Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid

Araştırma Makalesi / Research Article

Düzlem Eğrilerinin Kendi Frenet Vektörlerine Göre Kongrüent Eğrileri

Halime DAĞAŞAN[1*], Yılmaz TUNÇER[2]

[1*]*Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uşak, Türkiye*

[2]*Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Uşak, Türkiye*

Geliş: 21 Kasım 2019 Kabul: 5 Aralık 2019 / Received: 21 Kasım 2019 Accepted: 5 Aralık 2019

Abstract

In this study, we have defined the congruence curves of planar curves consructed by their own Frenet vectors and examined their properties under some special cases.

Keywords: *Congurent curves, Frenet frame, plane curve.*

Özet

Bu çalışmada düzlemsel eğrilerin kendi Frenet vektörleri yardımıyla oluşturdukları kongrüans eğrileri tanımladık, bazı özel durumlar altında özelliklerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: *Kongürent eğriler, Frenet çatısı, düzlem eğrisi.*

1. Giriş

Bir $\alpha(t)$ düzlem eğrisi $I \subseteq IR \to E^2$ ile tanımlansın. $\omega(t)$ eğri boyunca, eğrinin her noktasında $\{T(t_0), N(t_0)\}$ vektörleri ile sıkı sıkıya bağlı bir vektör alanı olsun. Herhangi bir $t = t_0 \in I$ için $\{\omega(t_0), \alpha(t_0)\}$ lineer bağımsız olmak üzere $\omega(t_0)$ vektör alanına göre bir kongrüansı

$$\beta(t_0) - \alpha(t_0) \in Sp\{\omega(t_0)\} \Leftrightarrow \alpha(t_0) \equiv \beta(t_0)(\mathrm{mod}\,\omega(t_0))$$

*Corresponding author:
E-mail: dagasanhlm64@hotmail.com

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlı bağıntının denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Her $t_0 \in I$ için tanımlanan denklik bağıntısı ile elde edilen $\overrightarrow{O\beta(t_0)}$ vektörleri düzlemde yeni bir eğri oluşturur. Oluşan bu eğrinin regüler eğri olma şartı

$$\left.\frac{d\alpha(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \omega(t_0)\left.\frac{d\lambda(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \lambda(t_0)\left.\frac{d\omega(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \neq 0$$

ile verilebilir.

$\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsüne $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı denir. Burada $T(s)$, $N(s)$ and $B(s)$ vektörlerine $\alpha(s)$ eğrisinin sırasıyla teğet, aslinormal ve binormal vektörleri denir. $\alpha(s)$ eğrisi için Frenet çatısı

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

bağıntısı ile verilir, burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ değerlerine eğrinin eğriliği ve torsiyonu(burulması) denir. Bir uzay eğrisi kendisine ait eğrilik ve burulma değerleriyle bellidir (Blaschke, 1923, Sabuncuoğlu, 2010 ve Hacısalihoğlu, 1993).

2. Düzlemsel Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

Tanım 2.1: α eğrisi bir düzlemsel eğri, $\{T_\alpha, N_\alpha\}$ Frenet vektörleri olsun. α eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \alpha \in Sp\{T\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta(\mathrm{mod}T)$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye *α 'nın teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi* denir.

β eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere, β eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda T_\alpha \tag{2.1}$$

olarak yazabiliriz. (2.1) eşitliğinin her iki tarafının, α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')T_\alpha + \lambda\kappa_\alpha N_\alpha \tag{2.2}$$

bulunur. β eğrisi birim hızlı eğri olacağından, s^* ile s arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(1+\lambda')^2 + \lambda^2\kappa^2} \tag{2.3}$$

bağıntısı vardır. $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$ dersek, (2.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(1+\lambda')}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda\kappa}{\sigma} N_\alpha \tag{2.4}$$

halini alır. β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \tag{2.5}$$

olup burada, $P = \frac{(\lambda'' - \lambda\kappa_\alpha{}^2)\sigma - (1+\lambda')\sigma'}{\sigma^2}$, $R = \frac{(\kappa_\alpha + 2\kappa_\alpha\lambda' + \lambda\kappa_\alpha{}')\sigma - \lambda\kappa_\alpha\sigma'}{\sigma^2}$ ve dolayısıyla (2.4) ve (2.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1: α eğrisi IR^3'te bir eğri ve α eğrisinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi β ise β'nın Frenet elemanları

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{(1+\lambda')}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda\kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha \\ N_\beta &= \frac{P}{\sqrt{P^2+R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2+R^2}} N_\alpha \end{aligned} \tag{2.6}$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\begin{array}{l} \left\{(\lambda'' - \lambda\kappa_\alpha{}^2)^2 + (\kappa_\alpha + 2\kappa_\alpha\lambda' + \lambda\kappa_\alpha{}')^2\right\}\sigma^2 + \left\{(1+\lambda')^2 + \lambda^2\kappa_\alpha{}^2\right\}(\sigma')^2 \\ -2\left\{\lambda'' + \lambda''\lambda' - 2\lambda\kappa_\alpha{}^2 - 3\lambda\lambda'\kappa_\alpha{}^2 - \lambda^2\kappa_\alpha\kappa_\alpha{}'\right\}\sigma'\sigma \end{array}}$$

ile bellidir.

λ'nın sabit olması durumunda, (2.3) eşitliğinden

$$\sigma = \sqrt{1+\lambda^2\kappa_\alpha{}^2}$$

(2.6) ve (2.7) eşitlikleri $P = \frac{-\lambda\kappa_\alpha\left(\kappa_\alpha + \lambda^2\kappa_\alpha{}^3 + \lambda\kappa_\alpha{}'\right)}{\sigma^3}$, $R = \frac{\kappa_\alpha + \lambda^2\kappa_\alpha{}^3 + \lambda\kappa_\alpha{}'}{\sigma^3}$ halini alır ve β eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_\beta = \frac{1}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda\kappa}{\sigma} N_\alpha$$

halini alır. Eğrinin eğriliği ise $\sigma' = \dfrac{\lambda^2 \kappa_\alpha \kappa_\alpha'}{\sigma}$ olmak üzere

$$\kappa_\beta = \frac{\varepsilon\left(\kappa_\alpha + \lambda^2 {\kappa_\alpha}^3 + \lambda \kappa_\alpha'\right)}{\sigma^2} \tag{2.7}$$

olacaktır. Burada

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & , \operatorname{sgn}\left(\kappa_\alpha + \lambda^2 {\kappa_\alpha}^3 + \lambda \kappa_\alpha'\right) = 1 \\ -1 & , \operatorname{sgn}\left(\kappa_\alpha + \lambda^2 {\kappa_\alpha}^3 + \lambda \kappa_\alpha'\right) = -1 \end{cases}$$

olacak şekilde işaret değeridir. (2.7) eşitliğinden kolaylıkla görülür ki, α eğrisi sabit eğrilikli bir eğri olduğunda teğete göre kongrüent eğrisi $\kappa_\beta = \varepsilon \kappa_\alpha$ eğriliğine sahip bir eğri olup o da sabit eğrilikli olacaktır. O halde şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2: Düzlemsel sabit eğrilikli α eğrisinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi de sabit eğrilikli bir eğri olup tersi doğru değildir.

α ve β eğrilerinin teğet vektörlerinin dik olması özel durumunda $\lambda = -s + c$ olup, β eğrisi α eğrisinin involütü olur ki bu tip eğriler hakkında literatürde çok fazla yayın bulunmaktadır.

3. Düzlemsel Eğrinin Kendi Normal Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

Tanım 3.1: α eğrisi bir düzlemsel eğri, $\{T_\alpha, N_\alpha\}$ Frenet vektörleri olsun. α eğrisinin yer vektörü ile

$$\beta - \alpha \in Sp\{N\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta (\mathrm{mod} N)$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye *α 'nın normal vektörüne göre kongrüent eğrisi* denir.

β eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere, β eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha \tag{3.1}$$

olarak yazabiliriz. (3.1) eşitliğinin her iki tarafının, α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda \kappa_\alpha) T_\alpha + \lambda' N_\alpha \tag{3.2}$$

bulunur. β eğrisi birim hızlı eğri olacağından, s^* ile s arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(1-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2} \tag{3.3}$$

bağıntısı vardır. $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$ dersek, (3.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(1-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma} N_\alpha \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \tag{3.5}$$

olup burada, $P = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha')\sigma - (1-\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$, $R = \frac{(\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')\sigma - \lambda'\sigma'}{\sigma^2}$ ve dolayısıyla (3.4) ve (3.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1: α eğrisi IR^3'te bir eğri ve α eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi β ise β eğrisinin Frenet elemanları

$$T_\beta = \frac{(1-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma} N_\alpha$$
$$N_\beta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left\{(-2\lambda'\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha')^2 + (\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\}\sigma^2 + \left\{(1-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2\right\}(\sigma')^2 \\ -2\left\{\lambda'\lambda'' - \lambda'\kappa_\alpha + \lambda\lambda'\kappa_\alpha{}^2 - \lambda\kappa_\alpha' + \lambda^2\kappa_\alpha\kappa_\alpha'\right\}\sigma'\sigma\end{array}}$$

olarak elde edilir.

λ 'nın sabit olması durumunda, (3.4) eşitliğinden

$$T_\beta = \frac{(1-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha$$

olup, burada $\sigma = |1-\lambda\kappa_\alpha|$ olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur ve Frenet elemanları $T_\beta = \pm T_\alpha$, $N_\beta = \pm N_\alpha$ ve $\kappa_\beta = \pm\kappa_\alpha$ şeklinde elde edilir. O halde şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2: Sabit olmayan eğriliğe sahip α eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi β olmak üzere, eğrilerin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit ise $\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$ dir.

κ_α sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda' N_\alpha - \lambda\kappa_\alpha T_\alpha$$

bulunur. Burada,

$$\sigma = \sqrt{(1-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2}$$

olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha)\sigma - (1-\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha - \lambda\kappa^2{}_\alpha + \lambda'')\sigma - \lambda'\sigma'}{\sigma^2}N_\alpha$$

bulunur. Burada, $P = \dfrac{(-2\lambda'\kappa_\alpha)\sigma - (1-\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$, $R = \dfrac{(\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')\sigma - \lambda'\sigma'}{\sigma^2}$ alınırsa,

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha$$

olup,

$$T_\beta = \frac{(1-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma}T_\alpha + \frac{\lambda'}{\sigma}N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{PT_\alpha + RN_\alpha}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

ve eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left\{(-2\lambda'\kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\}\sigma^2 + \left\{(1-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2\right\}(\sigma')^2 \\ -2\left\{\lambda'\lambda'' - \lambda'\kappa_\alpha + \lambda\lambda'\kappa_\alpha{}^2\right\}\sigma'\sigma\end{array}}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.3: Sabit eğrilikli α eğrisinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi β olmak üzere

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\left\{(-2\lambda'\kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha - \lambda\kappa_\alpha^2 + \lambda'')^2\right\} - (\sigma')^2}$$

burada, $\sigma = \sqrt{(1-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\lambda')^2}$ şeklindedir.

Eğer λ ve κ_α sabit ise, bu durumda $\dot{\beta}(s^*)\sigma = (1-\lambda\kappa_\alpha)T_\alpha$ olup, burada, $\sigma = |1-\lambda\kappa_\alpha|$ olmak üzere, β eğrisinin Frenet elemanları $T_\beta = \pm T_\alpha$, $N_\beta = \pm N_\alpha$ ve $\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$ şeklinde elde edilir.

4. Düzlemsel Eğrinin Teğet Vektörünün Eğrinin Normal Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

Tanım 4.1: α eğrisi bir düzlemsel eğri, $\{T_\alpha, N_\alpha\}$ Frenet vektörleri olsun. α eğrisinin teğet vektörü ile

$$\beta - T \in Sp\{N\} \Leftrightarrow T \equiv \beta(\mathrm{mod}N)$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye *α 'nın teğet vektörünün eğrinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi* denir.

β eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere, β eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = T_\alpha + \lambda N_\alpha \tag{4.1}$$

olarak yazabiliriz. (4.1) eşitliğinin her iki tarafının, α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = -\lambda\kappa_\alpha T_\alpha + (\kappa_\alpha + \lambda')N_\alpha \tag{4.2}$$

bulunur. β eğrisi birim hızlı eğri olacağından, s^* ile s arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(-\lambda\kappa_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha + \lambda')^2} \tag{4.3}$$

bağıntısı vardır. $\frac{ds^*}{ds} = \sigma$ dersek, (4.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{-\lambda\kappa_\alpha}{\sigma}T_\alpha + \frac{(\kappa_\alpha + \lambda')}{\sigma}N_\alpha \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \tag{4.5}$$

olup burada, $P=\dfrac{(-2\lambda'\kappa_\alpha-\lambda\kappa_\alpha'-\kappa_\alpha{}^2)\sigma+(\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$ ve $R=\dfrac{(\lambda''+\kappa_\alpha'-\lambda\kappa_\alpha{}^2)\sigma-(\lambda'+\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$

dolayısıyla (4.4) ve (4.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1: α eğrisi IR^3'te bir eğri olmak üzere, α eğrisinin teğet vektörünün, eğrinin normal vektörüne göre kongrüent eğrisi β ise β'nın Frenet elemanları

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{-\lambda\kappa_\alpha}{\sigma}T_\alpha+\frac{(\kappa_\alpha+\lambda')}{\sigma}N_\alpha \\ N_\beta &= \frac{P}{\sqrt{P^2+R^2}}T_\alpha+\frac{R}{\sqrt{P^2+R^2}}N_\alpha \end{aligned} \tag{4.6}$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\begin{Bmatrix} 4(\lambda')^2\kappa_\alpha{}^2+(\lambda^2+1)\left((\kappa_\alpha')^2+\kappa_\alpha{}^4\right)+4\lambda'\lambda\kappa_\alpha\kappa_\alpha'+4\lambda'\kappa_\alpha{}^3 \\ +2\lambda\kappa_\alpha{}^2\kappa_\alpha'+(\lambda'')^2+2\lambda''\kappa_\alpha'-2\lambda''\lambda\kappa_\alpha{}^2-2\lambda''\lambda\kappa_\alpha{}^2 \end{Bmatrix}-(\sigma')^2}$$

ile bellidir.

λ'nın sabit olması durumunda,

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds}=-\lambda\kappa_\alpha T_\alpha+\kappa_\alpha N_\alpha$$

olur burada, $\sigma=|\kappa_\alpha|\sqrt{1+\lambda^2}$ olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*)=\frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{(-\lambda\kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha$$

olur ve

$$T_\beta=\frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha\,,\ N_\beta=\frac{(-1)}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha \text{ ve } \kappa_\beta=|\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.2: α eğrisi IR^3'te bir eğri olmak üzere, α eğrisinin teğet vektörü eğrisinin, α eğrisinin normal vektörü boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu β eğrisi α ile aynı eğriliğe sahip bir eğridir.

κ_α sabit olması durumunda;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds}=-\lambda\kappa_\alpha T_\alpha+(\kappa_\alpha+\lambda')N_\alpha$$

olur. Burada,

$$\frac{ds^*}{ds}=\sigma=\sqrt{(-\lambda\kappa_\alpha)^2+(\kappa_\alpha+\lambda')^2}$$

olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi;

$$\ddot{\beta}(s^*)=\frac{(-2\lambda'\kappa_\alpha-\kappa_\alpha{}^2)\sigma+(\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}T_\alpha+\frac{(\lambda''-\lambda\kappa_\alpha{}^2)\sigma-(\lambda'+\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}N_\alpha$$

olup burada, $P=\dfrac{(-2\lambda'\kappa_\alpha-\kappa_\alpha{}^2)\sigma+(\lambda\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$ ve $R=\dfrac{(\lambda''-\lambda\kappa_\alpha{}^2)\sigma-(\lambda'+\kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$

$$T_\beta=\frac{(-\lambda\kappa_\alpha)}{\sigma}T_\alpha+\frac{(\kappa_\alpha+\lambda')}{\sigma}N_\alpha\ ,\ N_\beta=\frac{PT_\alpha+RN_\alpha}{\sqrt{P^2+R^2}}$$

ve

$$\kappa_\beta=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\begin{Bmatrix}4(\lambda')^2\kappa_\alpha{}^2+(\lambda^2+1)\kappa_\alpha{}^4+4\lambda'\kappa_\alpha{}^3\\+(\lambda'')^2-2\lambda''\lambda\kappa_\alpha{}^2-2\lambda''\lambda\kappa_\alpha{}^2\end{Bmatrix}-(\sigma')^2}$$

şeklinde elde edilir. Eğer λ ve κ_α sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds}=-\lambda\kappa_\alpha T_\alpha+\kappa_\alpha N_\alpha$$

olur burada,

$$\frac{ds^*}{ds}=\sigma=|\kappa_\alpha|\sqrt{1+\lambda^2}$$

olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi

$$\ddot{\beta}(s^*)=\frac{\kappa_\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{(-\lambda\kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha$$

bulunur ve

$$T_\beta=\frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha$$

$$N_\beta=\frac{(-1)}{\sqrt{1+\lambda^2}}T_\alpha+\frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}N_\alpha$$

$$\kappa_\beta=|\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir. Bu ise sabit eğrilikli α eğrisinin teğeti vektörü eğrisi ile α eğrisinin normali boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu β eğrisi de α ile aynı eğriliğe sahip sabit eğrilikli bir eğri olacağı anlamına gelir.

5. Düzlemsel Eğrinin Normal Vektörünün, Eğrinin Teğet Vektörüne Göre Kongrüent Eğrisi

Tanım 5.1: α eğrisi bir düzlemsel eğri, $\{T_\alpha, N_\alpha\}$ Frenet vektörleri olsun. α eğrisinin normal vektörü ile

$$\beta - N \in Sp\{T\} \Leftrightarrow N \equiv \beta(\mathrm{mod}T)$$

bağıntısı ile tanımlı β vektörünü yer vektörü kabul eden eğriye *α 'nın normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi* denir.

β eğrisinin yay parametresi s^* olmak üzere, β eğrisinin yer vektörünü

$$\beta(s^*) = N_\alpha + \lambda T_\alpha \tag{5.1}$$

olarak yazabiliriz. (5.1) eşitliğinin her iki tarafının, α eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa;

$$\dot{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (\lambda' - \kappa_\alpha)T_\alpha + \lambda\kappa_\alpha N_\alpha \tag{5.2}$$

bulunur. β eğrisi birim hızlı eğri olacağından, s^* ile s arasında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{(\lambda' - \kappa_\alpha)^2 + \lambda^2 {\kappa_\alpha}^2} \tag{5.3}$$

bağıntısı vardır. $\dfrac{ds^*}{ds} = \sigma$ dersek, (5.2) eşitliği

$$T_\beta = \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma}T_\alpha + \frac{\lambda\kappa_\alpha}{\sigma}N_\alpha \tag{5.4}$$

şeklinde yazılabilir. β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha \tag{5.5}$$

olup burada, $P = \dfrac{(\lambda'' - \kappa_\alpha' - \lambda{\kappa_\alpha}^2)\sigma - (\lambda' - \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$, $R = \dfrac{(2\lambda'\kappa_\alpha + \lambda\kappa_\alpha' - \kappa_\alpha^2)\sigma - \lambda\kappa_\alpha\sigma'}{\sigma^2}$ ve dolayısıyla (5.4) ve (5.5) eşitliklerini kullanarak şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.1: α eğrisi IR^3'te bir eğri olmak üzere, α eğrisinin normal vektörünün eğrinin teğet vektörüne göre kongrüent eğrisi β ise β'nın Frenet elemanları α eğrisinin Frenet elemanları cinsinden

$$T_\beta = \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha$$
$$N_\beta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + R^2}} T_\alpha + \frac{R}{\sqrt{P^2 + R^2}} N_\alpha \tag{5.6}$$

eğrilik değeri de

$$\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\left\{(\lambda'' - \kappa_\alpha' - \lambda \kappa_\alpha{}^2)^2 + (\lambda' \kappa_\alpha + (\lambda' - \kappa_\alpha)\kappa_\alpha + \lambda \kappa_\alpha')^2\right\} - (\sigma')^2}$$

şeklindedir.

λ ’nın sabit olması durumunda,

$$\dot{\beta}(s^*)\sigma = -\kappa_\alpha T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur. Burada,

$$\sigma = |\kappa_\alpha|\sqrt{(1+\lambda^2)}$$

olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi alınırsa;

$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-\lambda \kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha$$

bulunur ve

$$T_\beta = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha$$

$$N_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-1)}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha$$

$$\kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 5.2: α eğrisi IR^3’te bir eğri olmak üzere, α eğrisinin normal vektörü eğrisi ile teğet α eğrisinin teğeti boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu β eğrisi α ile aynı eğriliğe sahip bir eğridir.

Eğer κ_α sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*)\sigma = (\lambda' - \kappa_\alpha) T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

olup, burada;

$$\sigma = \sqrt{(\lambda' - \kappa_\alpha)^2 + \lambda^2 {\kappa_\alpha}^2}$$

olmak üzere; β eğrisinin ikinci türevi alınırsa, $\ddot{\beta}(s^*) = PT_\alpha + RN_\alpha$ olup burada,

$$P = \frac{(\lambda'' - \lambda {\kappa_\alpha}^2)\sigma - (\lambda' - \kappa_\alpha)\sigma'}{\sigma^2}$$

ve

$$R = \frac{(2\lambda' \kappa_\alpha - \kappa_\alpha^2)\sigma - \lambda \kappa_\alpha \sigma'}{\sigma^2}$$

şeklindedir. Eğrilik değeri de $\kappa_\beta = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\left\{(\lambda'' - \lambda {\kappa_\alpha}^2)^2 + (\lambda' \kappa_\alpha + (\lambda' - \kappa_\alpha)\kappa_\alpha)^2\right\} - (\sigma')^2}$ olup, Frenet vektörleri

$$T_\beta = \frac{(\lambda' - \kappa_\alpha)}{\sigma} T_\alpha + \frac{\lambda \kappa_\alpha}{\sigma} N_\alpha \,,$$

$$N_\beta = \frac{PT_\alpha + RN_\alpha}{\sqrt{P^2 + R^2}}$$

şeklinde elde edilir. Eğer λ ve κ_α sabit ise;

$$\dot{\beta}(s^*) \frac{ds^*}{ds} = -\kappa_\alpha T_\alpha + \lambda \kappa_\alpha N_\alpha$$

bulunur. Burada, $\sigma = |\kappa_\alpha|\sqrt{1+\lambda^2}$ olmak üzere, β eğrisinin ikinci türevi;

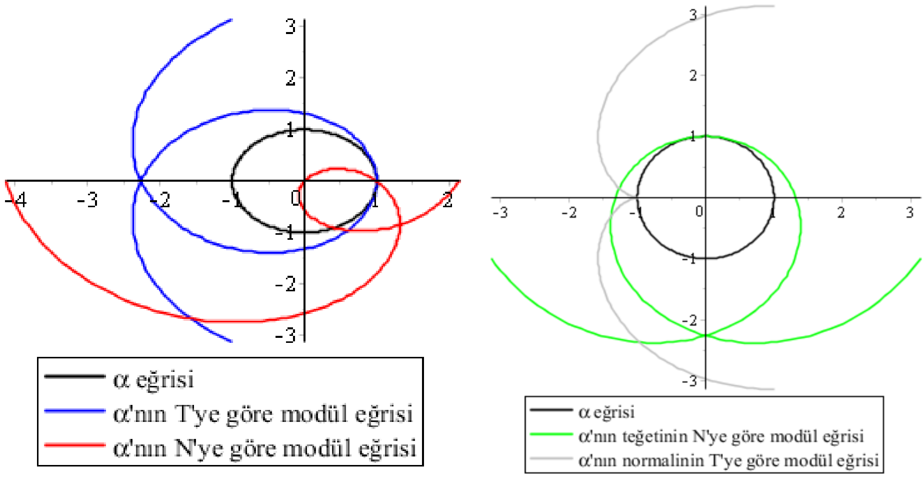
$$\ddot{\beta}(s^*) = \frac{(-\lambda \kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-\kappa_\alpha)}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha$$

olur ve

$$T_\beta = \frac{(-1)}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha \,,\ N_\beta = \frac{(-\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}} T_\alpha + \frac{(-1)}{\sqrt{1+\lambda^2}} N_\alpha \text{ ve } \kappa_\beta = |\kappa_\alpha|$$

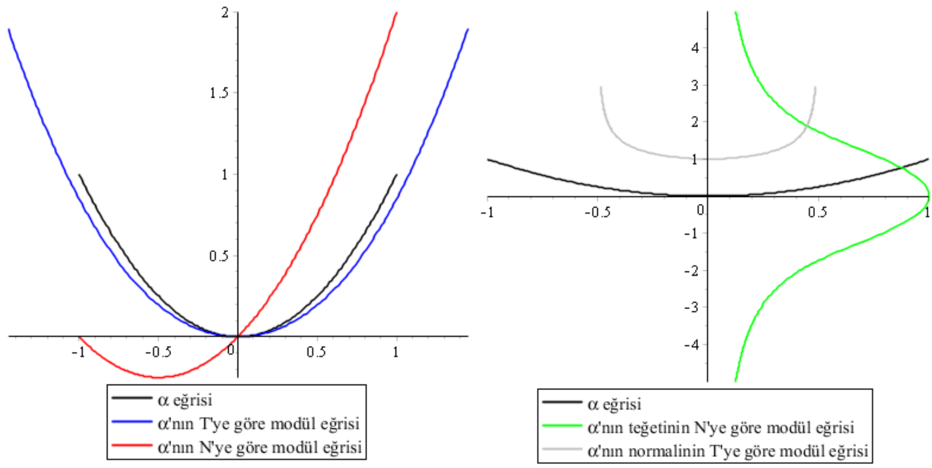
şeklinde elde edilir. Bu ise sabit eğrilikli α eğrisinin normal vektörü eğrisi ile teğet α eğrisinin teğeti boyunca sabit uzaklıkta oluşturduğu β eğrisi de α ile aynı eğriliğe sahip sabit eğrilikli bir eğri olacağı anlamına gelir.

Örnek 5.1 (Çember): $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $\lambda = t$, $\alpha(t)$ eğrisi, kırmızı, mavi, yeşil ve gri eğriler için $-\pi \le t \le \pi$ alınmıştır.



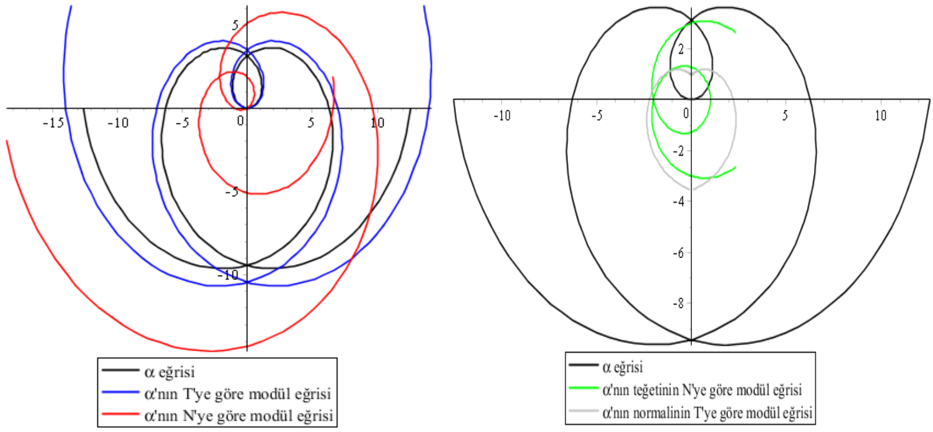
Şekil 1

Örnek 5.2 (Parabol): $\alpha(t)=(t,t^2)$ $\lambda=t$, $\alpha(t)$ eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için $-1\le t\le 1$, yeşil eğri için $-4\le t\le 4$, gri eğri için $-2\le t\le 2$ alınmıştır.



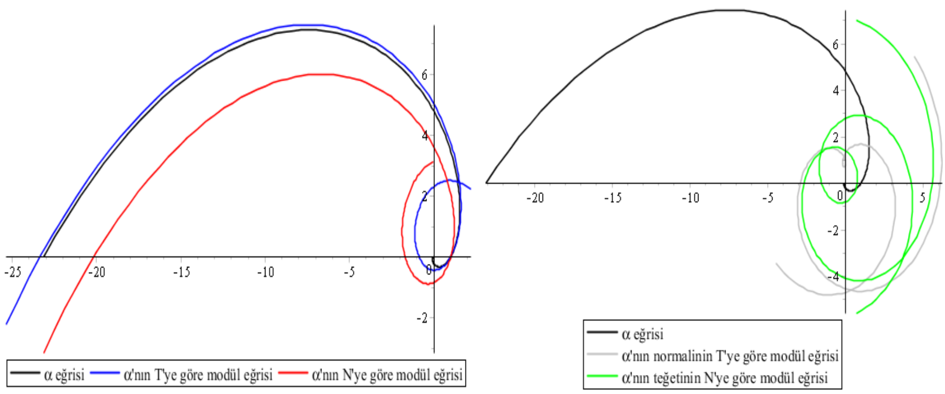
Şekil 2

Örnek 5.3 (Archimedes spirali): $\alpha(t)=(at\cos(t),at\sin(t))$ $a=1$, $\lambda=t$, $\alpha(t)$ eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için $-2\pi\le t\le 2\pi$, yeşil ve gri eğriler için $-\pi\le t\le\pi$ alınmıştır.



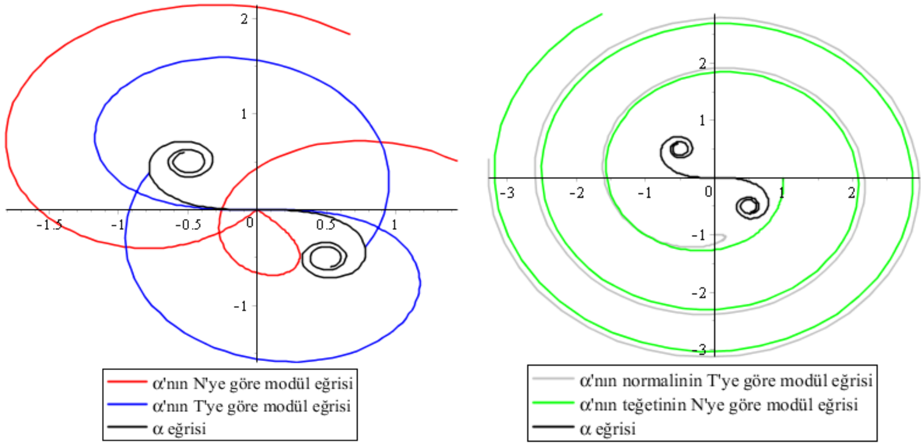
Şekil 3

Örnek 5.4 (Bernoilli spirali): $\alpha(t)=\left(e^t\cos(t),e^t\sin(t)\right)$ $\lambda=t$, $\alpha(t)$ eğrisi, kırmızı ve mavi eğriler için $-\pi\leq t\leq\pi$, yeşil ve gri eğriler için $-2\pi\leq t\leq 2\pi$ alınmıştır.



Şekil 4

Örnek 5.5 (Cornu spirali): $\alpha(t)=\left(\int\cos(\frac{\pi}{2}t^2)dt,\int\sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt\right)$ $\lambda=t$, $\alpha(t)$ eğrisi için $-\pi\leq t\leq\pi$, kırmızı ve mavi eğriler için $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, yeşil ve gri eğriler için $0\leq t\leq\pi$ alınmıştır.



Şekil 5

Kaynaklar

1. Blaschke, W. Differential geometrie II. Verlag von Julius springer. Berlin, 1923.
2. Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 4. Cilt, 2010.
3. Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, cilt I, Ankara, 1993.