Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid

Araştırma Makalesi / Research Article

Farklı Türden Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

*Fatma KORKMAZ, Deniz UÇAR**

Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi Fakültesi, Uşak Üniversitesi, Uşak, Türkiye

Geliş: 30 Ekim 2019 Kabul: 22 Kasım 2019 / Received: 30 Ekim 2019 Accepted: 22 Kasım 2019

Abstract

In this study, we obtain new fractional integral inequalities for convex functions and some different functions, using conformable fractional derivative and integral. We extend and generalize some important inequalities in the literatüre.

Keywords: *Conformable derivative and integral, convex functions.*

Özet

Bu çalışmada, uyumlu kesirli türev ve integral tanımları yardımıyla, konveks fonksiyonlar ve bazı farklı türden fonksiyonlar için yeni kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Literatürde var olan bazı önemli eşitsizlikler genişletilmiş ve genelleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Uyumlu türev ve integral, konveks fonksiyon.*

1. Giriş

Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Kesirli mertebeden türev kavramı ilk kez L'Hospital ve Leibnitz arasındaki mektuplaşma sırasında ortaya çıkmıştır. Bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmıştır. Bu konuda ilk uygulamanın yazılması 1823'de Niels Henrik Abel'e aittir. Abel bir çalışmasında karşısına çıkan bir integral denklem çözümünde kesirli basamaktan türevleri uygulamıştır. Abel'in bu güzel çözümü, Liouville'nin dikkatini çekmiş ve ilk olarak Liouville tarafından kesirli basamaktan türev için mantıklı bir tanım verilmesini sağlamıştır. Liouville'nin tanımını birçok matematikçi zaman zaman yeniden ele alarak yeni kesirli türev ve integral tanımları elde etmişlerdir [1-3]. Bu tanımlardan bazıları şunlardır.

*Corresponding author:
E-mail: deniz.ucar@usak.edu.tr

Tanım 1.1: f fonksiyonu her sonlu , (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{N}, m-1 \leq \alpha < m$ olamak üzere $t > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville türevi

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2: $f \in C_{\mu}$ $(\mu \geq -1)$ olmak üzere $t > 0$ ve $\alpha \geq 0$ iken α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli integrali operatörü için $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\beta} J^{\alpha} f(t)$$

sağlanır.

Tanım 1.3 : $\alpha > 0$ ve $y > a$ için,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (y-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale α. mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali denir. $\alpha > 0$ ve $y < b$ için,

$$J_{b^-}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^b (\tau-y)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale ise α. mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

Tanım 1.4: m pozitif bir tam sayı olmak üzere $m-1 < \alpha < m$ için f fonksiyonunun Caputo Türevi,

$$ {}_{\alpha}D_{z}^{\alpha}f(z) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha)}\int_{\alpha}^{z}(z-t)^{m-\alpha-1}f^{(m)}dt $$

şeklindedir.

Tanım 1.5: $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için

$$ T_{\alpha}f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} $$

ifadesine, f fonksiyonunun α-kesirli türevi veya uyumlu türevi denir.

Tanım 1.6: $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $\alpha.$mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$ T_{\alpha}^{a}(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} $$

olarak tanımlanır. Eğer (a,b) aralığında $T_{\alpha}^{a}(f)(t)$ türevi varsa

$$ T_{\alpha}^{a}(f)(a)=\lim_{t\to 0^{+}}T_{\alpha}^{a}f(t) $$

şeklindedir. Benzer şekilde f fonksiyonunun α.mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi,

$$ {}^{b}T_{\alpha}(f)(t)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} $$

olarak tanımlanır.

Uyumlu türevin bazı temel özellikleri şu şekildedir.

1. $T_{\alpha}(af+bg)=aT_{\alpha}(f)+bT_{\alpha}(g), \forall a,b\in\mathbb{R}.$
2. $T_{\alpha}(fg)=fT_{\alpha}(g)+gT_{\alpha}(f)$
3. $T_{\alpha}(t^{p})=pt^{p-\alpha}, \forall p\in\mathbb{R}.$
4. $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gT_{\alpha}(f)-fT_{\alpha}(g)}{g^{2}}$
5. $T_{\alpha}(c)=0, c$ sabit.

Tanım 1.7: $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için,

$$ I_{\alpha}^{a}f(t)=\int_{a}^{t}x^{\alpha-1}f(x)dx $$

integraline, f fonksiyonunun α-uyumlu kesirli integrali denir.

Uyumlu kesirli analiz yardımıyla bazı farklı fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler incelenirken kullanacağımız fonksiyon tanımları ise şu şekilde verilebilir.

Tanım 1.8: $f:[u,v] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x,y \in [u,v]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Tanım 1.9: Negatif olmayan $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x,y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $Q(I)$ sınıfındandır denir.

Tanım 1.10: f negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$ aralığı için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu P fonksiyonudur veya $P(I)$ sınıfına aittir, denir.

Tanım 1.11: $h: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir pozitif fonksiyon olsun. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x,y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonu h-konveks fonksiyondur veya $SX(h,I)$ sınıfındandır, denir.

$x\ ve\ y$ pozitif sayıların r. mertebeden kuvvet ortalaması

$$M_r\,(x,y;\lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & , \quad r \neq 0 \\ x^{\lambda} y^{1-\lambda} & , \quad r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Pearce ve diğerleri bu eşitsizliği, $\forall x,y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r(f(x),f(y),\lambda) = \begin{cases} (\lambda[f(x)]^r + (1-\lambda)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}} & , \quad r \neq 0 \\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} & , \quad r = 0 \end{cases}$$

$[a,b]$ aralığında tanımlı r-konveks pozitif f fonksiyonuna genelleştirmişlerdir. Farklı türden fonksiyonlar ile ilgili daha ayrıntılı bilgi [4-8] makalelerinde bulunabilir.

2. Uyumlu Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde, farklı türden fonksiyonlar için uyumlu kesirli analiz yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 2.1 : $f \in Q(I),\ a,b \in I,\ 0 \leq a < b\ ve\ f \in L_1[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^{\alpha}} n! \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \left[I_{\alpha}^{a} f(b) + {}^{b}I_{\alpha} f(a)\right]$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in Q(I)$ olduğundan,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğinde $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilirse $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\big(f(x) + f(y)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{n!} f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \leq \frac{2}{n!} \big(f(x) + f(y)\big) t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlik $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 \big(f(x) + f(y)\big) t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\ &\leq \frac{2}{n!} \int_0^1 f(x)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt + \frac{2}{n!} \int_0^1 f(y)\, t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$x = at + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$$

yazılarak dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$
$$\leq \frac{2}{n!}\int_0^1 f(at+(1-t)b)\,t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$
$$+\frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt \leq I_1+I_2$$

$$I_1=\frac{2}{n!}\int_0^1 f(at+(1-t)b)\,t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$u=at+(1-t)b, du=(a-b)dt, t=\frac{b-u}{b-a}, t=0\to u=b, t=1\to u=a$$

olmak üzere,

$$I_1=\frac{2}{n!}\int_b^a f(u)\left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{a-b}$$
$$=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(b-u)^n}{(b-a)^n}\frac{(u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{1}{b-a}du$$
$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)\,(b-u)^n(u-a)^{\alpha-n-1}du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)(b)$$

$$I_2=\frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$u=(1-t)a+tb, du=(b-a)dt, t=\frac{u-a}{b-a}, t=0\to u=a, t=1\to u=b$ olmak üzere,

$$I_2=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{b-a}=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(u-a)^n}{(b-a)^n}\frac{(b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{du}{b-a}$$
$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)(u-a)^n(b-u)^{\alpha-n-1}\,du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}\;{}^bI_\alpha f(a)$$

$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}dt$ olduğundan,

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,dt=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\mathrm{B}(n+1,\alpha-n)=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{2}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]$$

bulunur. Elde edilenler düzenlenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^{\alpha}}n!\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2 : $f \in P(I),\ a,b \in I,\ a < b\ ve\ f \in L_1[a,b],\ \beta > 0$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^{\alpha}}n!\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right] \leq 2[f(a)+f(b)]$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : Teorem 2.1 deki ispata benzer şekilde,

$$2\left[f(at+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{2}{n!}\int_{0}^{1} f(at+(1-t)b)\,t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}dt + \frac{2}{n!}\int_{0}^{1} f\big((1-t)a+tb\big)\,t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$
$$\geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_{0}^{1} t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$I_1 + I_2 \geq \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\int_{0}^{1} t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$I_1 = \frac{2}{n!}\int_{0}^{1} f(at+(1-t)b)\,t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$u = at+(1-t)b, du = (a-b)dt, t = \frac{b-u}{b-a}, t = 0 \rightarrow u = b, t = 1 \rightarrow u = a$ olmak üzere,

$$I_1=\frac{2}{n!}\int_b^a f(u)\left(\frac{b-u}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{a-b}$$
$$=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(b-u)^n}{(b-a)^n}\frac{(u-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{1}{b-a}du$$
$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)\,(b-u)^n(u-a)^{\alpha-n-1}du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)(b)$$

$$I_2=\frac{2}{n!}\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$

$$u=(1-t)a+tb, du=(b-a)dt,\ t=\tfrac{u-a}{b-a}, t=0\to u=a,\ t=1\to u=b$$
olmak üzere,

$$I_2=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^n\left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{du}{b-a}=\frac{2}{n!}\int_a^b f(u)\frac{(u-a)^n}{(b-a)^n}\frac{(b-u)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}}\frac{du}{b-a}$$
$$=\frac{2}{n!}\frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b f(u)(u-a)^n(b-u)^{\alpha-n-1}\,du=\frac{2}{(b-a)^\alpha}\ {}^bI_\alpha f(a)$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\beta(n+1,\alpha-n)\le\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\le\frac{2}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a f(b)+\ {}^bI_\alpha f(a)\right]$$

elde edilir ve böylece birinci kısım ispatlanmış olur.

$f\in P(I)$ olduğundan,

$$f(at+(1-t)b)\le\ f(a)+f(b)$$

$$f\big((1-t)a+tb\big)\le f(a)+f(b)$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\le 2\big(f(a)+f(b)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{2}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{2}{n!}\int_{0}^{1}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\big(f(a)+f(b)\big)dt$$
$$\leq\frac{2}{n!}\int_{0}^{1}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\big(f(a)+f(b)\big)dt$$
$$\leq\frac{2\big(f(a)+f(b)\big)}{n!}\int_{0}^{1}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\,dt$$
$$\leq\frac{2\big(f(a)+f(b)\big)}{n!}\beta(n+1,\alpha-n)\leq\frac{2\big(f(a)+f(b)\big)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{2}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{2\big(f(a)+f(b)\big)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3 : $f:[a,b]\to(0,\infty)$, $[a,b]$ üzerinde r-konveks bir fonksiyon ve $0<r\leq 1$ olsun.

$$\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}f(b)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]$$
$$\leq\frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+\frac{1}{r}+1,\alpha-n\right)+\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha+n+\frac{1}{r}\right)$$
$$+\frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha-n+\frac{1}{r}\right)+\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1+\frac{1}{r},\alpha-n\right)$$

uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri sağlanır.

İspat : f fonksiyonu r-konveks ve $r>0$ olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$f(at+(1-t)b)\leq\left(t[f(a)]^{r}+(1-t)[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$f(a(1-t)+tb)\leq\left((1-t)[f(a)]^{r}+t[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(at+(1-t)b)+f(a(1-t)+tb)$$
$$\leq\left(t[f(a)]^{r}+(1-t)[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}}+\left((1-t)[f(a)]^{r}+t[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[f(at+(1-t)b)+f(a(1-t)+tb)]$$
$$\leq \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left[\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(at+(1-t)b)dt+\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(a(1-t)+tb)dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt+\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

elde edilir. Burada Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$I_1=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

$$I_2=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\left((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}dt$$

olmak üzere,

$$I_1\leq\left(\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}t^{\frac{1}{r}}f(a)dt\right)^r+\left(\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n\,(1-t)^{\alpha-n-1}(1-t)^{\frac{1}{r}}f(b)dt\right)^r$$

$$I_1^*=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^{n+\frac{1}{r}}(1-t)^{\alpha-n-1}\,f(a)dt=\frac{f(a)}{n!}\int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}}\,(1-t)^{\alpha-n-1}dt$$
$$=\frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+\frac{1}{r}+1,\alpha-n\right)$$

$$I_1^{**}=\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-1+\frac{1}{r}}f(b)dt=\frac{f(b)}{n!}\int_0^1 t^n\,(1-t)^{\alpha-1+\frac{1}{r}}=\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha-n+\frac{1}{r}\right)$$

$$I_1\leq\left(\frac{f(a)}{n!}\beta\left(n+\frac{1}{r}+1,\alpha-n\right)\right)^r+\left(\frac{f(b)}{n!}\beta\left(n+1,\alpha-n+\frac{1}{r}\right)\right)^r$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} (1-t)^{\frac{1}{r}} f(a) dt\right)^r + \left(\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} t^{\frac{1}{r}} f(b) dt\right)^r$$

$$I_2^* = \frac{f(a)}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1+\frac{1}{r}} dt = \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right)$$

$$I_2^{**} = \frac{f(b)}{n!} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{r}} (1-t)^{\alpha-n-1} dt = \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)$$

bulunur.

$$I_2 \leq \left(\frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right)\right)^r + \left(\frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)\right)^r$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(at+(1-t)b) dt \\
&\qquad + \int_0^1 \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(a(1-t)+tb) dt \leq \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n\right) \\
&\qquad + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right) + \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right) \\
&\qquad + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2 deki I_1 ve I_2 den

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b-a)^\alpha} I_\alpha^a\big(f(b)\big) + \frac{1}{(b-a)^\alpha}\, {}^{b}I_\alpha f(a) &= \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a\big(f(b)\big) + {}^{b}I_\alpha f(a)\right] \\
&\leq \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+\frac{1}{r}+1, \alpha-n\right) + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right) \\
&\quad + \frac{f(a)}{n!} \beta\left(n+1, \alpha-n+\frac{1}{r}\right) + \frac{f(b)}{n!} \beta\left(n+1+\frac{1}{r}, \alpha-n\right)
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4 : $f \in SX(h, I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. h-konveks fonksiyonlar için,

$$f(a+b) \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}\big(f(b)\big)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]$$
$$\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}[f(a)+f(b)]\int_{0}^{1} t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\,[h(t)$$
$$+h(1-t)]dt$$

uyumlu kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

İspat : f fonksiyonu h-konveks olduğundan,

$x = at + (1-t)b, y = (1-t)a + tb \ ve \ \alpha = \frac{1}{2}$ seçilirse,

$$f\left(\frac{at+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)f(at+(1-t)b)+h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-t)a+tb\big)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(at+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq \int_{0}^{1}\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\,h\left(\frac{1}{2}\right)f(at+(1-t)b)dt$$
$$+\int_{0}^{1}\frac{1}{n!}t^{n}(1-t)^{\alpha-n-1}\,h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-t)a+tb\big)dt$$

Teorem 2.1 deki ispata benzer şekilde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\beta(n+1,\alpha-n)}{n!} \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^{\alpha}}I_{\alpha}^{a}\big(f(b)\big)+\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^{\alpha}}\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)$$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a}\big(f(b)\big)+\ {}^{b}I_{\alpha}f(a)\right]$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin birinci kısmı ispatlanmış olur.

$f \in SX(h, I)$ olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq h(t)f(a)+h(1-t)f(b)$$

$$f\big((1-t)a+tb\big) \leq h(1-t)f(a)+h(t)f(b)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big) \leq h(t)f(a)+h(1-t)f(b)+h(1-t)f(a)+h(t)f(b)$$

$$f(ta+(1-t)b)+f\big((1-t)a+tb\big) \leq [h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\big((1-t)a+tb\big)dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]dt$$

$$\frac{1}{(b-a)^\alpha}I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\frac{1}{(b-a)^\alpha}\,{}^bI_\alpha f(a) \leq \frac{f(a)+f(b)}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,[h(t)+h(1-t)]dt$$

$$\frac{f(a+b)}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^\alpha}\left[I_\alpha^a\big(f(b)\big)+\,{}^bI_\alpha f(a)\right] \leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)]}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\,[h(t)+h(1-t)]dt$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada bazı önemli kesirli türev ve integral tanımlarına yer verilmiştir. Uyumlu (conformable) kesirli integrali yardımıyla özel tipten fonksiyonlar için önemli kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiştir. Çalışmada elde edilen bu eşitsizlikler farklı yeni kesirli integral tanımları kullanılarak genişletilerek yeni araştırma alanları oluşturulabilir.

Kaynaklar

1. Ross B. Fractional Calculus and Its Applications. Springer, Berlin Heidelberg, 1975: 1-385.
2. Khalil R., Al Horani M., Yousef A. & Sababheh M. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014; 264: 65-70.

3. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015; 279: 57-66.
4. Hudzik H. & Maligranda L. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Mathematicae, 1994; 48(1): 100-111.
5. Dragomir S. S. On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. Taiwanese Journal of Mathematics, 2001; 5(4): 775-788.
6. Yıldız Ç., Özdemir M. E. & Önalan H. K. Fractional integral inequalities for different functions. New Trends in Mathematical Sciences, 2015; 3(2): 110-117.
7. Dragomir S.S. & Fitzpatrick S. The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Mathematica, 1999; 32(4): 687-696.
8. Set E., Sarıkaya, M. Z., Özdemir M. E. & Yıldırım H. The Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 2011; 10(2): 69-83.