İhtimal Hesapları ve Nüfusla İlgili Bazı Uygulanışları

Dr. Kenan URAL

GİRİŞ

Tarifler :

İhtimalin çeşitli tarifleri üzerinde durmayarak, yalnız yaygın ve klasik bir tarifini hatırlatarak mevzua girmek istiyoruz.

a) Bir olay için müşahade edilen muhtelif bağımsız hallerden, elverişli miktarlarının, olayı teşkil eden mümkün bütün hallerin toplamına nisbeti nazara alınan hususun gerçekleşme ihtimalidir. Meselâ, bir torba içinde bulunan eşit büyüklükte M adet yuvarlaktan B miktarı beyaz ve S miktarı da siyah ise, tesadüfî şartlar altında yapılacak bir yuvarlak çekilişinde, beyaz yuvarlak elde etme ihtimali p şöyledir :

$$p = \frac{B}{M} \qquad M = B + S \tag{1}$$

Bu formülde B, ihtimal tarifindeki müsait hallerin miktarını, M ise bütün hallerin toplamını göstermektedir. İlk çekilen yuvarlağın siyah olması istenilirse, ihtimali q aşağıdaki gibi olur :

$$q = \frac{S}{M} = \frac{M - B}{M} = 1 - p \tag{2}$$

b) Olayların gerçekleşme şartlarına göre ihtimaller iki esas gruba ayrılırlar : 1 — Toplam ihtimaller, 2 — Bileşik ihtimaller.

1 — *Toplam ihtimaller :* Birlikte gerçekleşmeleri mümkün olmayan hallerden belli hallerin gerçekleşme ihtimali, her birine ait gerçekleşme ihtimallerinin toplamına eşittir.

Atılan bir zar için 3 ve 4 noktalarının gelme ihtimali, toplam ihtimale bir misal teşkil edebilir.

2 — *Bileşik ihtimal :* Müstakil hallerin birlikte gerçekleşme ihtimali, ihtimallerin çarpımına eşittir.

Yukarıdaki içi yuvarlak dolu torba misalinde birbiri arkasından çekilen 2 yuvarlaktan birinin beyaz, diğerinin siyah olma ihtimali, bileşik ihtimal için bir örnektir.

Ayrıca ihtimaller meydana gelişlerinde gösterdikleri devamlılığa göre iki büyük kısma ayrılırlar : Sürekli ihtimaller, süreksiz ihtimaller.

Sürekli ihtimaller daha ziyade geometride tesadüf edilen ve integral hesapları yardımı ile elde edilen ihtimallerdir. Nüfusla ilgili ihtimallere de tatbik edilebilirler.

Süreksiz ihtimaller, devamlı şekilde meydana gelmiyen olayların ihtimallerini hesaplamakta her zaman kullanılırlar.

Bu çalışmamızda nüfusla ilgili ihtimallerin hesabı için süreksiz ihtimalleri tatbik edeceğiz. Mevcut problemlerin çözümünde ihtiyaca tam mânasiyle cevap verecekleri gibi, kullanılmaları tatbikî bakımdan daha elverişli olacaktır. Sürekli ihtimallerin kullanılışı daha ziyade nazarî bir çehre arzedeceğinden tetkiki, çok ilgi çekici ayrı bir çalışma mevzuu teşkil edebilir.

Hatırlatıcı mahiyette bu kısa izahattan sonra, ana hatları belirtilen ihtimallerin nüfusu ilgilendiren yaşama ve ölüm olaylarına nasıl tatbik edilebileceğini görelim.

I. Bir Şahsın Hayatı ile İlgili İhtimaller.

l_x sembolü, x yaşında ve hayatta bulunan bir grup şahsın mevcudunu ifade eder. l_y de aynen, y yaşında ve hayatta olan şahısların miktarını gösterir.

l_{x+1} sembolü ise, x yaşına varmış l_x grubundaki şahıslardan 1 yıl sonra, (x+1) yaşında olan ve hayatta kalanların miktarını verir.

a) l_x grubundan bir şahsın 1 yıl sonra hayatta kalma ihtimalini hesap etmek istersek, başlangıçta yaptığımız tarife göre l_x ve l_{x+1} sembolleri sırasiyle bütün mümkün ve müsait hallerin miktarlarına tekabül edeceklerine göre, aranılan ihtimal ${}_1P_x$ veya kısaca P_x şöyle yazılabilir :

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (3)$$

Eğer bu şahsın bir yıl sonra değil de, n yıl sonra hayatta kalma ihtimali bilinmek istenirse, bu defa müsait ve mümkün haller sırasiyle l_{x+n} ve l_x sembollerine tekabül edeceğinden formül :

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (4)$$

olur.

b) Tetkik edilen ihtimallerin tersi düşünülürse yani x yaşındaki şahsın 1 yıl sonra hayatta olmama ihtimali aranırsa, P_x ihtimalini 1 e tamamlıyan değeri aramak gerekir :

$$q_x = 1 - P_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \qquad (5)$$

Genel olarak, x yaşındaki bir şahsın n yıl içinde ölme ihtimali aşağıdaki gibi yazılır :

$${}_nq_x = 1 - {}_nP_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{d_{x+n}}{l_x} \qquad (6)$$

Bu formülde d_{x+n}, x yaşından (x+n) yaşına kadar ölen şahısların miktarını belirtmektedir.

n genel olarak yalnız yıl değil herhangi bir devre sayısını gösterebilir. Fakat biz yıl sayısı ifade ettiğini kabul edeceğiz.

II. İki Şahsın Hayatı ile İlgili İhtimaller.

a) Yaşları x ve y olan iki şahsın bir sene sonra hayatta olma ihtimali P_{xy}, herbirinin hayatta olma ihtimalleri çarpımına eşittir :

$$P_{xy} = P_x \cdot P_y \tag{7}$$

Her iki şahsın yaşama ihtimalleri aynı zamanda gerçekleşeceğinden ve bağımsız olduklarından, bileşik ihtimaller teoremi tatbik edilir.

b) Aynı iki şahsın n yıl sonra hayatta olma ihtimali aranırsa, yine bileşik ihtimal kaidesinin tatbiki ile :

$$_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_y} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} \tag{8}$$

bulunur.

Burada oldukça mühim bir noktaya temas etmek isteriz. Az evvel x ve y yaşlarındaki iki şahsa ait yaşama ihtimallerinin bağımsız olduklarını belirttik ve bileşik ihtimalleri uyguladık. Fakat istisna teşkil eden bazı durumlar olabilir. Meselâ, bu iki şahsın karı koca olma halinde, birinin ölümü diğerinin sıhhati üzerinde menfî tesirde bulunabilir ve yaşama ihtimalleri birbirinin etkisi altında kalabilir. Durum ileri yaşlarda daha fazla kendini gösterebilir. Çocuk ölümünün anne ve baba sıhhatı üzerinde meydana getireceği etkiler keza misal olarak gösterilebilir. Binaenaleyh, yaşama ihtimallerinin bağımsız olmadığı bu hallerde, bileşik ihtimalleri uygulamak doğru olmaz. Biz burada problemi genel olarak inceleyecek, birbirleriyle yakınlığı olmayan tesadüfî şahısları nazarı itibare alacağız.

c) x ve y yaşlarındaki iki şahıstan en az birinin bir yıl içinde ölme ihtimali q_{xy} sembolü ile gösterilecektir. n yıldan evvel en az birinin ölme ihtimali de $_nq_{xy}$ olacaktır.

Tariflere dikkat edilirse ${}_np_{xy}$ ve ${}_nq_{xy}$ ihtimalleri birbirlerinin tamamlayıcıları olduklarından :

$$ {}_nP_{xy} + {}_nq_{xy} = 1 \qquad (9) $$

yazılabilir.

Şimdi de iki şahıs için başka bir ihtimal arayalım: n yıl sonra, hiç olmazsa ikisinden birinin, hayatta olma ihtimali nedir? Bu ihtimal ${}_nP_{\overline{xy}}$ sembolü ile gösterilecektir. En az biri hayatta olacağından diğeri, ya yaşayabilir veya ölmüş olabilir :

d) Buna karşılık her iki şahsın ölme ihtimali ${}_nq_{\overline{xy}}$ yukarıda bahsedilen ${}_nP_{\overline{xy}}$ ihtimalinin tamamlayıcısıdır, yani :

$$ {}_nP_{\overline{xy}} + {}_nq_{\overline{xy}} = 1 \quad \text{dir.} \qquad (10) $$

İki şahsın n yıl içinde ölme ihtimalini, bileşik ihtimal esasına göre yazalım :

$$ {}_nq_{\overline{xy}} = {}_nq_x \cdot {}_nq_y = (1 - {}_nP_x)\ (1 - {}_nP_y) \qquad (11) $$

veya :

$$ {}_nq_{\overline{xy}} = 1 - {}_nP_x - {}_nP_y + {}_nP_x \cdot {}_nP_y \qquad (12) $$

o halde ${}_nP_{\overline{xy}}$ ihtimali :

$$ {}_nP_{\overline{xy}} = 1 - {}_nq_{\overline{xy}} = {}_nP_x + {}_nP_y - {}_nP_{xy} \quad \text{dir.} \qquad (13) $$

Bu son durumu şöyle de düşünebiliriz: Eğer x yaşındaki kimse n yıl yaşarsa bu yaşama ihtimalini, x in ölümü ve ayni zamanda y nin n yıl sonra hayatta olma ihtimali ile topladığımız takdirde, iki kişiden en az birinin n yıl sonra hayatta olma ihtimalini buluruz :

$$ {}_nP_{\overline{xy}} = {}_nP_x + {}_nq_x \cdot {}_nP_y = {}_nP_x + {}_nP_y\,(1 - {}_nP_x) = {}_nP_x + {}_nP_y - {}_nP_{xy} \qquad (14) $$

e) Diğer taraftan n yıl içinde iki kişiden en az birinin ölme ihtimali ${}_nq_{xy}$ i yazarsak :

$$ {}_nq_{xy} = 1 - {}_nP_{xy} = 1 - {}_nP_x \, . \, {}_nP_y $$

$$ {}_nq_{xy} = 1 - (1 - {}_nq_x)\,(1 - {}_nq_y) = {}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{\overline{xy}} \tag{15} $$

Formül (14) ve (15) e dayanarak, şu münasebeti yazabiliriz :

$$ {}_nP_{xy} + {}_nP_{\overline{xy}} = {}_nP_x + {}_nP_y \tag{16} $$

$$ {}_nq_{xy} + {}_nq_{\overline{xy}} = {}_nq_x + {}_nq_y \tag{17} $$

f) Bu defa, iki şahıstan yalnız tam bir tanesinin n yıl sonra hayatta olma ihtimali ${}_nP_{\overline{xy}}^{[1]}$ yi hesaplamak istersek, aşağıdaki tarzda hareket etmemiz gerekir :

$$ {}_nP_{\overline{xy}}^{[1]} = \frac{1}{l_x\, l_y} \left[l_{x+n}\,(l_y - l_{y+n}) + l_{x+n}\,(l_x - l_{x+n}) \right] \tag{18} $$

$$ {}_nP_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_nP_x \, {}_nq_y + {}_nq_x \, {}_nP_y $$

veya :

$$ {}_nP_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_nP_x\,(1 - {}_nP_y) + {}_nP_y\,(1 - {}_nP_x) $$

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x + {}_nP_y - 2 . {}_nP_{xy} \tag{19} $$

Formül (13) den faydalanarak formül (14) şöyle de yazılabilir :

$$ {}_nP_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_nP_{\overline{xy}} - {}_nP_{xy} \tag{20} $$

[ ] işareti «yalnız tam» mânasına gelir : ${}_nP_{xy}^{[1]}$ sembolünün iki kişiden yalnız tam bir kişinin n yıl sonra hayatta olma ihtimalini ifade ettiği gibi.

III. Üç Şahsın Hayatı ile İlgili İhtimaller.

a) Önce yaşları x, y, z olan üç kişilik bir şahıs grubu düşünelim. n yıl sonra, hepsinin de hayatta olma ihtimali herbirine ait ihtimallerin çarpımına eşittir :

$$ {}_nP_{xyz} = {}_nP_x \; {}_nP_y \; {}_nP_z \tag{21} $$

b) n yıl sonra 3 kişiden en az 2 kişinin hayatta olması istenirse, ilgili ihtimal ${}_nP_{\overline{xyz}}^{2}$ 3 kişinin hayatta olma ihtimali ile tam iki kişinin hayatta olma ihtimalleri toplamına eşit olur :

$$ {}_nP_{\overline{xyz}}^{2} = {}_nP_{xyz} + {}_nP_{\overline{xyz}}^{[2]} \tag{22} $$

c) 3 kişiden yalnız tam 2 kişinin n yıl sonra hayatta kalma ihtimali, formül (18) e paralel tarzda bulunur :

$$ {}_nP_{\overline{xyz}}^{[2]} = {}_nP_x \, {}_nq_y \, {}_nP_z + {}_nP_x \, {}_nP_y \, {}_nq_z + {}_nq_x \, {}_nP_y \, {}_nP_z \tag{23} $$

veya

$$ {}_nP_{\overline{xyz}}^{[2]} = {}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{yz} - 3 \, {}_nP_{xyz} \tag{24} $$

O halde formül (22) ile aranılan ihtimal de hesap edilebilir :

$$ {}_nP_{\overline{xyz}}^{2} = {}_nP_{xz} + {}_nP_{xy} + {}_nP_{yz} - 2 . \, {}_nP_{xyz} \tag{25} $$

d) n yıl içinde grubu teşkil eden 3 kişinin de ölme ihtimali, herbirinin ölme ihtimalleri çarpımına eşittir :

$${}_nq_{\overline{xyz}} = {}_nq_x \, {}_nq_y \, {}_nq_z \tag{26}$$

veya yaşama ihtimalleri cinsinden :

$${}_nq_{\overline{xyz}} = (1 - {}_nP_x)\,(1 - {}_nP_y)\,(1 - {}_nP_z) \tag{27}$$

$${}_nq_{\overline{xyz}} = 1 - ({}_nP_x + {}_nP_y + {}_nP_z) + ({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{yz}) - {}_nP_{xyz} \tag{28}$$

neticesine varılır.

e) 3 kişilik gruptan şimdi de yalnız tam iki kişinin ölme ihtimalini hesaplamak istersek :

$${}_nq_{\overline{xyz}}^{[2]} = {}_nP_x \, {}_nq_y \, {}_nq_z + {}_nq_x \, {}_nq_y \, {}_nP_z + {}_nq_x \, {}_nP_y \, {}_nq_z \tag{29}$$

veya

$${}_nq_{\overline{xyz}}^{[2]} = (1 - {}_nq_x)\, {}_nq_y \, {}_nq_z + {}_nq_x \, {}_nq_y \,(1 - {}_nq_z) + {}_nq_x \,(1 - {}_nq_y)\, {}_nq_z \tag{30}$$

ve buradan da :

$${}_nq_{\overline{xyz}}^{[2]} = {}_nq_x \, {}_nq_y + {}_nq_x \, {}_nq_z + {}_nq_y \, {}_nq_z - 3 \, {}_nq_{xyz} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &= (1 - {}_nP_x)(1 - {}_nP_y) + (1 - {}_nP_x)(1 - {}_nP_z) + (1 - {}_nP_y)(1 - {}_nP_z) \\ &- 3(1 - {}_nP_x)(1 - {}_nP_y)(1 - {}_nP_z) = ({}_nP_x + {}_nP_y + {}_nP_z) - 2({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} \\ &+ {}_nP_{yz}) + 3 \, {}_nP_{xyz} \end{aligned} \tag{32}$$

elde edilir. Böylece bütün ölüm ihtimallerini hayat ihtimalleri cinsinden göstermek mümkün olmuştur.

IV. 3 den fazla şahsın hayatlarıyla İlgili İhtimaller.

Buraya kadar görüldüğü gibi bütün hayat veya ölümle ilgili ihtimaller, hayat ihtimalleri cinsinden ifade edilebilirler. Her türlü ihtimalin çözümü, genel olarak belli başlı iki mesele etrafında toplanmaktadır :

1) m miktarındaki bir grup şahıstan, yalnız tam r kişinin n yıl sonra hayatta olma ihtimali,

2) m miktarındaki bir grup şahıstan, en az r kişinin n yıl sonra hayatta bulunma ihtimali.

İşte, meseleyi genel olarak inceliyeceğimiz bu bahiste, hesaplarımızı bilhassa işaret edilen sıra dahilinde belirteceğiz.

a) Yaşları x, y, z, ... w olan m şahıstan, yalnız tam r kişinin n yıl sonra hayatta kalma ihtimalini hesaplamak istiyoruz. Önce n yıl sonra, tam m kişinin de hayatta olma ihtimalini formül (21) e benzer şekilde yazabiliriz :

$$ {}_nP_{\overline{xyz \ldots w\,(m)}}^{[m]} = {}_nP_{xyz \ldots w\,(m)} = {}_nP_x\,{}_nP_y\,{}_nP_z \ldots\ldots {}_nP_w \qquad (33) $$

En fazla miktarda yaşayacak kimselerin ihtimalini bulduktan sonra şimdi de miktar bakımından en az yani «0» şahsın yaşama ihtimalini yazalım :

$$ {}_nP_{\overline{xyz \ldots w\,(m)}}^{[0]} = {}_nq_{\overline{xyz \ldots w\,(m)}} = {}_nq_x \cdot {}_nq_y \cdot {}_nq_z \ldots\ldots {}_nq_w \qquad (34) $$

Şu hale göre r kişi için aranılan ihtimal $0<r<m$ şartı için, en küçük ve en büyük ihtimal arasında yer alır, yani

$$ {}_nP_{\overline{xyz \ldots w\,(m)}}^{[r]} = \underbrace{{}_nP_x\,{}_nP_y\,{}_nP_z}_{r}\ \underbrace{\ldots\ldots {}_nq_v\, q_i\, {}_nq_w}_{(m-r)} \qquad (35) $$

olur.

Mevzuubahis ihtimali hesap için en sade ve anlaşılması kolay yol, m ve r miktarlarının küçük olmaları halinde, bulunacak ihtimallerden hareket ederek m ve r nin büyük olmaları halindeki ihtimalleri hesap etmektir.

1) m = 3 ve r = 2 şartına göre, ilgili ihtimali formül (24) ile göstermiştik :

$$_{n}P_{\overline{xyz}}^{[2]} = ({}_{n}P_{xy} + {}_{n}P_{xz} + {}_{n}P_{yz}) - 3\,{}_{n}P_{xyz}$$

Dikkat edecek olursa, tam 2 kişinin hayatta olma ihtimali için eşitliğin sağ tarafındaki ilk üç terim, x, y, z yaşlarındaki 3 şahsın 2 şerli kombinezonuna ait ihtimallerin toplamından başka bir şey değildir. Terim adedi $\binom{m}{r} = \binom{3}{2} = 3$ dür. 4 üncü terim de negatif işaretli olup 3 üncü üçerli kombinezonun miktarında ihtimalle, yani $\binom{m}{r} = \binom{3}{3} = 1$ adet ihtimalle gösterilmektedir.

İhtimallerin katsayılarına gelince, basit bir kombinezondan ibarettir. Meselâ 2 kişinin hayatı ile ilgili ihtimallerin katsayıları 1 dir. Zira $\binom{r+0}{0} = \binom{2}{0} = 1$ dir. Üç kişinin hayatı ile ilgili ihtimal 3 dür; zira $\binom{r+1}{1} = \binom{2+1}{1} = 3$ dür.

2) m = 4 ve r = 2 şartı mevzuubahis ise, ihtimal, bileşik ve toplam ihtimaller esasına göre :

$$\begin{aligned} {}_{n}P_{\overline{xyzw}}^{[2]} &= {}_{n}P_{x}\,{}_{n}P_{y}\,{}_{n}q_{z}\,{}_{n}q_{w} + {}_{n}P_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}P_{z}\,{}_{n}q_{w} + {}_{n}P_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}q_{z}\,{}_{n}P_{w} \\ &+ {}_{n}q_{x}\,{}_{n}P_{y}\,{}_{n}P_{z}\,{}_{n}q_{w} + {}_{n}q_{x}\,{}_{n}P_{y}\,{}_{n}q_{z}\,{}_{n}P_{w} + {}_{n}q_{x}\,{}_{n}q_{y}\,{}_{n}P_{z}\,{}_{n}P_{w} \qquad (36) \end{aligned}$$

olur. Ölüm ihtimalleri yerine tamamlayıcıları hayat ihtimallerini koyacak olursak :

$$\begin{aligned} {}_{n}P_{\overline{xyzw}}^{[2]} &= {}_{n}P_{x}\,{}_{n}P_{y}(1-{}_{n}P_{z})\,(1-{}_{n}P_{w}) + {}_{n}P_{x}(1-{}_{n}P_{y})\,{}_{n}P_{z}\,(1-{}_{n}P_{w}) \\ &+ {}_{n}P_{x}(1-{}_{n}P_{y})\,(1-{}_{n}P_{z})\,{}_{n}P_{w} + (1-{}_{n}P_{x})\,{}_{n}P_{y}\,{}_{n}P_{z}\,(1-{}_{n}P_{w}) \\ &+ (1-{}_{n}P_{x})\,{}_{n}P_{y}\,(1-{}_{n}P_{z})\,{}_{n}P_{w} + (1-{}_{n}P_{x})\,(1-{}_{n}P_{y})\,{}_{n}P_{z}\,{}_{n}P_{w} \qquad (37) \end{aligned}$$

yazılabilir ve kısaltarak :

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{\overline{xyzw}}^{[2]} &= ({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{xw} + {}_nP_{yz} + {}_nP_{yw} + {}_nP_{zw}) \\
&\quad -3({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyw} + {}_nP_{xzw} + {}_nP_{yzw}) + 6\,{}_nP_{xyzw} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Şimdi de bu formülü tetkik edersek, evvelki problemde olduğu gibi, bir takım hususların tekrarlandığı görülür. Şöyle ki, eşitliğin sağ tarafında ilk altı terim xyzw yaşlarındaki 4 şahsın 2 şerli kombinezonlu hayat ihtimallerinden ibarettir. $\binom{m}{r} = \binom{4}{2} = 6$ terim. 7, 8, 9 ve 10 uncu terimler de 4 kişinin 3 erli kombinezon miktarında, yani $\binom{m}{r+1} = \binom{4}{3} = 4$ tane hayat ihtimali ihtiva eder. Ve nihayet, son terim de 4 şahsın 4 erli kombinezonu kadardır, yani $\binom{m}{r+2} = \binom{4}{4} = 1$ tanedir.

Katsayılar ise: iki kişinin hayatıyla ilgili ihtimaller için 1, 3 kişinin hayatiyle ilgili olanlar için $\binom{r+1}{1} = \binom{3}{1} = 3$ ve 4 kişinin hatiyle ilgili olanlar için de $\binom{r+2}{2} = \binom{2}{4} = 6$ dır.

3) $m = 4$ ve $r = 3$ şartı incelenecek olursa, aynı esaslar çerçevesinde aranılan ihtimal :

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{\overline{xyzw}}^{[3]} &= {}_nP_x\,{}_nP_y\,{}_nP_z\,{}_nq_w + {}_nP_x\,{}_nP_y\,{}_nq_z\,{}_nP_w + {}_nP_x\,{}_nq_y\,{}_nP_z\,{}_nP_w \\
&\quad + {}_nq_x\,{}_nP_y\,{}_nP_z\,{}_nP_w \qquad (39)
\end{aligned}
$$

ve bütün ihtimallerin hayat ihtimalleri cinsinden ifadesi yazılırsa:

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{\overline{xyzw}}^{[3]} &= {}_nP_x\,{}_nP_y\,{}_nP_z\,(1 - {}_nP_w) + {}_nP_x\,{}_nP_y\,(1 - {}_nP_z)\,{}_nP_w \\
&\quad + {}_nP_x\,(1 - {}_nP_y)\,{}_nP_z\,{}_nP_w + (1 - {}_nP_x)\,{}_nP_y\,{}_nP_z\,{}_nP_w \qquad (40)
\end{aligned}
$$

kısaltılarak :

$$ {}_{n}P_{\overline{xyzw}}^{[3]} = ({}_{n}P_{xyz} + {}_{n}P_{xyw} + {}_{n}P_{xzw} + {}_{n}P_{yzw}) - 4\,{}_{n}P_{xyzw} \qquad (41)$$

bulunur.

Yine şu hususları tahkik edebiliriz: 4 kişiden 3 kişinin hayatta olma ihtimalleri $\binom{m}{r} = \binom{4}{3} = 4$ terimle ifade edilebilir. Formül (41) in ilk 4 pozitif terimi bu ihtimalleri göstermektedir. Son negatif terim de 4 kişinin hayatı ile ilgili olup $\binom{m}{r+1} = \binom{4}{4} = 1$ terimden ibarettir.

Dikkat edilecek olursa terimlerin işareti alternatif tarzda değişmektedir.

İhtimallerin katsayılarına göz atacak olursak, yukarıda hesap edildiği gibi üç kişiyi ilgilendiren ihtimaller için $\binom{r+0}{0} = \binom{3}{0} = 1$ ve 4 kişiyi ilgilendirenler için de $\binom{r+1}{1} = \binom{4}{1} = 4$ dür.

4) Şimdi de xyzuw yaşlarında 5 kişilik bir gruptan yalnız tam 2 kişinin hayatta olma ihtimalini hesaplıyalım. Bu defa bütün ihtimalleri birer birer yazmağa lüzum kalmadan, yukarıda verdiğimiz örneklere dayanarak muhtelif ihtimallerin terim adetlerini ve katsayılarını yazabiliriz :

2 kişinin hayatıyla ilgili ihtimallerin terim miktarı $\binom{m}{r} = \binom{5}{2} = 10$ dur. Kat sayıları da $\binom{r+0}{0} = \binom{2}{0} = 1$ dir. Bütün terimlerin işareti de pozitiftir.

3 kişinin hayatıyla ilgili ihtimaller $\binom{m}{r+1} = \binom{5}{3} = 10$ tanedir ve katsayıları $\binom{r+1}{1} = \binom{3}{1} = 3$ dür. Terimlerin işareti bu defa negatiftir.

4 kişiye ait ihtimaller ise $\binom{m}{r+2}=\binom{5}{4}=5$ terimli olup katsayıları $\binom{r+2}{2}=\binom{4}{2}=6$ dır. Terimlerin hepsi pozitiftir.

5 kişiye ait ihtimal $\binom{m}{r+3}=\binom{5}{5}=1$ adettir ve katsayısı $\binom{r+3}{3}=\binom{5}{3}=10$ dur. İşareti de negatif olur.

Bütün bu söylediklerimizi formülle ifade edecek olursak :

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{\overline{xyzuw}}^{[2]} = & ({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + \ldots + {}_nP_{uw}) \ldots\ldots \text{(10 terim)} \\
& -3({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyu} + \ldots + {}_nP_{zuw}) \ldots\ldots \text{(10 terim)} \\
& +6({}_nP_{xyzu} + {}_nP_{xyzw} + {}_nP_{xzuw} + {}_nP_{xyuw} + {}_nP_{yzuw}) - 10\,{}_nP_{xyzuw} \quad (42)
\end{aligned}
$$

neticesi elde edilir.

Artık genel formülümüzü yazmak mümkündür :

5) Yaşları xyz ... w olan m miktarındaki şahıslardan n yıl sonra yalnız tam r kişinin hayatta olmasını arzu ettiğimiz takdirde ihtimal, terim adedi ve katsayılarının hesap tarzı işaret ettiğimiz şekilde yapılarak aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{[r]} = & \binom{r+0}{0}\left({}_nP_{xy\ldots(r)} + \cdots\cdots + {}_nP_{zw\ldots(r)}\right) \\
& - \binom{r+1}{1}\left({}_nP_{xy\ldots(r+1)} + \cdots\cdots + {}_nP_{zw\ldots(r+1)}\right) \\
& + \binom{r+2}{5}\left({}_nP_{xy\ldots(r+2)} + \cdots\cdots + {}_nP_{zw\ldots(r+2)}\right) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$+ (-1)^t \binom{r+t}{t} \left({}_nP_{xy\ldots(r+t)} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + {}_nP_{zw\ldots(r+t)} \right)$$

. . . .

$$+ (-1)^{m-r} \binom{r+m-r}{m-r} {}_nP_{xy\ldots w\,(m)} \tag{43}$$

veya kısaltılmış olarak :

$$\begin{aligned} {}_nP^{[r]}_{xyz\ldots w\,(m)} = & \binom{r+0}{0} Z_{(r)} - \binom{r+1}{1} Z_{(r+1)} + \binom{r+2}{2} Z_{(r+2)} \\ & + \cdots\cdots + (-1)^t \binom{r+t}{t} Z_{(r+t)} + \cdots \\ & + (-1)^{m-r} \binom{r+(m-r)}{m-r} Z_m \end{aligned} \tag{44}$$

yazılır. Burada kullanılan yeni sembollerin tarifini yapalım :

$$Z_{(r)} = \sum_{1}^{\binom{m}{r}} P_{xy\ldots(r)}$$

$$Z_{(r+1)} = \sum_{1}^{\binom{m}{r+1}} P_{xy\ldots(r+1)}$$

$$Z_{(r+2)} = \sum_{1}^{\binom{m}{r+1}} P_{xy\ldots(r+2)}$$

. . . .

. . . .

$$Z_{(r+t)} = \sum_{1}^{\binom{m}{r+t}} P_{xy\ldots(r+t)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$Z_{(m)} = \sum_{1}^{\binom{m}{m}} P_{xy\ldots(m)}$$

Yeni sembol katsayılarının nasıl hesaplanacağı malûm olduğundan onları da başka sembollerle gösterelim :

$$\alpha_0 = \binom{r+0}{0}$$

$$\alpha_1 = \binom{r+1}{1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_t = \binom{r+t}{t}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_{m-r} = \binom{m}{m-r}$$

Nihayet ihtimal formülüne son şekli vererek yazabiliriz :

$$_{n}P_{\overline{xyz\ldots w}}^{[r]} = \alpha_0 Z_{(r)} - \alpha_1 Z_{(r+1)} + \alpha_2 Z_{(r+2)} + \cdots + (-1)^t \alpha_t Z_{(r+t)}$$
$$+ \ldots + (-1)^{m-r} \alpha_{(m-r)} Z_{(m)} \qquad (45)$$

b) İkinci mühim bir ihtimal şekli olan, m şahıstan n yıl sonra en az r kişinin yaşama ihtimalini aramağa geçebiliriz.

1) xyzw yaşlarında olan 4 kişilik bir gruptan n yıl sonra en az 2 kişinin hayatta olma ihtimalini bulmak istiyoruz. En az 2 kişinin hayatta olması şart olduğuna göre, 3 veya 4 kişinin de sağ olması kâfidir. O halde aranılan ihtimal yalnız tam 2, 3 ve 4 kişinin hayatta olma ihtimallerinin toplamına eşittir :

$$ {}_nP_{\overline{xyzw}}^{\,2} = {}_nP_{\overline{xyzw}}^{[2]} + {}_nP_{\overline{xyzw}}^{[3]} + {}_nP_{\overline{xyzw}}^{[4]} \tag{46} $$

Formülün sağındaki değerleri biliyoruz. İlk terim formül (38) de, ikinci terim formül (41) de izah edilmişti. Üçüncü terim ise

$$ {}_nP_{\overline{xyzw}}^{[4]} = {}_nP_{xyzw} $$

olarak yazılabilir. Aranılan ihtimal, bu husus nazarı itibara alınarak yazılacak olursa :

$$ \begin{aligned} {}_nP_{\overline{xyzw}}^{\,2} = & ({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{xw} + {}_nP_{yz} + {}_nP_{yw} + {}_nP_{zw}) \\ & -3({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyw} + {}_nP_{xzw} + {}_nP_{yzw}) + 6\,{}_nP_{xyzw} \\ & + ({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyw} + {}_nP_{xzw} + {}_nP_{yzw}) - 4\,{}_nP_{xyzw} + {}_nP_{xyzw} \end{aligned} \tag{47} $$

Sadeleştirilerek :

$$ \begin{aligned} {}_nP_{\overline{xyzw}}^{\,2} = & ({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{xw} + {}_nP_{yz} + {}_nP_{yw} + {}_nP_{zw}) \\ & -2({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyw} + {}_nP_{xzw} + {}_nP_{yzw}) + 3\,{}_nP_{xyzw} \end{aligned} \tag{48} $$

elde edilir. Z sembolleri ile yazılırsa :

$$ {}_nP_{\overline{xyzw}}^{\,2} = Z_{(2)} - 2\,Z_{(3)} + 3\,Z_{(4)} \tag{49} $$

bulunur.

2) m = 5 ve r = 2 halinde, 5 kişiden en az 2 kişinin n yıl sonra hayatta olma ihtimalini arayalım. Önceden söyliyebiliriz ki bu ihtimal yalnız tam 2, 3, 4 ve 5 kişinin hayatta olma ihtimallerinin toplamına eşittir :

$$ {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{\,2} = {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{[2]} + {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{[3]} + {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{[4]} + {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{[5]} \qquad (50) $$

Eşitliğin sağ tarafındaki ihtimallerin ihtiva ettiği kısmî ihtimaller toplanırsa :

$$ \begin{aligned} {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{\,2} = & \left({}_nP_{xy} + {}_nP_{xz} + {}_nP_{xu} + \ldots + {}_nP_{uw}\right) \\ & -2\left({}_nP_{xyz} + {}_nP_{xyu} + {}_nP_{xyw} + \ldots + {}_nP_{zuw}\right) \\ & +3\left({}_nP_{xyzu} + {}_nP_{xyzw} + {}_nP_{xzuw} + {}_nP_{xyuw} + {}_nP_{yzuw}\right) -4\, {}_nP_{xyzwu} \end{aligned} \qquad (51) $$

elde edilir. Toplam ihtimal sembolleriyle :

$$ {}_nP_{\overline{xyzuw}}^{\,2} = Z_{(2)} - 2\,Z_{(3)} + 3\,Z_{(4)} - 4\,Z_{(5)} \qquad (52) $$

Formül (49) da olduğu gibi, bu son formülde sol taraftaki 4 terimin katsayıları $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2+1}{2}, \binom{2+2}{3}$ kombinezonlarının miktarları kadar, yani 1, 2, 3, 4 dür. Terimlerin işareti alternatif tarzda pozitif ve negatif olarak değişmektedir. Artık genel formülün izahına geçebiliriz.

3) xyz ... w yaşlarındaki m kişiden n yıl sonra en az r kişinin hayatta olma ihtimali, yalnız tam r, (r + 1), (r + 2), ... ve m kişinin hayatta bulunma ihtimalleri toplamına eşittir :

$$ \begin{aligned} {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{\,r} = & {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{[r]} + {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{[r+1]} + {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{[r+2]} + \cdots \\ & + {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{[m]}, \end{aligned} \qquad (53) $$

yani kısmî ihtimaller yardımıyla yazılıp sadeleştirilirse :

$$ \begin{aligned} {}_nP_{\overline{xyz\ldots w\,(m)}}^{\,r} = & \binom{r}{0} Z_{(r)} - \binom{r+0}{1} Z_{(r+1)} + \binom{r+1}{3} Z_{(r+2)} + \cdots \\ & + (-1)^{m-r} \binom{r+m-r-1}{r-m} Z_{(m)} \end{aligned} \qquad (54) $$

bulunur.

Katsayılar için aşağıdaki sembolleri kullanırsak :

$$\beta_0 = \binom{r}{0}, \qquad \beta_3 = \binom{r+1}{2}$$

$$\beta_1 = \binom{r+0}{1}, \qquad \vdots$$

$$\beta_2 = \binom{r+1}{2}, \qquad \beta_{m-r} = \binom{r+(m-r-1)}{m-r}$$

formülümüzü son şekliyle yazabiliriz :

$$ {}_nP_{\overline{xyz\ldots w}\,(m)}^{\,r} = \beta_0 Z_{(r)} - \beta_1 Z_{(r+1)} + \beta_2 Z_{(r+2)} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + (-1)^{m-r} \beta_{m-r} Z_{(m)} \tag{55}$$

V. Hayat İhtimallerinde Özel Bir Hal.

Buraya kadar yaptığımız hesaplar için xyz ... w yaşlarında m kişilik grupta her şahsın ayrı yaşta olması gibi değişik ve genel bir durumu inceledik.

Şimdi de m kişilik grupta bulunan kimselerin aynı yaşlarda yani x, x, x, x, ... x yaşlarında olma halini inceleyelim. Önceden çözümün çok daha basitleşeceğini söylemek kabildir.

Evvelâ, 5 kişilik bir grubu tetkik edelim ve her iki ihtimal çeşidi için neticeyi arayalım :

a) Aynı yaşta olan 5 kişiden n yıl sonra yalnız tam 2 kişinin hayatta olma ihtimalini hesap edelim. Bu ihtimalin 2 kişinin hayatta olma ihtimali ile 3 kişinin ölme ihtimalleri çarpımına eşit olduğunu biliyoruz. Aranan ihtimal $\binom{5}{2} = 10$ çeşit tarzda meydana gelebileceğinden neticeyi 10 la çarpmak gerekir. İzahımızı formülle gösterelim :

$$ {}_nP_{xxxxx} = \binom{5}{2} {}_nP_x\, {}_nP_x\, {}_nq_x\, {}_nq_x\, {}_nq_x = \binom{5}{2} {}_nP_x^2\, {}_nq_x^3 \tag{56}$$

Muhtelif miktardaki gruplar için ihtimal aranırsa benzer neticeler elde edilir.

Başka misaller vermeğe lüzum kalmadan genel formülü, m kişilik bir grupdan r şahsın hayatta kalma şartı için yazabiliriz :

$$ {}_nP_{\overline{xxx\ldots x\,(m)}}^{[r]} = \binom{m}{r} {}_nP_x^{\,r}\; {}_nq_x^{\,m-r} \tag{57} $$

Son ifade de, $({}_nq_x + {}_nP_x)^m$ şeklindeki binôm formülünün (r+1) inci teriminden başka bir şey değildir.

b) Şimdi de aynı yaşta olan 5 kişiden n yıl sonra en az 2 kişinin hayatta olma ihtimalini hesaplıyalım.

$$ {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{\,2} = {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{[2]} + {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{[3]} + {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{[4]} + {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{[5]} \tag{58} $$

Formül (57) ye göre ihtimalleri yazarsak :

$$ {}_nP_{\overline{xxxxx}}^{\,2} = \binom{5}{2} {}_nP_x^{\,2}\; {}_nq_x^{\,3} + \binom{5}{3} {}_nP_x^{\,3}\; {}_nq_x^{\,2} + \binom{5}{4} {}_nP_x^{\,4}\; {}_nq_x + \binom{5}{5} {}_nP_x^{\,5} \tag{59} $$

Görülüyor ki ihtimalimiz, $({}_nq_x + {}_nP_x)^5$ binôm formülünün 3 üncü teriminden itibaren mevcut bütün terimlerin toplamıdır.

Buradan genel formülü yazmamız kabildir :

$$ {}_nP_{\overline{xxx\ldots x\,(m)}}^{\,r} = \binom{m}{r} {}_nP_x^{\,r}\; {}_nq_x^{\,m-r} + \binom{m}{r+1} {}_nP_x^{\,r+1}\; {}_nq_x^{\,m-r-1} + \binom{m}{r+2} {}_nP_x^{\,r+2}\; {}_nq_x^{\,m-r-2} + \cdots + \binom{m}{m} {}_nP_x^{\,m}\; {}_nq_x^{\,0} \tag{60} $$

Elde edilen neticenin $({}_nq_x + {}_nP_x)^m$ binôm formülünde (r+1) inci terimden sonra gelen bütün terimlerin toplamına eşit olduğu açıkça görülmektedir.

SONUÇ

İhtimalin genel tarifini ve belli başlı çeşitlerini kısaca gördükten sonra nüfusla ilgili bazı uygulanışlarını misallerle gösterdik. En karakteristik hayat ve ölüm ihtimallerini inceledik.

Küçük bir topluluktan başlıyarak elde edilen neticeleri daha büyük topluluklara teşmil ettik ve genel formülleri belirtmeğe çalıştık.

Netice itibariyle en büyük iki ihtimal grubu için bulunan formüllerin bilinen bazı matematik kanunlarına tâbi olduğunu müşahade ettik. Bu tarzda, ortaya çıkacak hayatla ilgili muhtelif ihtimalleri bulmak güç olmıyacaktır.

Nüfusla ilgili diğer ihtimal çeşitlerinden, evlenme, boşanma, malûliyet, v.s. gibi önemleri ikinci plânda kalan ihtimallere temas etmedik. Bunlar hayat ve ölüm ihtimalleri esas tutularak hesap edilebilirler. Tetkikleri şüphesiz ayrı bir çalışma mevzuu ortaya koyabilir.