadır. Kullanılan talep deseni ve her desen için çözülen toplam senaryo senaryo sayısı ilk iki sütunda verilmektedir. Önerdiğimiz yönteminin optimal olarak çözdüğü senaryo sayısı ve buna karşılık gelen yüzde miktarı son iki sütunda sunulmaktadır.

Tablo 2: Sayısal Sonuçlar

Talep Deseni	Senaryo Sayısı	Optimal Senaryo Sayısı	Optimal Senaryo Bulma Yüzdesi
D1	1,000,000	1,000,000	100.000
D2	1,000,000	999,996	99.999
D3	1,000,000	999,811	99.981
D4	1,000,000	1,000,000	100.000
D5	1,000,000	999,994	99.999
D6	1,000,000	984,502	98.450

Talebin hektik olmadığı durumlarda, D1-D5, önerdiğimiz çözüm yöntemi çok yüksek bir yüzde ile optimal çözümü bulmaktadır. İlk beş desen için elde edilen bu sonuçlar, Tarım v.d. (2011) çalışmasındaki sayısal sonuçlarla örtüşmektedir. Tarım v.d. (2011) α -servis kısıtı altındaki model için benzer bir gevşetme algoritması önermiş ve bu yaklaşımın durağan, artan, azalan, mevsimsel ve ürün yaşam döngüsü desenleri için iyi sonuçlar verdiğini bildirmiştir.

Tablo 2’deki hektik talep deseni (D6) için elde edilen sonuçlar, yaratılan senaryoların yaklaşık %1.6’sında çözüm yöntemimiz 2. aşama sonunda olurluluk testini geçemediğini göstermektedir. Her ne kadar %98.45 yüksek bir yüzde olsa da optimal çözümü 2. aşama sonunda bulamadığımız 15,486 senaryoyu yakından inceleyerek ne tür parametrelerin bu duruma yol açtığını tartışacağız.

Hektik talep deseninde optimal çözüm bulunamayan senaryolarda a , cv ve β dağılım grafikleri Ek-2’deki şekilde verilmektedir. Her ne kadar her sipariş sabit maliyeti (a) değerinde optimal çözüm bulunamayan senaryolar gözlemlense de a azaldıkça çözüm yöntemimizin performansı düşme eğilimi göstermektedir. Servis hedefi (β) dağılımına bakıldığında ise 0,9 altında optimal çözüm bulunamayan senaryoya rastlanmamaktadır. Servis hedefi arttıkça senaryo sayısı üstel olarak büyümektedir. Talep dağılımlarının değışintisi arttıkça (artan cv) çözüm yöntemimizin performansı düşme eğilimi göstermektedir. Parametre dağılımlarının yanında a , cv ve β değışkenlerinin ikili saçılım çizenekleri de incelenmiştir, bakınız Ek-3.

Ek Şekil 3'teki ilk çizimdeki görüldüğü gibi sol üst bölgedeki yoğunluk düşük sipariş sabit maliyeti (a) ve yüksek servis hedefinin (β) optimal çözüm bulunamayan senaryo sayısını artırdığını işaret etmektedir. Benzer bir gözlem $\beta-cv$ saçılım çiziminde de gözlenmektedir. Yüksek talep sapma katsayısı ve servis hedefi olan senaryolarda yöntemimizin performansı düşme eğilimi göstermektedir. Ek Şekil 3'teki son çizimde çok düşük cv değerlerinde sipariş sabit maliyetinden bağımsız olarak yöntemimizin optimal çözümü bulunduğunu görmekteyiz. Talep dağılımlarının değışintisi arttıkça (yükselen cv) optimal olarak çözülemeyen senaryo sayısı da büyümektedir. Özellikle düşük a ve yüksek cv kombinasyonu optimal çözümü bulmayı zorlaştırmaktadır.

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada rassal ve dinamik öbek büyüklüğü belirleme problemi doldurma servis kısıtı altında incelenmiştir. Kontrol stratejisi Bookbinder ve Tan (1988)'in önerdiği statik-dinamik belirsizlik stratejisi olarak seçilmiştir. İncelediğimiz problem, Tarim ve Kingsman (2004)'in benzer bir sistem için geliştirdiği karışık tamsayı programlama modeli kullanılarak modellenebilmektedir. Tempelmeier (2007) bu yöntemi kullanarak incelediğimiz problem için bir model önermiştir. Ancak bu çalışmada gösterdiğimiz gibi Tempelmeier (2007) modeli yaklaşık bir modeldir. Bu nedenle, ilk olarak, ele alınan problem için daha gerçekçi bir model önerilmiştir. Geliştirilen model doğrusal olmayan bir matematiksel programlama modeli olduğu için etkin bir genel çözüm yöntemi bulunmamaktadır.⁴ Bu nedenle modelimiz için etkin bir çözüm yöntemi de geliştirilmiştir. Bu yöntem, ana hatlarıyla, Tarim v.d. (2011) makalesinde sunulan yöntemin bir adaptasyonudur ve üç aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada önerilen modelin gevşetilmiş bir versiyonunun “en kısa yol” formülasyonu etkin bir algoritma ile çözülür. İkinci aşamada, birinci aşamada bulunan çözümün olurluluğu test edilir; çözüm bu testi geçer ise ilk aşamadaki çözüm optimaldir ve algoritma sonlanır. Aksi takdirde son aşamada bulgusal bir çözüm hesaplanır. Önerilen çözüm yönteminin performansı sayısal deneylerle test edilmiştir. Bu amaçla altı değışik talep deseni (durağan, mevsimsel, ürün yaşam döngüsü, artan, azalan ve hektik) baz alınarak her desen için bir milyon senaryo rasgele yaratılmıştır. Sayısal sonuçlar önerdiğimiz yöntemin ne kadar etkin olduğunu göstermektedir. Özellikle talebin hektik olmadığı durumlarda (durağan, mevsimsel, ürün yaşam döngüsü, artan ve azalan talep senaryoları altında), çözüm yöntemimiz çok yüksek bir yüzde ile (>%99.9) optimal çözümü bulmaktadır. Hektik talep deseninde ise optimal çözüm bulma olasılığı %98.45'e düşmektedir. Her ne kadar %98.45 yüksek bir oran olsa da, optimal çözümün ikinci aşama sonunda bulunmadığı senaryolar yakından incelenerek ne tür parametrelerin bu duruma yol açtığı tartışılmıştır.

Bu çalışmada önerilen modelin en önemli özelliği, dolayısı ile literatüre katkısı, şu ana kadar sunulan modellerden daha gerçekçi olmasıdır. Ayrıca geliştirilen çözüm yöntemi oldukça hızlı ve gürbüz olduğu için endüstri uygulamaları için idealdir. Yapılan detaylı sayısal deneyler, önerilen çözüm yönteminin değişik senaryolar altında yüksek yüzde ile optimal çözümü bulabildiğini göstermektedir. Talep sapma katsayısı (talebin değişiminin bir ölçüsü) ve servis seviyesinin yüksek olduğu durumlarda, optimal çözümü bulma oranı az da olsa düşme eğilimi sergilemektedir.

NOTLAR

¹ Her ne kadar tedarik süresi sıfır kabul edilse de tedarik süresinin sabit ve periyodun tam sayı katı olduğu durumlar (örneğin tedarik süresinin 2 periyot olması) kolay bir şekilde modele dahil edilebilir.

² Servis seviyesi dönem sonu envanter seviyesinin negatif olmama olasılığına eşittir.

³ Önerilen söz konusu modelin ispatı makalenin “Ekler” bölümü içerisinde açıklanmaktadır.

⁴ Doğrusal programlama modelleri iç nokta algoritmaları ile etkin bir şekilde (polinom zamanda) çözülebilirken, doğrusal olmayan programlama modelleri için benzer bir algoritma bulunmamaktadır.

KAYNAKÇA

- Bookbinder, J.H. and J.Y. Tan (1988) “Strategies for the Probabilistic Lot-Sizing Problem with Service-Level Constraints”, **Management Science**, 34, 1096–1108.
- Federgruen, A. and M. Tzur (1991) “A Simple Forward Algorithm to Solve General Dynamic lot Sizing Models with n Periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ time”, **Management Science**, 37, 909–925.
- Heady, R.B. and Z. Zhu (1994) “An Improved Implementation of the Wagner–Whitin Algorithm”, **Production and Operations Management**, 3, 55–63.
- Özen, U., M.K. Doğru and S.A. Tarim (2012) “Static-Dynamic Uncertainty Strategy for a Single-item Stochastic Inventory Control Problem”, **Omega**, 40, 348–357.
- Tarim, S.A. and B.G. Kingsman (2004) “The Stochastic Dynamic Production/Inventory Lotsizing Problem with Service-Level Constraints”, **International Journal of Production Economics**, 88, 105–119.
- Tarim, S.A. and B. Smith (2008) “Constraint Programming for Computing non-Stationary (R,S) Inventory Policies”, **European Journal of Operational Research**, 189, 1004–1021.

- Tarim, S.A., M.K. Doğru, U. Özen and R. Rossi (2011) “An efficient Computational Method for a Stochastic Dynamic Lot-sizing Problem under Service-Level Constraints”, **European Journal of Operational Research**, 215, 563–571.
- Tempelmeier, H. (2007) “On the Stochastic Uncapacitated Dynamic Single-item Lotsizing Problem with Service Level Constraints”, **European Journal of Operational Research**, 181, 184–194.
- Wagelmans, A., S.V. Hoesel and A. Kolen (1992) “Economic Lot Sizing: An $O(n \log n)$ Algorithm that Runs in Linear time in the Wagner–Whitin Case”, **Operations Research**, 40, 145–156.
- Wagner, H. and T. Whitin (1958) “Dynamic Version of the Economic lot Size Model”, **Management Science**, 5, 89–96.
- Zangwill, W. (1969) “A backlogging Model and a Multi-echelon Model of a Dynamic Economic lot Size Production system – a Network Approach”, **Management Science**, 15, 506–527.

EKLER

EK-1 : Teoremlerin İspatları

Teorem 1'in İspatı: Bu teoremin ispatında Özen v.d. (2011) makalesindeki Lemma 1'in ispatından yararlanacağız ve kullandıkları yöntemin doğrusal olmayan programımız için de geçerli olduğunu göreceğiz. Özetle bu ispatı yaparken yeni sıkı (tight) olur (feasible) kısıtlar tanımlayarak halihazırdaki kısıtları gevşeteceğiz. Bir sipariş çizelgesi düşünelim (A ve \bar{A}). Bu sipariş çizelgesi altında, kısıt (15), (17)–(19) ve (23)'deki \tilde{I}_t terimini $\tilde{S}_t - \tilde{d}_t$ ile değiştirildiğinde, Model P aşağıdaki doğrusal olmayan programa dönüşür:

$$\min \sum_{t=1}^N h\tilde{I}_t^+ \quad (\text{A1})$$

s. t.

$$\tilde{I}_t^+ \geq \tilde{S}_t - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + \dots + d_t) \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A2})$$

$$\tilde{I}_t = \tilde{S}_t - \tilde{d}_t \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A3})$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A4})$$

$$\tilde{S}_t \leq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A} \quad (\text{A5})$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A} \quad (\text{A6})$$

$$\tilde{S}_t - \tilde{d}_t \geq \Gamma_{d_t + \dots + d_t}^{-1}(\beta) - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A7})$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{d}_t \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A8})$$

$$\tilde{S}_0 = \tilde{I}_0, \tilde{d}_0 = 0. \quad (\text{A9})$$

A ve \bar{A} sipariş çizelgesi altında, sipariş sabit maliyeti, $\sum_{t=1}^N a\delta_t$, sabit olduğu için amaç fonksiyonundan çıkartılmıştır. Ayrıca bütün δ değişkenleri sabit olduğundan, $\delta_t = 1$ eşitliğini sağlayan tüm t değerlerinde kısıt (17) etkisiz (redundant) hale gelmektedir. Bu yüzden kısıt (17)'yi (A5) şeklinde yazılabilir. Benzer bir şekilde kısıt (18), (A6) ile değiştirilebilir.

Kısıt (A5) ile (A6) birleştirilerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A} \quad (\text{A10})$$

Ayrıca (A4) kısıtı nedeniyle

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in A. \quad (\text{A11})$$

Bu durumda (A10) ve (A11) kısıtlarını olurlu kesikler (feasible cuts) olarak yukarıdaki doğrusal olmayan programa ekleyebiliriz. Bu ekleme (A4)-(A6) kısıtlarını etkisiz duruma getirecektir; dolayısıyla (A4)-(A6) doğrusal olmayan programdan çıkartılır.

Herhangi bir $\underline{t} \in A \cup \bar{A}$ ve $m \in \{\underline{t} + 1, \dots, T - 1\}$ ele alalım. Denklem (A10)'daki eşitlik kullanılarak aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\underline{t}+1} &= \tilde{S}_{\underline{t}} - \tilde{d}_{\underline{t}} \\ \tilde{S}_{\underline{t}+2} &= \tilde{S}_{\underline{t}+1} - \tilde{d}_{\underline{t}+1} \\ &\vdots \\ \tilde{S}_m &= \tilde{S}_{m-1} - \tilde{d}_{m-1}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikler topladığında

$$\tilde{S}_m = \tilde{S}_{\underline{t}} - \sum_{k=\underline{t}}^{m-1} \tilde{d}_k, \quad (\text{A12})$$

denklemi elde edilir. Denklem (A12)'de eşitliğin iki tarafından \tilde{d}_m çıkarılıp ortaya çıkan ifade (A7) eşitsizliğinde yerine konularak

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m - \tilde{d}_m &= \tilde{S}_{\underline{t}} - \sum_{k=\underline{t}}^{m-1} \tilde{d}_k - \tilde{d}_m \\ &\geq \Gamma_{d_{\underline{t}}+ \dots + d_m}^{-1}(\beta) - \sum_{k=\underline{t}}^m \tilde{d}_k \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade aşağıdaki şekilde sağdeleştirilir:

$$\tilde{S}_{\underline{t}} \geq \Gamma_{d_{\underline{t}}+ \dots + d_m}^{-1}(\beta). \quad (\text{A13})$$

Kısıt (A7)'de t yerine \underline{t} konularak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\underline{t}} - \tilde{d}_{\underline{t}} &\geq \Gamma_{d_{\underline{t}}}^{-1}(\beta) - \tilde{d}_{\underline{t}} \\ \tilde{S}_{\underline{t}} &\geq \Gamma_{d_{\underline{t}}}^{-1}(\beta). \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

(A13) ve (A14)'deki ifadeler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\tilde{S}_{\underline{t}} \geq \max \left\{ \Gamma_{d_{\underline{t}}}^{-1}(\beta), \Gamma_{d_{\underline{t}}+d_{\underline{t}+1}}^{-1}(\beta), \dots, \Gamma_{d_{\underline{t}}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta) \right\} = \Gamma_{d_{\underline{t}}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta). \quad (\text{A15})$$

Son eşitlik Γ fonksiyonunun artan olması nedeniyle sağlanır. Her $t \in A$ için (A15) doğrusal olmayan programa olurlu kesik (feasible cut) olarak eklenir. (A10) ve (A15) altında, kısıt (A7) etkisiz duruma gelmektedir; bu yüzden programdan çıkartılır.

Bütün bunların ışığında, doğrusal olmayan programdaki (A3)-(A6) kısıtları (A10), (A11) ve (A15) kısıtları ile değiştirilebilir. Böylece aşağıdaki program elde edilir.

$$\min \sum_{t=1}^N h \tilde{I}_t^+$$

s. t.

$$\tilde{I}_t^+ \geq \tilde{S}_{\underline{t}} - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_{\underline{t}}, d_{\underline{t}} + \dots + d_t) \quad \forall t \in A \cup \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in A$$

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A} \quad (\text{A16})$$

$$\tilde{S}_t \geq \Gamma_{d_{\underline{t}}+\dots+d_{T-1}}^{-1}(\beta) \quad \forall t \in A$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{d}_t \quad \forall t \in A \cup \bar{A} \quad (\text{A17})$$

$$\tilde{S}_0 = \tilde{I}_0, \tilde{d}_0 = 0.$$

Herhangi bir $t \in A \cup \bar{A}$ ele alalım. Kısıt (A17)'den dolayı

$$\tilde{S}_{\underline{t}} \geq \tilde{d}_{\underline{t}}. \quad (\text{A18})$$

(A12)'deki eşitlik $m \in \{\underline{t} + 1, \dots, T - 1\}$ için (A17) eşitsizliğine konulduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{S}_m = \tilde{S}_{\underline{t}} - \sum_{k=\underline{t}}^{m-1} \tilde{d}_k \geq \tilde{d}_m.$$

Toplam ifadesi eşitsizliğin sağ tarafına geçirilerek

$$\tilde{S}_{\underline{t}} \geq \sum_{k=\underline{t}}^m \tilde{d}_k$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik ve (A18) birleştirilerek aşağıdaki ifade yazılabilir,

$$\tilde{S}_t \geq \max \{ \tilde{d}_t, \tilde{d}_t + \tilde{d}_{t+1}, \dots, \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \} = \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k.$$

Dolayısıyla her t için kısıt (A17) yukarıdaki eşitsizliği ifade eder. Bu nedenle aşağıdaki kısıt doğrusal olmayan programa olurlu kesik olarak eklenmektedir.

$$\tilde{S}_t \geq \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \quad \forall t \in A.$$

Kısıt (A16) ve yukarıdaki eşitsizlik altında, kısıt (A17) etkisiz hale gelmektedir; bu yüzden elenir. Bu sonuçlar altında doğrusal olmayan program aşağıdaki programa dönüşür:

$$\min \sum_{t=1}^N h \tilde{I}_t^+$$

s. t.

$$\tilde{I}_t^+ \geq \tilde{S}_t - \sum_{k=t}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + \dots + d_t) \quad \forall t \in A \cup \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t \geq \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in A$$

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t \geq \Gamma_{d_t^+ \dots + d_{T-1}}^{-1}(\beta) \quad \forall t \in A$$

$$\tilde{S}_t \geq \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \quad \forall t \in A$$

$$\tilde{S}_0 = \tilde{I}_0, \tilde{d}_0 = 0.$$

İlk kısıtın solundaki ifade, $\tilde{S}_t - \sum_{k=t}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + \dots + d_t)$, \tilde{S}_t değişkeni ile artışı için, bu programın optimal çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{S}_t = \begin{cases} \max \{ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1}, \Gamma_{d_t^+ \dots + d_{T-1}}^{-1}(\beta), \sum_{k=t}^{T-1} \tilde{d}_k \} & t \in A \\ \tilde{S}_{t-1} - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A}, \end{cases}$$

$$\tilde{I}_t^+ = \tilde{S}_t - \sum_{k=t}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t, d_t + d_{t+1} + \dots + d_t) \quad t \in A \cup \bar{A}.$$

Teorem 2'nin İspatı: Bu teoremin ispatında Teorem 1'in ispatından yararlanılacaktır. Bir sipariş çizelgesi düşünelim (A ve \bar{A}). Bu sipariş çizelgesi altında, Model PR aşağıdaki doğrusal olmayan programa dönüşür:

$$\min \sum_{t=1}^N h\tilde{I}_t^+$$

s. t.

$$\tilde{I}_t^+ \geq \tilde{S}_t^r - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t^r, d_{\underline{t}} + \dots + d_t) \quad \forall t \in A \cup \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t^r \leq \tilde{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t^r \geq \tilde{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t^r - \tilde{d}_t \geq \Gamma_{d_{\underline{t}} + \dots + d_t}^{-1}(\beta) - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k \quad \forall t \in A \cup \bar{A}$$

$$\tilde{S}_0^r = \tilde{I}_0, \quad \tilde{d}_0 = 0.$$

Teorem 1'in ispatında izlenen yol takip edilerek yukarıdaki program aşağıdaki gibi sadeleştirilir.

$$\min \sum_{t=1}^N h\tilde{I}_t^+$$

s. t.

$$\tilde{I}_t^+ \geq \tilde{S}_t^r - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\tilde{S}_t^r, d_{\underline{t}} + \dots + d_t) \quad \forall t \in A \cup \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t^r = \tilde{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} \quad \forall t \in \bar{A}$$

$$\tilde{S}_t^r \geq \Gamma_{d_{\underline{t}} + \dots + d_{T-1}}^{-1}(\beta) \quad \forall t \in A$$

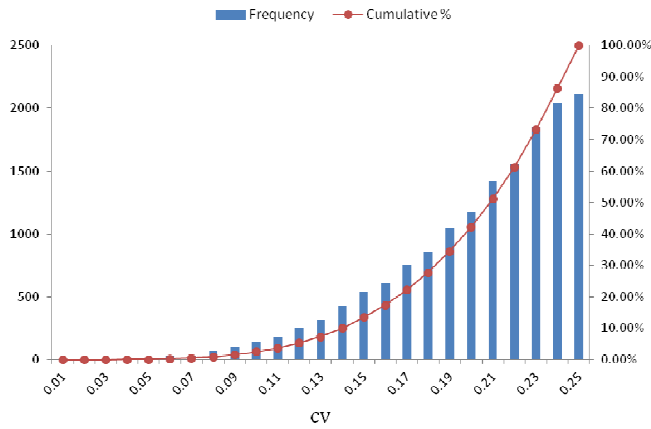
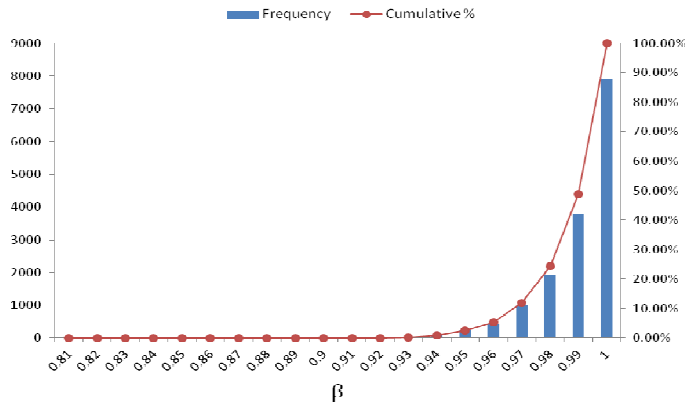
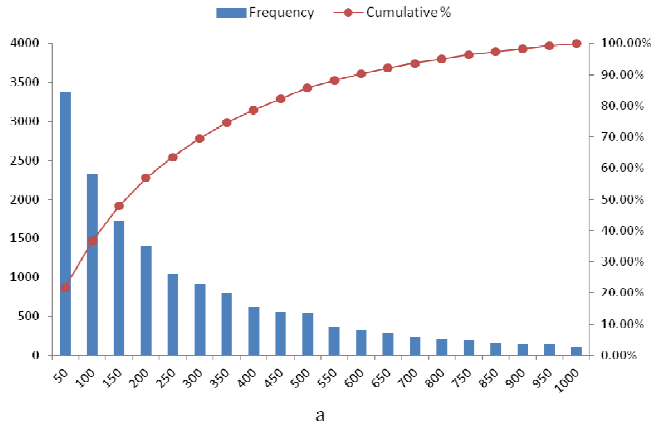
$$\tilde{S}_0^r = \tilde{I}_0, \quad \tilde{d}_0 = 0.$$

Bu programın optimal çözümü aşağıda verilmektedir:

$$\hat{S}_t^r = \begin{cases} \Gamma_{d_t + d_{t+1} + \dots + d_{T-1}}^{-1}(\beta) & t \in A \\ \hat{S}_{t-1}^r - \tilde{d}_{t-1} & t \in \bar{A}, \end{cases}$$

$$\hat{I}_t^+ = \hat{S}_t^r - \sum_{k=\underline{t}}^t \tilde{d}_k + \Gamma(\hat{S}_t^r, d_{\underline{t}} + d_{\underline{t}+1} + \dots + d_t) \quad t \in A \cup \bar{A}.$$

EK-2: Hektik (D6) talep deseninde optimal çözüm bulunamayan senaryoların a , cv ve β dağılım grafikleri (Ek Şekil 2).



EK-3: Hektik (D6) talep deseninde optimal çözüm bulunamayan senaryoların a , cv ve β değerlerinin ikili saçılım çizimikleri (Ek Şekil 3).

