



Araştırma / Research

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİ ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

Yavuz Çetin CUMA (ORCID:0000-0003-1530-8211)^{1,*}
Faruk Fırat ÇALIM (ORCID:0000-0002-7493-3386)¹

¹Adana Alparslan Türkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Adana

Geliş / Received: 14.10.2019

Kabul / Accepted: 07.12.2019

ÖZ

Bu çalışmada daire eksenli çubukların serbest titreşimini etkileyen faktörler incelenmiştir. Daire eksenli çubukların serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemler Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Çubuk malzemesi homojen, izotropik ve lineer elastik olarak kabul edilmiştir. Taşıma matrisi yöntemi yardımı ile problemin eleman dinamik rijitlik matrisi elde edilmektedir. Taşıma matrisi seri açılımı yapılarak elde edilmiş, hassasiyetin artırılması için Cayley-Hamilton prensibi kullanılmıştır. Elde edilen dinamik rijitlik matrisinin karakteristik polinomunun kökleri problemin serbest titreşim frekanslarını vermektedir. Farklı narinlik oranları ve açılara sahip daire eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatür ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Anahtar kelimeler: taşıma matrisi yöntemi, serbest titreşim, daire eksenli çubuklar

INVESTIGATION OF THE FACTORS AFFECTING THE FREE VIBRATION OF CIRCULAR RODS

ABSTRACT

In this study the elements affecting the free vibration of circular rods are investigated. The governing differential equations of the free vibration of circular rods are obtained by the Timoshenko beam theory. Material of the rod is assumed to be homogeneous, isotropic and linear elastic. The element dynamic stiffness matrices are calculated via the transfer matrix method. The transfer matrix is determined by series expansion and the precision is increased with the Cayley-Hamilton principal. Roots of the characteristic function of the dynamic stiffness matrix gives the natural free vibration frequencies. The effect of various slenderness ratios and axis opening angles on the natural frequencies are investigated. The results are consistent with the literature.

Keywords: transfer matrix method, free vibration, circular rods

* Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90(322) 455 0000-2145; e-mail / e-posta: cumayc@atu.edu.tr

1. GİRİŞ

Daire eksenli çubuklar, yapı ve makine elemanı olarak birçok alanda kullanılmaktadır. Bu tür elemanların dinamik hareketinin incelenmesi oldukça önem arz etmektedir. Teknoloji ile doğru orantılı olarak bu tarz problemleri çözmek için analitik ve sayısal birçok yöntem geliştirilmiştir [1]. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesine paralel olarak sayısal analiz yöntemleri de hızlı bir gelişim sağlamıştır.

Bickford ve Strom [2] daire eksenli düzlemsel çubukların doğal titreşim frekanslarını taşıma matrisi yöntemini kullanarak hesaplamışlardır. Irie ve Tanaka daire eksenli çubukların düzlemine dik [3] ve düzlemi içindeki [4] serbest titreşim frekanslarını sayısal olarak hesaplamışlardır. Tabarrok ve ark. [5] uzaysal eğri eksenli çubukların dinamik analizi üzerine bir sonlu eleman formülasyonu önermişlerdir. Kang ve ark. [6] kayma etkilerini dikkate alarak daire eksenli çubukların serbest titreşimini incelemişlerdir. Khdeir ve Reddy [7] çapraz tabakalı ince kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini taşıma matrisi yöntemiyle yapmışlardır. Yıldırım [8] eğri eksenli kirişlerin serbest titreşim analizini taşıma matrisi yöntemi yardımı ile çözmüştür. Ayrıca, farklı parametrelerin çapraz tabakalı kompozit kirişlerin düzlemi içindeki [9] ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları taşıma matrisi yardımı ile elde etmişlerdir [10]. Tüfekçi [11] daire eksenli ince yayların düzlemi içindeki serbest titreşimini incelemiştir. Howson ve Jemah [12] Timoshenko kiriş teorisini kullanarak daire eksenli çubukların düzlemine dik serbest titreşim frekanslarını analitik olarak hesaplamışlardır. Tüfekçi ve Doğruer [13] daire eksenli çubuğun düzlemine dik serbest titreşim frekanslarını başlangıç değerler yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Viola ve ark. [14] kademeli ve hasar görmüş daire eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını analitik ve sayısal olarak elde etmişlerdir. Çalim ve Akkurt [15] elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin serbest titreşimini tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak yapmışlardır. Çalim ve ark. [16] daire eksenli çubukların düzlemine dik serbest titreşimini taşıma matrisi yöntemi ile analitik olarak incelemişlerdir. Bu çalışmada daire eksenli düzlemsel çubukların serbest titreşim analizine etki eden parametreler incelenmiştir.

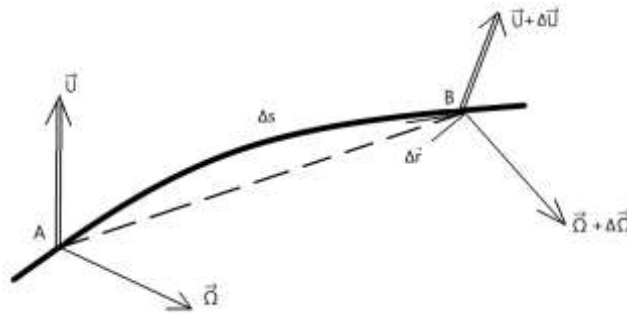
Bu çalışmada, daire eksenli çubukların serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemler Timoshenko kiriş teorisini kullanarak elde edilmiştir. Taşıma matrisi yöntemi yardımı ile dinamik rijitlik matrisi elde edilmiştir. Taşıma matrisi seri açılımı yoluyla hesaplanmış olup hassasiyetin artırılması için Cayley-Hamilton prensibi kullanılmıştır.

2. FORMÜLASYON

Eğri eksenli uzaysal çubuk elemanlarının daha kolay tanımlanmasını sağlayan \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} hareketli koordinat takımı kullanılmıştır. Burada, \mathbf{t} teğet birim vektör, \mathbf{n} normal birim vektör ve \mathbf{b} ise binormal birim vektördür. Bu takımdaki \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} birim vektörleri arasında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntı mevcuttur.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi\mathbf{n} \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau\mathbf{b} - \chi\mathbf{t} \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} \quad (1)$$

Burada, χ ve τ eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır.



Şekil 1: Eğri eksenli çubuk

Uzaysal eğri eksenli çubuk kesitinin herhangi bir noktasında \mathbf{U} yer değiştirme vektörünü, $\mathbf{\Omega}$ dönme vektörünü, \mathbf{T} iç kuvvet vektörünü ve \mathbf{M} ise moment vektörünü göstermektedir (Şekil 1). Çubuk malzemesi homojen, izotropik ve lineer elastik olarak kabul edilmektedir. Uzaysal çubukların serbest titreşimini idare eden denklemler vektörel formda

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİ ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

$$d\mathbf{U}/ds + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T} \quad d\boldsymbol{\Omega}/ds = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} \quad (2)$$

$$d\mathbf{T}/ds = -\omega^2 \rho A \mathbf{U} \quad d\mathbf{M}/ds + \mathbf{t} \times \mathbf{T} = -\omega^2 \rho \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} \quad (3)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, \mathbf{A} ve \mathbf{B} çubuk malzeme ve geometrik özelliklerini içeren rijitlik matrisleri, ρ kütleli yoğunluk, A kesit alanı, ω açısal frekans ve \mathbf{I} atalet momentleridir. Kesitin ağırlık ve kayma merkezlerinin çakıştığı ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilmektedir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

Burada, E ve G elastik sabitler, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörleridir. Eğri eksenli uzaysal çubuğun serbest titreşimini idare eden 12 adet skaler formdaki diferansiyel denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{dU_t}{ds} - \chi U_n - \frac{T_t}{EA} &= 0 \\ \frac{dU_n}{ds} + \chi U_t - \tau U_b - \Omega_b - \frac{\alpha_n T_n}{GA} &= 0 \\ \frac{dU_b}{ds} + \tau U_n + \Omega_n - \frac{\alpha_b T_b}{GA} &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{ds} - \chi \Omega_n - \frac{M_t}{GI_t} &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} + \chi \Omega_t - \frac{M_n}{EI_n} - \tau \Omega_b &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{ds} + \tau \Omega_n - \frac{M_b}{EI_b} &= 0 \\ \frac{dT_t}{ds} - \chi T_n + \rho A \omega^2 &= 0 \\ \frac{dT_n}{ds} + \chi T_t - \tau T_b + \rho A \omega^2 &= 0 \\ \frac{dT_b}{ds} + \tau T_n + \rho A \omega^2 &= 0 \\ \frac{dM_t}{ds} - \chi M_n + \rho I_t \omega^2 &= 0 \\ \frac{dM_n}{ds} + \chi M_t - \tau M_b - T_b + \rho I_n \omega^2 &= 0 \\ \frac{dM_b}{ds} + \tau M_n + T_n + \rho I_b \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Eğri eksenli uzaysal çubuğun serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemleri düzlemi içinde ve düzlemine dik olarak iki grup halinde bölünebilmektedir.

Düzlemsel daire eksenli çubuklar ele alındığında $ds = R d\phi$, $\tau = 0$ ve $\chi = 1/R$ olur ve diferansiyel denklemler ϕ 'ye bağlı olarak elde edilebilir. Burada R daire eksenli çubuğun yarıçapıdır. Düzlemi içinde ve düzlemine dik durum ele alındığında farklı serbestlikler kendi aralarında birbirine bağımlı durumdadırlar. Daire eksenli çubukların düzlemi içinde ve düzlemine dik titreşimlerini idare eden skaler formdaki diferansiyel denklemler matris notasyonunda, (6) ve (7) denklemlerinde gösterildiği gibi yazılabilir. Düzlem içi diferansiyel geçiş matrisi $\{U_t \ U_n \ \Omega_b \ T_t \ T_n \ M_b\}$ serbestliklerini içermektedir.

Y.Ç. CUMA, F.F. ÇALIM

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_t}{d\phi} \\ \frac{dU_n}{d\phi} \\ \frac{d\Omega_b}{d\phi} \\ \frac{dT_t}{d\phi} \\ \frac{dT_n}{d\phi} \\ \frac{dM_b}{d\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{R}{EA} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & \frac{\alpha_n R}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{EI_b} \\ -\rho RA\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\rho RA\omega^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho RI_b\omega^2 & 0 & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ U_n \\ \Omega_b \\ T_t \\ T_n \\ M_b \end{bmatrix} \quad (6)$$

Düzlemine dik durum için elde edilecek diferansiyel geçiş matrisi ise $\{U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t, M_n\}$ serbestliklerini içermektedir.

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_b}{d\phi} \\ \frac{d\Omega_t}{d\phi} \\ \frac{d\Omega_n}{d\phi} \\ \frac{dT_b}{d\phi} \\ \frac{dM_t}{d\phi} \\ \frac{dM_n}{d\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R & \frac{\alpha_b R}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{R}{GI_t} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{R}{EI_n} \\ -\rho RA\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho RI_t\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho RI_n\omega^2 & R & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_t \\ \Omega_n \\ T_b \\ M_t \\ M_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

(6) ve (7) denklemleri kapalı formda

$$d\mathbf{S}(\phi)/d\phi = \mathbf{D} \mathbf{S}(\phi) \quad (8)$$

şeklinde yazılır. Burada, \mathbf{S} durum vektörü ve \mathbf{D} ise dinamik diferansiyel matrisidir. (8) denkleminin çözümü

$$\mathbf{S}(\phi) = \mathbf{F}(\phi, \omega) \mathbf{S}(0) \quad (9)$$

ifadesi yardımı ile yapılabilmektedir. Burada, \mathbf{F} dinamik taşıma matrisidir. Dinamik taşıma matrisi, dinamik diferansiyel matrisinin Taylor serisi açılımı yapılarak elde edilebilmektedir [8, 9, 17].

$$\mathbf{F}(\phi, \omega) = e^{\phi \mathbf{D}} = I + \phi \mathbf{D} + \frac{\phi^2}{2!} \mathbf{D}^2 + \dots + \frac{\phi^k}{k!} \mathbf{D}^k + \dots \quad (10)$$

Hassasiyetin artırılması için Taylor serisinin üst mertebeden terimleri Cayley-Hamilton prensibi kullanılarak alt mertebeden terimler cinsinden ifade edilmektedir [8, 9, 17].

$$F(\phi, \omega) = \varphi_1(\phi, \omega) * I + \sum_{i=1}^5 \varphi_{i+1}(\phi, \omega) * \mathbf{D}^i \quad (21)$$

(11) denkleminde verilen φ fonksiyonları üst mertebeden terimlerin katsayıları hesaplanıp ilk 6 terimin katsayılarına eklenerek elde edilebilir. İlk 6 terimin katsayıları aşağıdaki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$K_{(2i+1)}^{(0)} = \frac{\phi^6}{6!} c_{(3-i)} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (12)$$

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİ ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

$$K_{(2i)}^{(0)} = \frac{\phi^7}{7!} c_{(3-i)} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

Bu katsayılar kullanılarak daha üst mertebeden terimlerin katsayıları da elde edilebilmektedir. Burada c katsayıları diferansiyel geçiş matrisinin ve onun üst mertebelerinin izlerinden hesaplanan katsayılardır.

$$K_{(2i+1)}^{(n)} = \frac{\phi^2}{(5 + 2i)(6 + 2i)} (K_{(5)}^{(n-1)} c_{(3-i)} + K_{(2i-1)}^{(n-1)}) \quad (i = 0, 1, 2) \tag{14}$$

$$K_{(2i)}^{(n)} = \frac{\phi^2}{(6 + 2i)(7 + 2i)} (K_{(6)}^{(n-1)} c_{(4-i)} + K_{(2i-2)}^{(n-1)}) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

$$\varphi_i = \frac{\phi^{(i-1)}}{(i - 1)!} + \sum_{i=1}^{i=S} K_i^{(i-1)} \tag{16}$$

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışma kapsamında daire eksenli çubukların serbest titreşim analizi için Mathematica dilinde genel bir program yazılmıştır. Dinamik rijitlik matrisi taşıma matrisi yardımı ile hesaplanmaktadır.

Örnek 1: Dikdörtgen kesite sahip daire eksenli konsol kiriş problemi ele alınmıştır. Daire eksenli çubuğun geometrik ve malzeme özellikleri: kesit alanı $A = 1.1718 \cdot 10^{-4} m^2$, elastisite modülü $E = 68.13 \cdot 10^9 Nm^{-2}$, kütleli yoğunluk $\rho = 2882 kg/m^3$, Poisson oranı $\nu = 0.33$, kayma düzeltme faktörleri $\alpha_n = \alpha_b = 1.2$, daire eksenli çubuğun yarıçapı $R = 0.305 m$, eksen açısı $\theta = 180^\circ$, burulma atalet momenti $I_t = 1.22 \cdot 10^{-9} m^4$, eğilme atalet momentleri $I_n = 3.4882 \cdot 10^{-9} m^4$ ve $I_b = 3.75367 \cdot 10^{-10} m^4$ alınmıştır. Düzlemi içinde serbest titreşim frekansları Tablo 1 ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları Tablo 2’de verilmektedir.

Tablo 1. Dikdörtgen kesitli konsol kirişin düzlemi içi serbest titreşim frekansları (rad/s)

$\bar{\omega}$	[5]	[5]*	[8]	ANSYS	Bu Çalışma
1	44.3	41	40.71	40.706	40.6
2	-	-	128.59	128.59	128.25
3	-	-	440.2	440.202	439.02
4	-	-	982.4	982.407	979.75
5	-	-	1717.06	1717.06	1712.44
6	-	-	2642.94	2642.95	2635.86

*deneysel çalışma

Tablo 2. Dikdörtgen kesitli konsol kirişin düzlemine dik serbest titreşim frekansları (rad/s)

$\bar{\omega}$	[5]	[5]*	[8]	ANSYS	Bu Çalışma
1	59.6	56	54.80	54.80	54.66
2	-	-	263.93	263.79	263.24
3	-	-	953.24	950.26	951.01
4	-	-	2341.88	2325.88	2337.53

*deneysel çalışma

Tablo 1 ve Tablo 2 incelendiğinde, literatürdeki mevcut sonuçların ve sonlu elemanlara dayalı ANSYS program sonuçlarının birbirleri ile uyumlu oldukları görülmektedir.

Örnek 2: Daire kesite sahip daire eksenli çubuk problemi incelenmiştir. Çözümlerde ankastre-ankastre (AA) ve ankastre-sabit (AS) sınır şartları kullanılmıştır. Daire eksenli çubuğa ait geometrik ve malzeme özellikleri: kesit alanı $A = 4 \cdot 10^{-4} m^2$, kütleli yoğunluk $\rho = 7850 kg/m^3$, elastisite modülü $E = 2.1 \cdot 10^{11} Nm^{-2}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, kayma düzeltme katsayıları $\alpha_n = \alpha_b = 1.1236$ alınmıştır. Ankastre-ankastre (AA) sınır şartına ait daire eksenli çubuğun düzlemi içinde serbest titreşim frekansları Tablo 3 ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları Tablo 4’de verilmektedir. Ankastre-sabit (AS) sınır şartına ait daire eksenli çubuğun düzlemi içinde ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları Tablo 5’de verilmektedir. Narinlik oranı, çubuk eksenli yarıçapı R

Y.Ç. CUMA, F.F. ÇALIM

ile çubuk kesiti yarıçapı r 'nin oranı olmak üzere ($\lambda = \frac{R}{r}$) ve boyutsuzlaştırma ($\bar{\omega}$) aşağıdaki ifadeler yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$\lambda = 2 (R/r) \quad , \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho AR^4}{EI_b} \omega^2 \quad (17)$$

Tablo 3: Boyutsuz düzlem içi serbest titreşim frekansları (AA)

		[4]	[8]	ANSYS	Bu Çalışma	[4]	[8]	ANSYS	Bu Çalışma	[4]	[8]	ANSYS	Bu Çalışma
λ	$\bar{\omega}$	60°				120°				180°			
20	1	23.75	23.799	23.777	23.772	10.610	10.629	10.613	10.612	4.151	4.160	4.157	4.157
	2	39.05	39.144	38.995	38.988	15.190	15.194	15.184	15.182	8.542	8.546	8.536	8.536
	3	62.38	62.976	62.978	62.958	24.720	24.756	24.720	24.716	15.460	15.481	15.457	15.459
	4	70.71	71.042	70.690	70.676	30.470	30.598	30.560	30.553	17.910	17.921	17.918	17.915
100	1	52.82	52.830	52.815	52.815	11.790	11.791	11.790	11.790	4.374	4.375	4.375	4.375
	2	76.01	76.018	76.020	76.004	23.250	23.252	23.249	23.249	9.603	9.603	9.603	9.603
	3	117.9	117.923	117.900	117.887	42.370	42.376	42.367	42.367	17.810	17.810	17.808	17.809
	4	171.1	171.189	171.069	171.068	61.430	61.440	61.426	61.425	27.220	27.218	27.215	27.215

Tablo 4: Boyutsuz düzlemine dik serbest titreşim frekansları (AA)

λ	$\bar{\omega}$	[3]	[6]	[8]	[12]	[13]	[16]	ANSYS	Bu Çalışma
60°									
20	1	16.880	16.744	16.744	16.885	16.885	16.832	16.886	16.885
	2	39.700	-	39.67	39.700	39.700	39.901	39.714	39.700
	3	40.900	-	40.35	40.934	40.934	41.040	40.940	40.935
	4	70.510	-	69.32	70.581	70.581	-	70.594	70.582
100	1	19.450	19.402	19.455	19.454	19.454	19.450	19.454	19.454
	2	54.140	-	54.091	54.148	54.148	54.100	54.147	54.148
	3	105.900	-	105.675	105.860	105.861	105.690	105.862	105.866
	4	173.100	-	172.708	173.160	173.158	-	173.161	173.191
120°									
20	1	4.309	4.283	4.300	4.309	4.309	4.419	4.309	4.309
	2	11.790	-	11.738	11.796	11.796	11.991	11.797	11.796
	3	22.500	-	22.333	22.510	22.510	22.397	22.512	22.511
	4	23.300	-	23.290	23.303	23.303	-	23.310	23.303
100	1	4.473	4.452	4.473	4.473	4.473	4.604	4.473	4.473
	2	12.890	-	12.888	12.892	12.892	13.239	12.892	12.892
	3	26.080	-	26.069	26.081	26.081	26.489	26.080	26.081
	4	43.680	-	43.655	43.684	43.684	-	43.684	43.687
180°									
20	1	1.791	1.777	1.789	1.791	1.791	1.862	1.791	1.791
	2	5.032	-	5.022	5.032	5.032	5.268	5.033	5.032
	3	10.230	-	10.194	10.232	10.232	10.489	10.233	10.232
	4	16.910	-	16.824	16.917	16.917	-	16.918	16.917
100	1	1.818	1.805	1.818	1.818	1.818	1.894	1.818	1.818
	2	5.242	-	5.241	5.242	5.242	5.506	5.241	5.242
	3	10.990	-	10.987	10.989	10.989	11.374	10.989	10.989
	4	18.810	-	18.808	18.813	18.813	-	18.813	18.814

Tablo 3 ve 4 incelendiğinde, çalışmada elde edilen sonuçların literatürde verilen sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmektedir. Narinlik ve açı değişiminin düzlemi içinde ve düzlemine dik daire eksenli çubukların serbest titreşime etkisi araştırılmıştır. Narinlik oranı arttığında serbest titreşim frekansları artarken açı değeri arttığında ise serbest titreşim frekansları azalmakta olduğu ilgili tablolardan açıkça görülmektedir.

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİ ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

Örnek 3: Bir önceki örnekte verilen geometrik ve malzeme parametreleri kullanılarak farklı mesnet koşullarının serbest titreşim frekanslarına olan etkisi incelenmiştir. Ankastre-sabit (AS), ankastre-boş (AB) ve sabit-sabit (SS) sınır koşulları incelenmiştir.

Tablo 5: Boyutsuz düzlemi içinde ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları (AS)

		ANSYS	Bu Çalışma	ANSYS	Bu Çalışma	ANSYS	Bu Çalışma
λ	$\bar{\omega}$	60°		120°		180°	
Düzlemi İçinde							
20	1	20.952	20.952	8.486	8.486	3.133	3.133
	2	34.152	34.152	14.952	14.952	7.569	7.569
	3	62.680	62.680	22.568	22.568	14.113	14.133
	4	65.863	65.863	29.644	29.644	17.903	17.903
100	1	42.351	42.351	9.177	9.177	3.249	3.249
	2	73.760	73.760	20.264	20.264	8.222	8.222
	3	107.616	107.617	37.776	37.776	15.802	15.802
	4	154.171	154.173	57.020	57.020	24.909	24.909
Düzlemine Dik							
20	1	10.754	10.755	2.336	2.336	0.887	0.887
	2	22.526	22.527	8.728	8.728	3.467	3.467
	3	35.756	33.756	15.784	15.784	8.251	8.251
	4	56.935	56.935	20.167	20.167	13.663	13.663
100	1	12.062	12.062	2.395	2.395	0.894	0.894
	2	42.620	42.620	9.540	9.540	3.595	3.595
	3	89.522	89.522	21.654	21.654	8.847	8.847
	4	115.605	115.605	38.133	38.133	16.171	16.170

Tablo 5 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları gözlemlenmektedir. Narinlik oranı arttığında serbest titreşim frekansları artarken açı değeri arttığında ise serbest titreşim frekansları azalmaktadır.

Tablo 6: Boyutsuz düzlemi içinde ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları (SS)

		ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
λ	$\bar{\omega}$	60°		120°		180°	
Düzlemi İçinde							
20	1	19,564	19,564	6,589	6,589	2,215	2,215
	2	28,691	28,691	14,409	14,409	6,543	6,543
	3	60,510	60,510	20,953	20,953	12,830	12,830
	4	62,749	62,750	28,023	28,023	17,874	17,874
100	1	33,373	33,374	6,912	6,913	2,265	2,265
	2	69,013	69,014	17,384	17,384	6,907	6,907
	3	101,511	101,513	33,508	33,508	13,927	13,927
	4	137,562	137,564	52,456	52,456	22,676	22,676
Düzlemine Dik							
20	1	14,889	14,889	6,284	6,284	2,077	2,077
	2	27,230	27,230	11,730	11,730	6,278	6,278
	3	41,117	41,117	17,975	17,975	12,220	12,220
	4	59,391	59,391	21,734	21,734	13,439	13,439
100	1	32,961	32,962	6,663	6,664	2,131	2,132
	2	58,790	58,790	17,127	17,128	6,736	6,736
	3	84,525	84,526	33,150	33,150	13,690	13,690
	4	136,378	136,380	51,294	51,294	22,430	22,431

Tablo 7: Boyutsuz düzlemi içinde ve düzlemine dik serbest titreşim frekansları (AB)

		ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
Λ	Ω	60°		120°		180°	
Düzlemi İçinde							
20	1	3,212	3,212	0,871	0,871	0,434	0,434
	2	15,466	15,466	3,510	3,510	1,351	1,351
	3	33,150	33,150	10,938	10,938	4,495	4,495
	4	44,328	44,328	20,362	20,362	9,686	9,686
100	1	3,276	3,276	0,876	0,877	0,435	0,436
	2	17,884	17,885	3,657	3,658	1,374	1,375
	3	52,918	52,919	12,084	12,085	4,700	4,700
	4	104,302	104,303	25,284	25,284	10,479	10,479
Düzlemine Dik							
20	1	3,162	3,162	0,828	0,828	0,398	0,398
	2	14,430	14,430	3,388	3,388	1,310	1,310
	3	22,929	22,929	10,236	10,236	4,336	4,336
	4	42,936	42,936	15,860	15,860	9,279	9,279
100	1	3,226	3,227	0,833	0,833	0,400	0,400
	2	17,515	17,516	3,537	3,537	1,329	1,330
	3	52,209	52,209	11,849	11,850	4,568	4,569
	4	99,566	99,566	24,983	24,984	10,302	10,302

Sabit-sabit (SS) ve ankastre-boş (AB) mesnet koşullarında problemin serbest titreşim frekansları Tablo 6 ve Tablo 7’de verilmiştir. Bilindiği üzere ankastre-boş (AB) mesnet koşulunda en küçük frekans değerleri elde edildiği görülmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, daire eksenli çubukların düzlemi içi ve düzlemine dik serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Dinamik rijitlik matrisi, taşıma matrisi yöntemi yardımı ile elde edilmiştir. Mathematica dilinde hazırlanan genel amaçlı bir bilgisayar programı yardımı ile çözümler yapılmıştır. Taşıma matrisi seri açılımıyla hesaplanmış ve Cayley-Hamilton prensibi ile hassasiyet artırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut sonuçlar ile uyumlu oldukları görülmüştür.

Bilindiği üzere, narinlik, sınır koşulları ve açı değerinin daire eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını etkilemektedir. Narinlik değeri arttıkça serbest titreşim frekansları arttığı görülmektedir. Çubuğun mesnetlenme koşuluna bağlı olarak frekans değerleri de değişmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] M. HAJIANMALEKI AND M. S. QATU, “Vibrations of straight and curved composite beams: A review,” *Composite Structures*. 2013.
- [2] W. B. BİCKFORD AND B. T. STROM, “Vibration of plane curved beams,” *J. Sound Vib.*, 1975.
- [3] T. İRİE, G. YAMADA, AND K. TANAKA, “Natural frequencies of out-of-plane vibration of arcs,” *J. Appl. Mech.*, vol. 49, no. 4, pp. 910–913, 1982.
- [4] T. İRİE, G. YAMADA, AND K. TANAKA, “Natural frequencies of in-plane vibration of arcs,” *ASME, Trans. J. Appl. Mech.*, vol. 50, pp. 449–452, 1983.
- [5] B. TABARROK, A. N. SİNCLAİR, M. FARSHAD, AND H. Yİ, “On the dynamics of spatially curved and twisted rods-A finite element formulation,” *J. Sound Vib.*, 1988.
- [6] K. KANG, C. W. BERT, AND A. G. STRİZ, “Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method,” *J. Sound Vib.*, vol. 183, no. 2, pp. 353–360, 1995.
- [7] A. A. KHDEİR AND J. N. REDDY, “Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches,” *Int. J. Solids Struct.*, 1997.
- [8] V. YİLDİRİM, “A computer program for the free vibration analysis of elastic arcs,” *Comput. Struct.*, 1997.
- [9] V. YİLDİRİM, “Rotary inertia, axial and shear deformation effects on the in-plane natural frequencies of symmetric cross-ply laminated circular arches,” *J. Sound Vib.*, 1999.

DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİMİNİ ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

- [10] V. YİLDİRİM, “Common effects of the rotary inertia and shear deformation on the out-of-plane natural frequencies of composite circular bars,” *Compos. Part B Engineering*, 2001.
- [11] E. TÜFEKÇİ, “Exact Solution Of Free In-plane Vibration Of Shallow Circular Arches,” *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2001.
- [12] W. P. HOWSON AND A. K. JEMAH, “Exact Out-of-Plane Natural Frequencies of Curved Timoshenko Beams,” *J. Eng. Mech.*, 2002.
- [13] E. TUFEKÇİ AND O. Y. DOGRUER, “Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution,” *J. Sound Vib.*, 2006.
- [14] E. VIOLA, M. DILENA, AND F. TORNABENE, “Analytical and numerical results for vibration analysis of multi-stepped and multi-damaged circular arches,” *J. Sound Vib.*, 2007.
- [15] F. F. ÇALIM AND F. G. AKKURT, “Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation,” in *Mechanics Research Communications*, 2011.
- [16] F. F. ÇALIM, N. KARACA, AND H. T. TÜRKER, “Out-of-Plane Free Vibrations of Circular Rods,” *World Acad. Sci. Eng. Technol. Int. J. Mech. Aerospace, Ind. Mechatron. Manuf. Eng.*, vol. 9, no. 5, pp. 812–815, 2015.
- [17] M. İNAN, *Elestomekanikte başlangıç değerleri metodu ve taşıma matrisi*. TC İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, İstanbul, Türkiye, 1964.