

## PIEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ

Ülkü BABUŞCU YEŞİL (ORCID: 0000-0002-8557-8308)<sup>1,\*</sup>

Nazmiye YAHNIOĞLU (ORCID: 0000-0002-3921-8643)<sup>1</sup>

Yasemen UÇAN (ORCID:0000-0001-7634-7869)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

Geliş / Received: 09.10.2019  
Kabul / Accepted: 22.11.2019

### ÖZ

Bu çalışmada, yapısında piezoelektrik (PZT) malzemenen yapılmış prizmatik dolgu içeren dikdörtgen kalın plağın bazı elektro-statik problemleri, üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde matematiksel olarak modellenmiş ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal çözümün gerektirdiği tüm algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

Ele alınan plağın tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve PZT malzeme içeren dış yanal yüzeylerinden elektrik potansiyelin sıfır olduğu ve karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı statik çekme kuvvetinin etki ettiği kabul edilmektedir. Ayrıca, PZT dolgu ile çevresindeki matris malzemesi arasındaki ara yüzeyde ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilmektedir.

Ele alınan PZT dikdörtgen kalın plağın verilen sınır koşulları, temas koşulları ve yükleme durumu için yapısında oluşan yer değiştirme ve gerilme yayılımlarına, plağa ait çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin etkileri ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkileşiminin tesiri incelenmiş ve tartışılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Piezoelektrik dolgu, dikdörtgen kalın plak, sonlu elemanlar yöntemi, elektro-statik analiz

## ELECTROSTATIC ANALYSIS OF RECTANGULAR THICK PLATE CONTAINING PIEZOELECTIC PRISMATIC INCLUSION WITH FEM

### ABSTRACT

In this study, some electro-static problems of rectangular thick plate containing a prismatic inclusion made of piezoelectric (PZT) material are solved numerically in the framework of the three dimensional linearized exact equations of electro-elasticity theory using piecewise-homogeneous body model by using three dimensional finite element method. All algorithms and programs required for the numerical solution are made by the authors. It is assumed that the plate is simply supported from all lateral surfaces and also, electric potential is zero and, ideal contact conditions are provided at the interface surfaces between the PZT inclusion and the matrix material. The effect of materials and geometric parameters as well as the couple interaction between the electrical and mechanical fields of the PZT rectangular thick plate under the uniaxial tensile force in the given boundary conditions is investigated and discussed.

**Keywords:** Piezoelectric inclusion, rectangular thick plate, finite elements method, electro-static analysis

\*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.: +90 212 383 4606 ; e-mail / e-posta: ubabuscu@yildiz.edu.tr

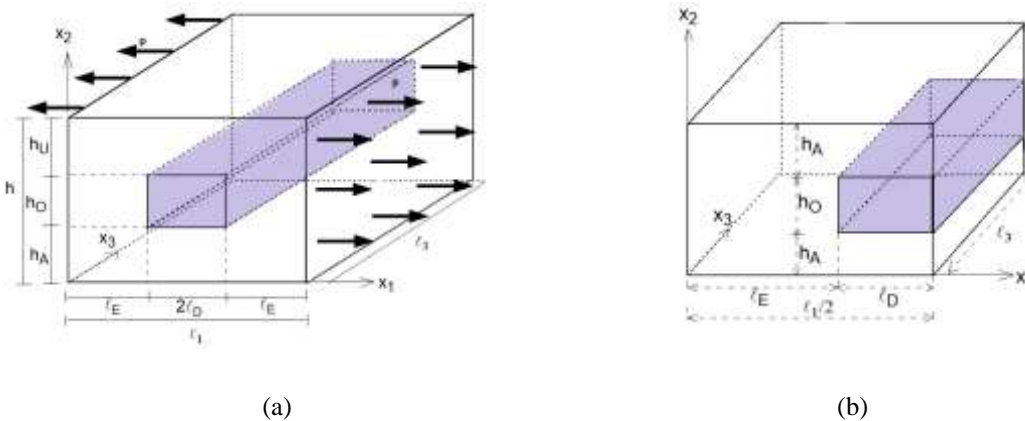
## 1. GİRİŞ

Doğada bulunan bazı malzemeler, elektriksel alan ile mekanik alanların karşılıklı etkisinin olduğu, özel malzeme özelliklerine sahiptirler ve bazı malzemelerde bulunan bu özellikler genellikle çok karmaşıktır. Eğer, elektriksel alan ile mekanik alanların karşılıklı etkisi lineer olarak alınrsa, bu malzemelere özel olarak piezoelektrik (PZT) malzeme adı verilmektedir. Bu yeteneklerinden dolayı akıllı malzemeler sınıfında değerlendirilmekte ve birçok ileri teknoloji uygulamalarında kullanılmaktadırlar. Çeşitli elektrik ve/veya mekanik yükler altındaki piezoelektrik malzemelerin elektro-mekanik davranışlarının öğrenilmesi, çeşitli elektro-mekanik aygıtların (örneğin, sensör, aktüatör vb.) geliştirilmesinde büyük bir öneme sahiptir. Piezoelektrik etki günlük yaşamda ve endüstride çok yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Otomotiv endüstrisinde; airbag sensörleri, alarmlar, yakıt püskürtücüleri, emniyet kemeri uyarıcıları, park sensörleri, bilgisayarlarda; disk sürücüler, mürekkep püskürtmeli yazıcılar, medikal sistemlerde; ultrasonik görüntüleme, tek kullanımlık hasta monitörleri, askeri sistemlerde; hidrofona, sonar sistemler, derinlik algılayıcılar, tüketici elektroniğinde; müzik enstrümanları, çakmaklar, sonar sistemler gibi pek çok uygulama alanları mevcuttur.

Piezoelektrik malzemeden yapılmış yapı bileşenleri, mühendislik uygulamalarında genellikle, piezoelektrik olmayan malzemeden yapılmış yapı bileşenleri ile bütünleştirilerek (bir araya getirilerek) kullanılmaktadırlar. Bununla beraber, içerisinde dolgu, çatlak, boşluk gibi çeşitli süreksizlikler içeren piezoelektrik malzemelerden yapılmış yapı elemanlarına ait problemler, son zamanlarda oldukça geniş bir araştırma alanına sahiptir. Bu alana ait literatürdeki bazı çalışmalar [1-4]'de verilmiştir. Ancak literatürde mevcut bu ve diğer pek çok çalışmada, genellikle düzlem problemler incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında ise, yapısında piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgu içeren dikdörtgen kalın plakların bazı elektro-statik problemleri, parçalı homojen cisim modeli ve üç boyutlu elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde modellenmiş ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir.

## 2. MATERYAL VE METOT

Ele alınan dikdörtgen kalın plağın yapısındaki dikdörtgen prizmatik dolgunun, verilen yatay ve dikey eksenlere göre plağın merkezinde ve plağın arkaya doğru kalınlığı doğrultusunda yer alan eksene ( $Ox_3$  ekseni) paralel olacak şekilde yerleştiği kabul edilmektedir (Şekil 1a). Ele alınan problemin çözümü, yapı elemanı ve yüklemenin  $x_1/\ell_1 = 1/2$ 'ye göre simetrik olmasından yararlanılarak, çözüm bölgesinin yarısında yapılacaktır (Şekil 1b).



Şekil 1. a) Dikdörtgen prizmatik formda dolgu içeren plak geometrisi ve yükleme durumu b) Bölgenin 1/2'lik kısmı.

Ele alınan problemin çözüm bölgesi;

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_I \cup \Omega_{II} = \{ 0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \} \\ \Omega_{II} &= \{ \ell_E \leq x_1 \leq \ell_1 - \ell_E, h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O, 0 \leq x_3 \leq \ell_3 \} \\ \Omega_I &= \Omega / \Omega_{II} \end{aligned} \quad (1)$$

*PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ*

dir. Burada  $\Omega_{II}$  dolgunun bulunduğu bölgeyi,  $\Omega_I$  dolgunun dışındaki bölgeyi (matris) göstermektedir. Ele alınan plağın bütün yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve ilave olarak PZT malzeme içeren yüzeylerde elektriksel potansiyelin sıfır olduğu, sadece  $x_1 = 0; \ell_1$  yüzeylerinden tek eksenli çekme kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın yanal yüzeyleri ( $x_3 = 0; \ell_3$ ) ile alt ve üst yüzeylerinden ( $x_2 = 0; h$ ) mekaniksel ve elektriksel hiçbir yükün etki etmediği ve matris ile dolgu ara yüzeylerinde ideal temas koşulları ile normal doğrultudaki elektriksel yer değiştirme değişiminin olmadığı (topraklanmış olduğu) kabul edilmektedir. Belirtelim ki, burada verilecek olan matematiksel modelleme, daha genel olması açısından, hem dolgu hem de onu saran bölgenin (matris) malzemesinin piezoelektrik malzeme olduğu kabul edilerek verilecektir. Ancak, sayısal hesaplamalarda matris malzemesinin elastik malzeme olması durumu göz önünde bulundurulacaktır. Matematiksel modellemede üst indis (1) ile matris malzemesi, üst indis (2) ile dolgu malzemesine ait büyüklükler temsil edilecektir.

Buna göre çözüm bölgesinde sağlanan alan denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^{(m)}}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial D_j^{(m)}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} s_{kl}^{(m)} - e_{kij}^{(m)} E_k^{(m)}, D_i^{(m)} = e_{ikl}^{(m)} s_{kl}^{(m)} + \epsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)} \quad (2)$$

$$s_{kl}^{(m)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(m)}}{\partial x_k} \right), E_k^{(m)} = - \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_k}$$

dir. (2)'de  $i; j; k; l = 1, 2, 3$  ve  $m = 1, 2$  ( $m = 1$  ( $m = 2$ ) matris (dolgu) malzemesine ait büyüklükleri temsil etmekte) dir. Ayrıca bu denklemlerde,  $\sigma_{ij}$  gerilme tansörü bileşeni;  $D_i$  elektriksel yer değiştirme vektörü bileşeni;  $e_{ikl}$  piezoelektrik sabiti;  $s_{kl}$  Green şekil değiştirme tansörü bileşeni;  $u_i$  mekanik yer değiştirme vektörü bileşeni;  $\epsilon_{ik}$  dielektrik sabiti;  $E_k$  elektrik alan bileşeni;  $c_{ijkl}$  elastik malzeme sabiti ve  $\phi$  elektrik potansiyeli temsil etmektedir.

Matematik modellemede (2) denklemlerinde yer alan indis notasyonu için basitlik açısından literatürde kullanılan,  $ij$  ve  $kl$  indis çiftleri yerine  $p$  ve  $q$  gibi tek indis gösterilimi kullanılacaktır. Buna göre  $c_{ijkl} \rightarrow c_{pq}; e_{ikl} \rightarrow e_{ip}; \sigma_{ij} \rightarrow \sigma_p$  için,

$ij$ veya $kl$	11	22	33	23 veya 32	31 veya 13	12 veya 21
$p$ veya $q$	1	2	3	4	5	6

alınmıştır. Benzeri şekilde örneğin, şekil değiştirme tansörü bileşenleri için;

$$s_1 = s_{11}, s_2 = s_{22}, s_3 = s_{33}, s_4 = s_{23} = s_{32}, s_5 = s_{31} = s_{13}, s_6 = s_{12} = s_{21}.$$

yazılabilir. Malzemeye ait bünye denklemleri yeni indis notasyonuna göre düzenlenirse;

$$\sigma_p^{(m)} = c_{pq}^{(m)} s_q^{(m)} - e_{kp}^{(m)} E_k^{(m)}, D_i^{(m)} = e_{iq}^{(m)} s_q^{(m)} + \epsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)} \quad (3)$$

veya matris formunda

Ü. BABUŞCU YEŞİL, N. YAHNİOĞLU, Y. UÇAN

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{(m)} \\ \sigma_2^{(m)} \\ \sigma_3^{(m)} \\ \sigma_4^{(m)} \\ \sigma_5^{(m)} \\ \sigma_6^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}^{(m)} & c_{12}^{(m)} & c_{13}^{(m)} & c_{14}^{(m)} & c_{15}^{(m)} & c_{16}^{(m)} \\ c_{21}^{(m)} & c_{22}^{(m)} & c_{23}^{(m)} & c_{24}^{(m)} & c_{25}^{(m)} & c_{26}^{(m)} \\ c_{31}^{(m)} & c_{32}^{(m)} & c_{33}^{(m)} & c_{34}^{(m)} & c_{35}^{(m)} & c_{36}^{(m)} \\ c_{41}^{(m)} & c_{42}^{(m)} & c_{43}^{(m)} & c_{44}^{(m)} & c_{45}^{(m)} & c_{46}^{(m)} \\ c_{51}^{(m)} & c_{52}^{(m)} & c_{53}^{(m)} & c_{54}^{(m)} & c_{55}^{(m)} & c_{56}^{(m)} \\ c_{61}^{(m)} & c_{62}^{(m)} & c_{63}^{(m)} & c_{64}^{(m)} & c_{65}^{(m)} & c_{66}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11}^{(m)} & e_{21}^{(m)} & e_{31}^{(m)} \\ e_{12}^{(m)} & e_{22}^{(m)} & e_{32}^{(m)} \\ e_{13}^{(m)} & e_{23}^{(m)} & e_{33}^{(m)} \\ e_{14}^{(m)} & e_{24}^{(m)} & e_{34}^{(m)} \\ e_{15}^{(m)} & e_{25}^{(m)} & e_{35}^{(m)} \\ e_{16}^{(m)} & e_{26}^{(m)} & e_{36}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(m)} \\ E_2^{(m)} \\ E_3^{(m)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1^{(m)} \\ D_2^{(m)} \\ D_3^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(m)} & \varepsilon_{12}^{(m)} & \varepsilon_{13}^{(m)} & \varepsilon_{14}^{(m)} & \varepsilon_{15}^{(m)} & \varepsilon_{16}^{(m)} \\ \varepsilon_{21}^{(m)} & \varepsilon_{22}^{(m)} & \varepsilon_{23}^{(m)} & \varepsilon_{24}^{(m)} & \varepsilon_{25}^{(m)} & \varepsilon_{26}^{(m)} \\ \varepsilon_{31}^{(m)} & \varepsilon_{32}^{(m)} & \varepsilon_{33}^{(m)} & \varepsilon_{34}^{(m)} & \varepsilon_{35}^{(m)} & \varepsilon_{36}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(m)} & \varepsilon_{12}^{(m)} & \varepsilon_{13}^{(m)} \\ \varepsilon_{21}^{(m)} & \varepsilon_{22}^{(m)} & \varepsilon_{23}^{(m)} \\ \varepsilon_{31}^{(m)} & \varepsilon_{32}^{(m)} & \varepsilon_{33}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(m)} \\ E_2^{(m)} \\ E_3^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

olur. Sınır koşulları,

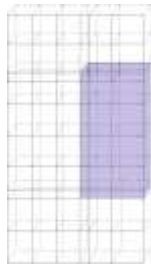
$$\begin{aligned}
 u_2^{(1)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \phi^{(1)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \sigma_{11}^{(1)}|_{x_1=0;\ell_1} = p, \sigma_{13}^{(1)}|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\
 u_2^{(m)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \phi^{(m)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \sigma_{31}^{(m)}|_{x_3=0;\ell_3} = \sigma_{33}^{(m)}|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
 \sigma_{2i}^{(1)}|_{x_2=0} = \sigma_{2i}^{(1)}|_{x_2=h} = 0, D_2^{(1)}|_{x_2=0} = D_2^{(1)}|_{x_2=h} = 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

ve ara yüzeylerde temas koşulları

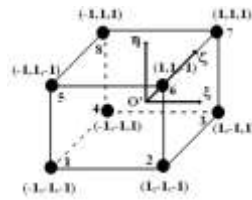
$$\begin{aligned}
 u_i^{(1)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E} = u_i^{(2)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E}, u_i^{(1)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o} = u_i^{(2)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o}, \\
 \sigma_{ij}^{(1)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E} = \sigma_{ij}^{(2)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E}, \sigma_{ij}^{(1)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o} = \sigma_{ij}^{(2)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o}, \\
 \phi^{(1)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E} = \phi^{(2)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E}, \phi^{(1)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o} = \phi^{(2)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o}, \\
 D_1^{(1)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E} = D_1^{(2)}|_{x_1=\ell_E;\ell_1-\ell_E}, D_1^{(1)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o} = D_1^{(2)}|_{x_2=h_A;h_A+h_o}
 \end{aligned} \quad (6)$$

olarak verilebilir. Buna göre, ele alınan sınır değer problemlerine ait matematiksel model (1)-(6) denklem takımı yardımıyla verilebilir.

Matematiksel modeli (1)-(6) denklem takımı ile verilen sınır değer probleminin çözümü, üç boyutlu (3B) sonlu elemanlar modellenmesi yardımıyla sayısal olarak yapılacaktır. Yöntem gereği çözüm bölgesi, geometriye uygun olarak, matris ile dolgu için ayrı ayrı 8 nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlara ayrıştırılacaktır (Şekil 2). Nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yer değiştirmeler ile  $\phi$  elektriksel potansiyel alınmıştır.



(a)



(b)

Şekil 2. a) Çözüm bölgesinin ayrıştırılması, b) Dikdörtgen prizmatik örnek eleman

*PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ*

Ele alınan dikdörtgen prizmatik örnek elemanın (Şekil 2b) nodlarında tanımlanan şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş koordinatlardaki (O'ξηζ) ifadeleri [5];

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \quad N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \quad N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \quad N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), \quad N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad (7)$$

dir.  $Ox_1x_2x_3$  koordinat takımı ile O'ξηζ normalize edilmiş koordinat takımı arasında

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}, \quad \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}, \quad \zeta = \frac{x_3 - x_{30}}{\gamma} \quad (8)$$

ilişkileri sağlanmaktadır.  $x_{10}; x_{20}; x_{30}$  değerleri,  $\overline{OO'}$  vektörünün  $Ox_1x_2x_3$  koordinat eksenleri üzerindeki bileşenlerini,  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  sonlu elemanların sırasıyla  $Ox_1, Ox_2$  ve  $Ox_3$  eksenleri doğrultusundaki uzunluklarını temsil etmektedir.

Sonlu eleman modellemesi için cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden  $\Pi$  fonksiyoneli kullanılacaktır [6]:

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2, u_3, \phi) &= \sum_{m=1}^2 \iiint_{\Omega_m} \left[ \frac{1}{2} G_{ijkl}^{(m)} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(m)} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^{(m)} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_l} \right] d\Omega_m - \\ &\int_0^{\ell_3} \int_0^h p u_1^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} dx_2 dx_3 - \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} D_2^{(1)} \phi^{(1),1} \Big|_{x_2=0; h} dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$\Pi$  fonksiyoneli ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla ele alınan sınır değer probleminin çözümü, cebirsel denklemler takımının çözümüne indirgenir. (9) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden yani,

$$\delta \Pi(u_1, u_2, u_3, \phi) = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1^{(m)}} \delta u_1^{(m)} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2^{(m)}} \delta u_2^{(m)} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_3^{(m)}} \delta u_3^{(m)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi^{(m)}} \delta \phi^{(m)} = 0 \quad (10)$$

eşitliğinden, alan denklemleri ile gerilmelere ve elektriksel potansiyele göre verilen sınır koşulları elde edilir. Ritz tekniği yardımıyla bilinen işlemler dahilinde (10) eşitliğinden,

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \quad (11)$$

lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. (11)'de  $\mathbf{K}$  katsayılar (Stiffness) matrisi,  $\mathbf{u}$  bilinmeyenleri içeren vektör ve  $\mathbf{F}$  sağ taraf (kuvvet) vektörüdür.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

(1)-(6) sınır değer probleminin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözülmesi aşamasında, ele alınan plağı oluşturan bileşenlerden dolgu malzemesinin piezoelektrik (PZT) malzemedan, dolguyu saran malzemenin izotrop-elastik malzemedan yapıldığı kabul edilmiştir. Ele alınan problemin çözümünde ve sayısal sonuçların elde edilmesinde herhangi bir paket program kullanılmamış, tüm algoritmalar ve programlar tarafımızdan FORTRAN (FTN77) kodlama dili kullanılarak yapılmıştır. Problem ve sınır koşullarının  $x_1 = \ell_1/2$ 'ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak çözüm, bölgenin yarısında (Şekil 1b) yapılmıştır. Bu bölge  $Ox_1$  doğrultusunda toplamda  $N=20$  (PZT dolgu içeren kısım için bu doğrultuda 8 adet),  $Ox_3$  doğrultusunda  $NZ=20$  ve  $Ox_2$  doğrultusunda  $M=16$  (PZT dolgu içeren kısım için bu doğrultuda 6 adet) dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam 6400 adet 8 nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrılaştırılmıştır. Ele alınan

Ü. BABUŞCU YEŞİL, N. YAHNIOĞLU, Y. UÇAN

durumda sonlu eleman modellemesi 7497 düğüm noktası (nod) ve 22328 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir.

Ele alınan yapı elemanında  $u_1^{(m)}$ ,  $u_2^{(m)}$  ve  $u_3^{(m)}$  ( $m=1,2$ ) sırasıyla  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  ve  $Ox_3$  doğrultularındaki yer değiştirmeleri göstermek üzere, bu değerlerin boyutsuz ifadeleri;

$$u_3 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_{44}^{PZT} u_3^{(1)}}{p\gamma_{31} \ell_1} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_I \\ \frac{c_{44}^{PZT} u_3^{(2)}}{p\gamma_{31} \ell_1} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{II} \end{array} \right\}, \quad u_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_{44}^{PZT} u_i^{(1)}}{p\ell_1} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_I \\ \frac{c_{44}^{PZT} u_i^{(2)}}{p\ell_1} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{II} \end{array} \right\}, \quad i=1,2 \quad (12)$$

dir. (12)'de  $p$  kalın plağa etki eden düzgün yayılı çekme kuvvetinin yoğunluğu,  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  için  $\ell_1$  ( $\ell_3$ ) kalın plağın  $Ox_1$  ( $Ox_3$ ) doğrultusundaki uzunluğunu göstermektedir. Hesaplamalarda matris malzemesine ait Elastisite Modülü  $E^{(1)}/c_{44}^{PZT} = 1$  ve Poisson oranı  $\nu^{(1)} = 0.3$  olarak alınmış olup diğer parametre değerleri tablo ve grafikler üzerinde verilmiştir.

**Tablo 1.** Piezoelektrik Malzeme Sabitleri [6].

Malzeme	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$c_{66}$
PZT-4	13.9	7.78	7.40	11.5	2.56	3.06
PZT-5H	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35
BaTiO <sub>3</sub>	15.0	6.53	6.62	14.6	4.39	4.24
$\times 10^{10} \text{ N/m}^2$						

Malzeme	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{33}$
PZT-4	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562
PZT-5H	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
BaTiO <sub>3</sub>	-4.3	17.5	11.4	0.987	1.116
$C/m^2$				$\times 10^{-8} \text{ C/Vm}$	

Ayrıca (12)'de verilen yer değiştirmeler, şekiller üzerinde  $u = u_1$ ,  $v = u_2$ ,  $w = u_3$  olarak gösterilmiştir.

Sayısal hesaplarda kullanılan piezoelektrik dolgu malzemesi için malzeme sabitleri, Tablo 1'de verilmektedir. Bu çalışmada piezoelektrik malzeme sabitlerinin değerleri için boyutsuzlaştırma işlemleri neticesinde, ilgili büyüklüklerin boyutsuz ifadeleri

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi e_{15}}{c_{44}^{PZT} \ell_1}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{c_{44}^{PZT} \epsilon_{ij}}{(e_{15})^2}, \quad \tilde{E}_i = \frac{E_i e_{15}}{c_{44}^{PZT}}. \quad (13)$$

olarak belirlenmiştir. Belirtelim ki, yapılan tüm sayısal hesaplarda PZT malzeme için polarizasyon yönü  $Ox_2$  olarak alınmıştır. Bu durumda (4) de verilen matrisler

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}^{(2)} \quad c_{13}^{(1)} \quad c_{12}^{(1)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ c_{13}^{(1)} \quad c_{33}^{(1)} \quad c_{13}^{(1)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ c_{12}^{(1)} \quad c_{13}^{(1)} \quad c_{11}^{(1)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{44}^{(1)} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{66}^{(1)} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{44}^{(1)} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{15} \\ e_{31} \quad e_{33} \quad e_{31} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad e_{15} \quad 0 \quad 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad \epsilon_{33} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \epsilon_{11} \end{array} \right\} \quad (14)$$

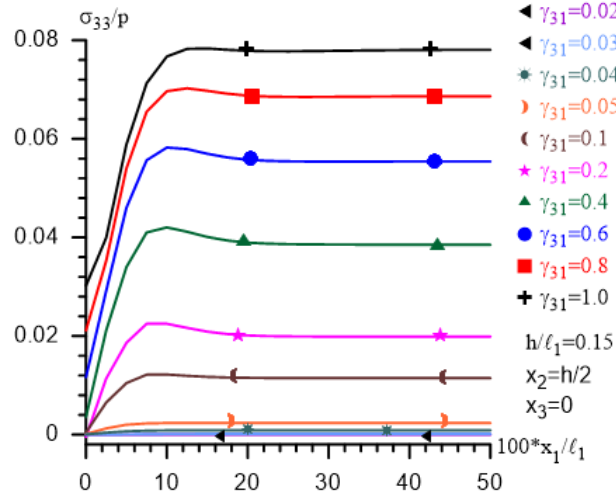
*PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ*

olur. Aşağıda, ele alınan yükleme durumu için PZT dikdörtgen prizmatik dolgu içeren dikdörtgen plakta oluşan yer değiştirme ve elektriksel potansiyel yayılımına ait bulunan sayısal sonuçlar incelenecektir. Bu yer değiştirme yayılımına, elektriksel alan ile mekaniksel alanın karşılıklı etkileşiminden doğan etkiyi belirlemek için iki durum göz önüne alınmıştır:

**Durum 1:**  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} = 0$  (elastik dolgu durumu) ve **Durum 2:**  $\epsilon_{ij} \neq 0$ ;  $\epsilon_{ij} \neq 0$  (PZT dolgu durumu)

Durum 1, dikdörtgen plağın içerdiği PZT dolgu malzemesi için piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alınarak, PZT dolgunun piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin ihmal edilmesine (yani, elastik dolgu); Durum 2, dikdörtgen dolgu malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin muhafaza edilmesine (yani, PZT dolgu) karşı gelmektedir. Bu iki durum için elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılmasından, dikdörtgen kalın plakta elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin, verilen yükleme durumu için ele alınan plağın elektro-statik analizine etkisi belirlenecektir.

Şekil 3’de homojen izotrop malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta, farklı  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  parametre değerlerinde  $\sigma_{33}/p$  gerilmesi yayılımı  $x_3 = 0$  ve  $x_2 = h/2$  kesitinde incelenmiştir.  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  parametresinin değeri küçüldükçe, plağın belirtilen eksen doğrultusundaki uzunluğu küçülerek düzlem gerilme varsayımı koşulları elde edilmektedir. Bu varsayım gereği,  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  azaldıkça,  $\sigma_{33}/p$  gerilme değerleri sıfıra yaklaşmalıdır. Şekil 3’de  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  değerinin azalması gerilme değerini mutlak değerce azaltmakta ve düzlem gerilme durumunda elde edilmesi gereken gerilme değerine yakınsamaktadır. Bu durum ve burada verilmeyen pek çok sayısal doğrulamalar neticesinde, tarafımızdan oluşturulan algoritma ve programlara güven sağlamıştır.

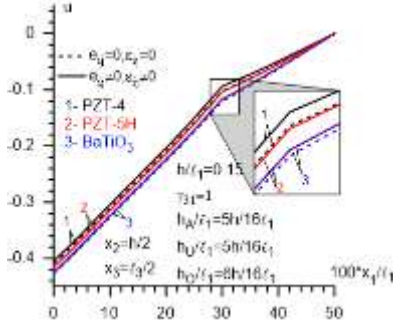


**Şekil 3.** Eksenel çekme kuvveti etkisindeki homojen-izotrop plakta  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = h/2$  kesitinde  $\sigma_{33}/p$  gerilme yayılımına  $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$  değişiminin etkisi.

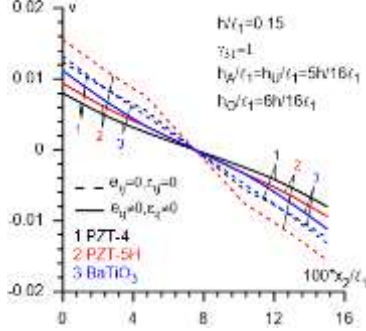
Şekil 4’ de plağın yapısında farklı PZT dolgu malzemesi alınması durumunda  $x_2 = h/2$  ve  $x_3 = \ell_3/2$  kesitlerinde u yer değiştirmesinin  $Ox_1$  eksenini boyunca değişimi, Durum 1 ve Durum 2 için incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlara göre Durum 2 ( $\epsilon_{ij} \neq 0$ ;  $\epsilon_{ij} \neq 0$ ) için elde edilen u yer değiştirmesinin değerlerinin, Durum 1 ( $\epsilon_{ij} = 0$ ;  $\epsilon_{ij} = 0$ ) için elde edilen değerlerden mutlak değerce küçük kaldığı ve bu farkın, dolgu malzemesinin BaTiO3 olması durumunda, en az olduğu tespit edilmiştir.

Şekil 5’ de plağın yapısında farklı PZT dolgu malzemesi alınması durumunda  $x_1 = \ell_E + \ell_D/2$  ve  $x_3 = \ell_3/2$  kesitlerinde v yer değiştirmesinin  $Ox_2$  eksenini boyunca değişimi, Durum 1 ve Durum 2 için incelenmiştir. Bu grafikte verilen sayısal sonuçlara göre Durum 2 ( $\epsilon_{ij} \neq 0$ ;  $\epsilon_{ij} \neq 0$ ) için elde edilen v yer değiştirmesinin

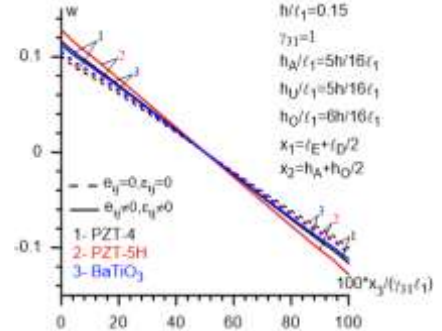
değerleri, Durum 1 ( $\epsilon_{ij} = 0; \epsilon_{ij} = 0$ ) için elde edilen değerlerden her zaman mutlak değerce küçük kaldığı tespit edilmiştir.



Şekil 4.  $u$  ( $= c_{44}^{PZT} u_1 / p l_1$ ) yer değiştirmesinin farklı PZT dolgu malzemeleri için  $x_1 / l_1$ 'e göre grafiği.



Şekil 5.  $v$  ( $= c_{44}^{PZT} u_2 / p l_1$ ) yer değiştirmesinin farklı PZT dolgu malzemeleri için  $x_2 / l_1$ 'e göre grafiği.

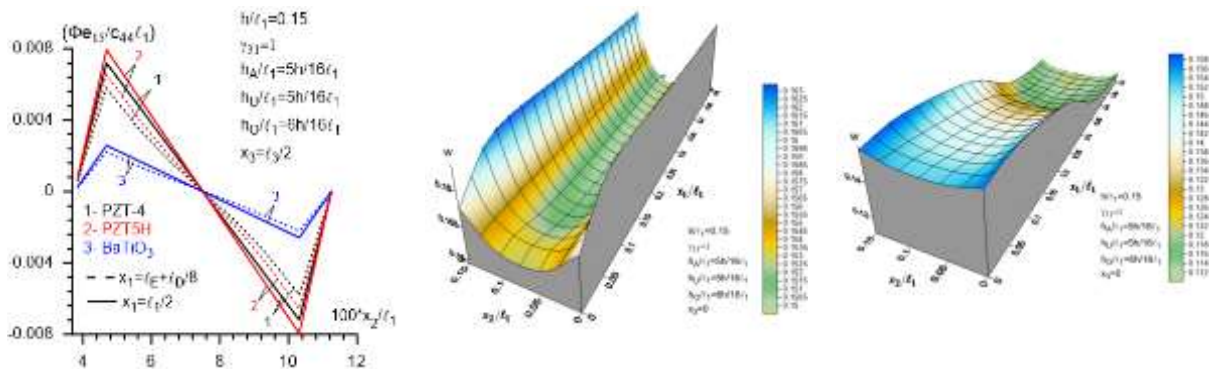


Şekil 6.  $w$  ( $= c_{44}^{PZT} u_3 / p \gamma_{31} l_1$ ) yer değiştirmesinin farklı PZT dolgu malzemeleri için  $x_3 / l_1$ 'e göre grafiği.

Şekil 6' da ele alınan dolgu malzemesinin farklı piezoelektrik malzemeden oluşması durumunda  $x_1 = l_E + l_D / 2$  ve  $x_2 = h_A + h_O / 2$  kesitinde  $w$  yer değiştirmesinin  $Ox_3$  eksenı boyunca değışimi Durum 1 ve 2 için incelenmiştir. Verilen sayısal sonuçlara göre Durum 2 için elde edilen  $w$  yer değıştirmesinin değeri, Durum 1'de elde edilen değeri her zaman mutlak değerce büyük olduğu tespit edilmiştir.

Şekil 7'de dikdörtgen plakta bulunan dolgu malzemesinin farklı PZT seçilmesi durumlarında  $x_3 = l_3 / 2$  ve  $x_1 = l_E + l_D / 8$  ile  $x_1 = l_1 / 2 = l_E + l_D$  kesitlerinde elektriksel potansiyelin ( $\tilde{\phi}$ )  $Ox_2$  eksenı boyunca değışimi incelenmiştir. Şekil 7'de verilen grafiklerden, yapıdaki dolgu malzemesinin PZT5H ( $BaTiO_3$ ) alınması durumunda, mutlak değerce en büyük (en küçük) elektrik potansiyel değeri bulunmaktadır. Ayrıca, her bir piezoelektrik dolgu için elektrik potansiyelin  $x_1 = l_1 / 2$  kesitinde elde edilen değeri,  $x_1 = l_E + l_D / 8$  kesitinde elde edilen değeri her zaman mutlak değerce daha büyük olduğu görülmektedir.

Şekil 8 (Şekil 9)'da dikdörtgen prizmatik dolgunun elastik (PZT) dolgu malzemesi içermesi durumunda  $w$  ( $= c_{44}^{PZT} u_3 / p \gamma_{31} l_1$ ) yer değıştirmesinin plağın ön yüzünde ( $x_3 = 0$  düzleminde) yayılımı verilmiştir. Buna göre yapı içerisindeki dolgu malzemesi PZT seçildiğinde elde edilen  $w$  yer değıştirmeleri (Şekil 9), dolgu malzemesinin elastik malzeme olarak alındığında bulunan  $w$  yer değıştirmelerinden (Şekil 8) küçük kaldığı ve yapı içerisinde  $Ox_1$  doğrultusunda  $w$  yer değıştirmesinin sayısal değeri %20 civarında küçülttüğu tespit edilmiştir.



Şekil 7.  $\tilde{\phi}$  ( $= \frac{\phi_{e15}}{c_{44} l_1}$ )'nin farklı



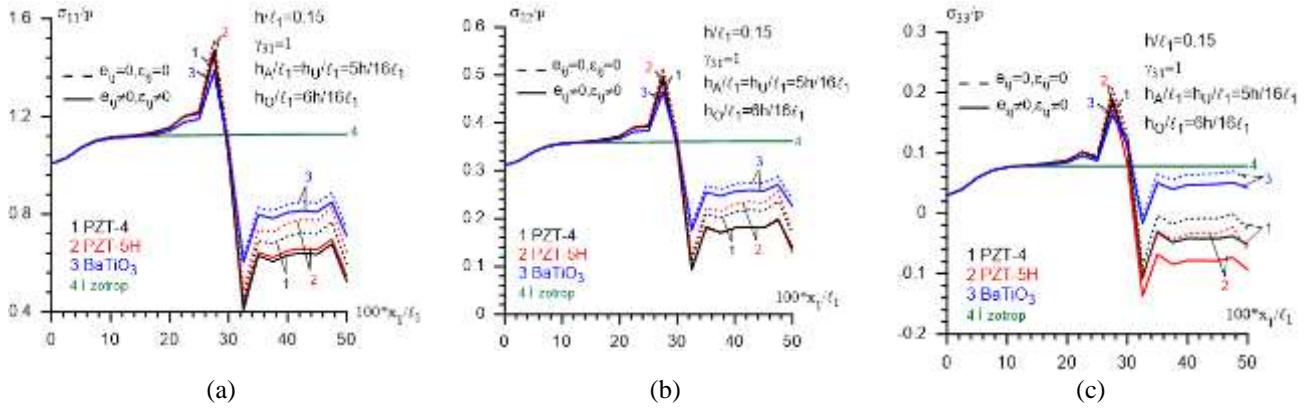
**PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ**

PZT dolgu malzemeleri için bazı kesitlerde  $x_2 / \ell_1$ 'e göre dağılımı.

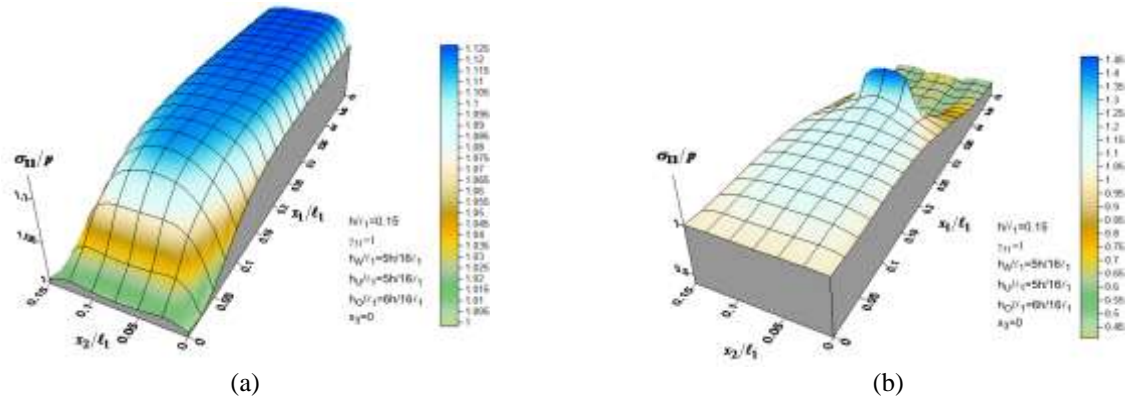
**Şekil 8.**  $w \left( = \frac{C_{44}^{PZT} u_3}{PY_{31} \ell_1} \right)$  yer değiştirmesinin elastik dolgu malzemesi için  $x_3 = 0$  yüzeyindeki yayılımı.

**Şekil 9.**  $w \left( = \frac{C_{44}^{PZT} u_3}{PY_{31} \ell_1} \right)$  yer değiştirmesinin BaTiO<sub>3</sub> dolgu malzemesi için  $x_3 = 0$  yüzeyindeki yayılımı.

Şekil 10' da ele alınan plaktaki dolgu malzemesinin farklı piezoelektrik malzemedan oluşması durumlarında  $x_3 = 0, x_2 = h / 2$  kesitinde sırasıyla (a)  $\sigma_{11} / p$ ; (b)  $\sigma_{22} / p$ ; (c)  $\sigma_{33} / p$  normal gerilme yayımlarının Ox<sub>1</sub> eksenı boyunca değışimi Durum 1 ve 2 için incelenmiştir. En düşük normal gerilme değeri dolgu malzemesinin BaTiO<sub>3</sub> seçilmesi durumunda oluşurken, Durum 2 ( $e_{ij} \neq 0; \epsilon_{ij} \neq 0$ ) için elde edilen normal gerilme değeri; Durum 1 ( $e_{ij} = 0; \epsilon_{ij} = 0$ ) için elde edilen değere göre küçük kaldığı tespit edilmiştir.



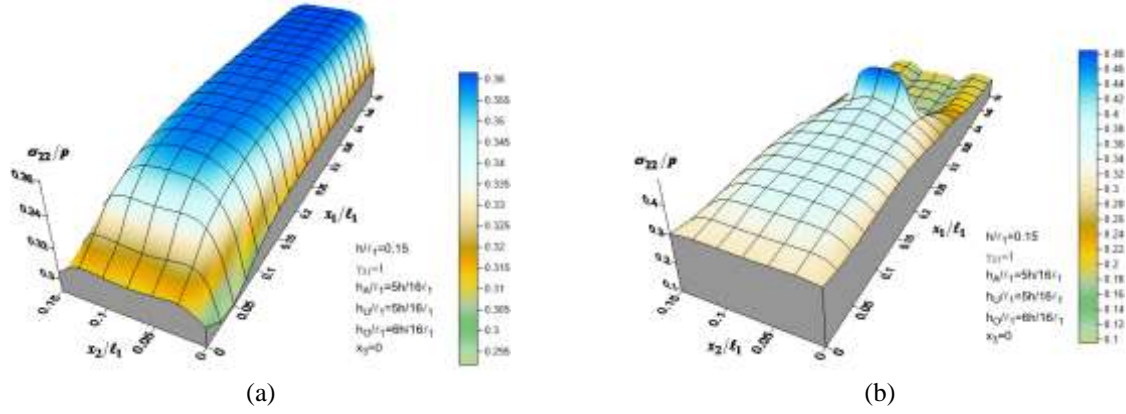
**Şekil 10.** Farklı PZT dolgu için  $x_3 = 0, x_2 = h / 2$  kesitinde (a)  $\sigma_{11} / p$ ; (b)  $\sigma_{22} / p$ ; (c)  $\sigma_{33} / p$  gerilme yayımlarının Durum 1 ( $e_{ij} = 0; \epsilon_{ij} = 0$ ) ve Durum 2 ( $e_{ij} \neq 0; \epsilon_{ij} \neq 0$ ) için  $x_1 / \ell_1$ 'e göre dağılımı.



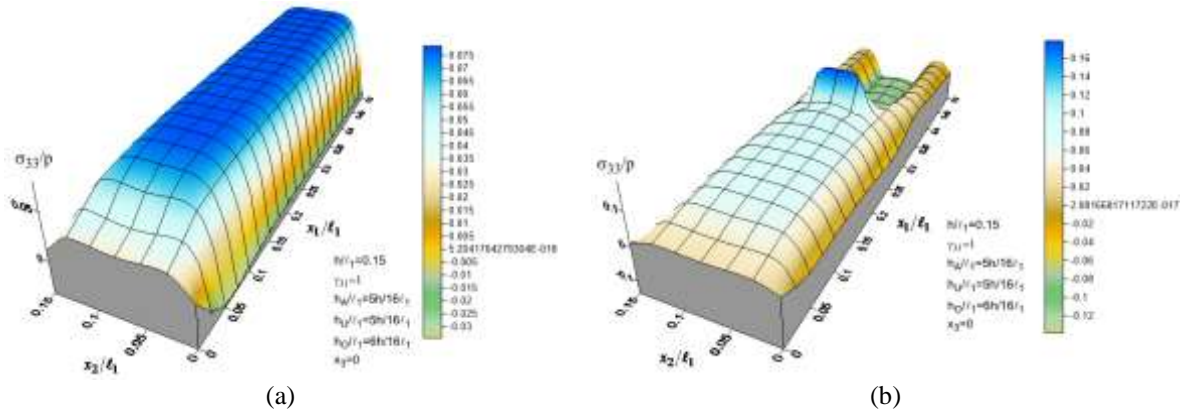
**Şekil 11.**  $\sigma_{11}/p$  gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) İzotrop dolgu (b) PZT-4 dolgu

Şekil 11, Şekil 12 ve Şekil 13'de sırasıyla  $\sigma_{11}/p, \sigma_{22}/p$  ve  $\sigma_{33}/p$  gerilmelerinin, ele alınan plağın içerdiği dikdörtgen prizmatik dolgunun malzemesinin sırasıyla (a) Elastik ve (b) PZT olması durumlarında, plağın önyüzündeki yayılımı verilmiştir. Buna göre elastik malzeme olması durumunda gerilme değeri bölge içerisinde hemen hemen sabit olmakla beraber, dolgu malzemesinin PZT-4 (Şekil 11) (PZT-5H (Şekil 12 ve Şekil 13)) olması durumunda dolgunun başladığı kesitte  $\sigma_{11}/p$  ( $\sigma_{22}/p$  ve  $\sigma_{33}/p$ ) gerilme yığılmasına sebep olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Şekil 11-Şekil 13 için (a) ve (b) kısımlarında verilen gerilme değeri

kıyaslandığında yapıda PZT dolgunun olması, gerilme değerinde ortalama %45 civarında değişime neden olduğu tespit edilmiştir.



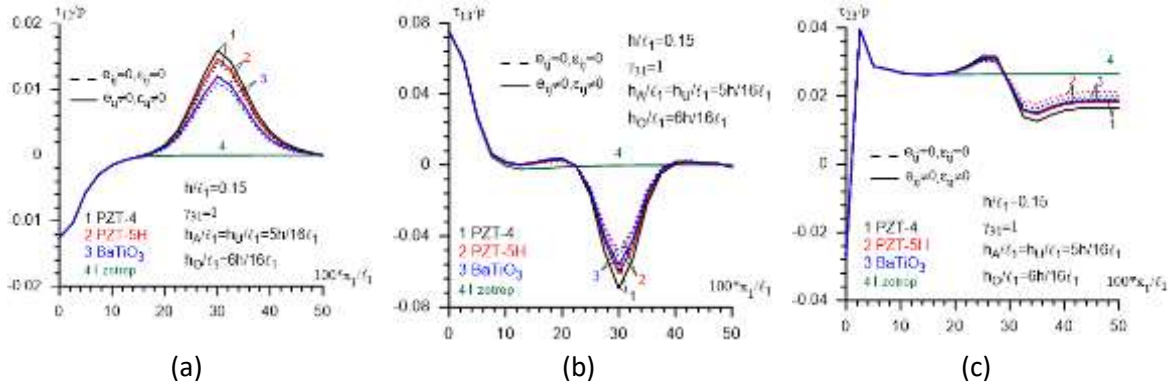
Şekil 12.  $\sigma_{22}/p$  gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) Elastik dolgu (b) PZT-5H dolgu malzemesi için.



Şekil 13.  $\sigma_{33}/p$  kayma gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) elastik dolgu (b) PZT-5H dolgu malzemesi için.

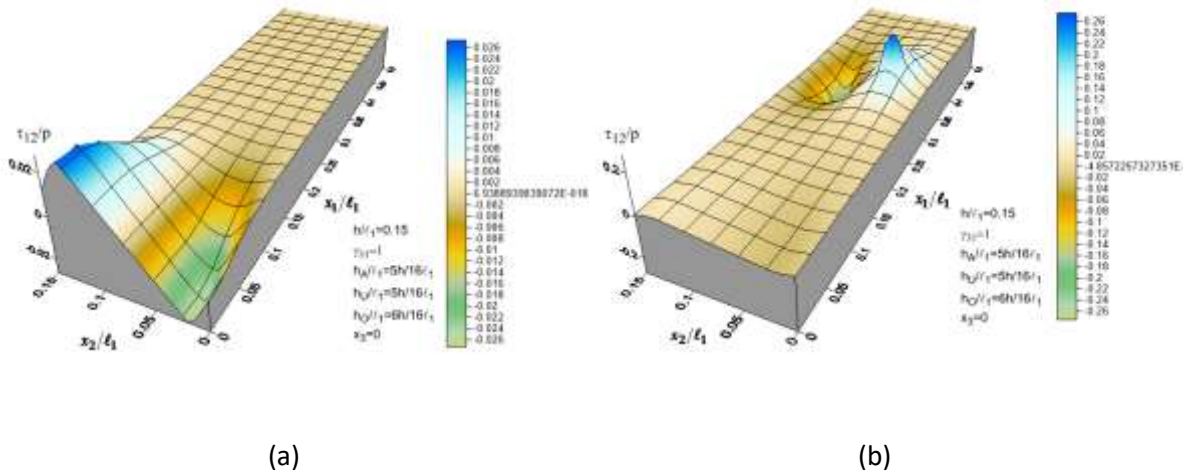
Şekil 14' de ele alınan plaktaki dolgu malzemesinin farklı piezoelektrik malzemeden oluşması durumlarında  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = 0$  kesitinde sırasıyla (a)  $\tau_{12}/p$ ; (b)  $\tau_{13}/p$ ; (c)  $\tau_{23}/p$  kayma gerilmelerinin  $Ox_1$  ekseninde boyunca değişimi Durum 1 ve Durum 2 için incelenmiştir. Tablo 1'de verilen PZT malzemeleri arasında yapıdaki dolgu malzemesinin PZT-4 olarak seçilmesi durumunda  $\tau_{12}/p$  ve  $\tau_{13}/p$  kayma gerilmelerinin sayısal değerlerinin mutlak değerce en büyük,  $\tau_{23}/p$  kayma gerilmesinin sayısal değerinin mutlak değerce en küçük olduğu tespit edilmiştir.

**PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ**



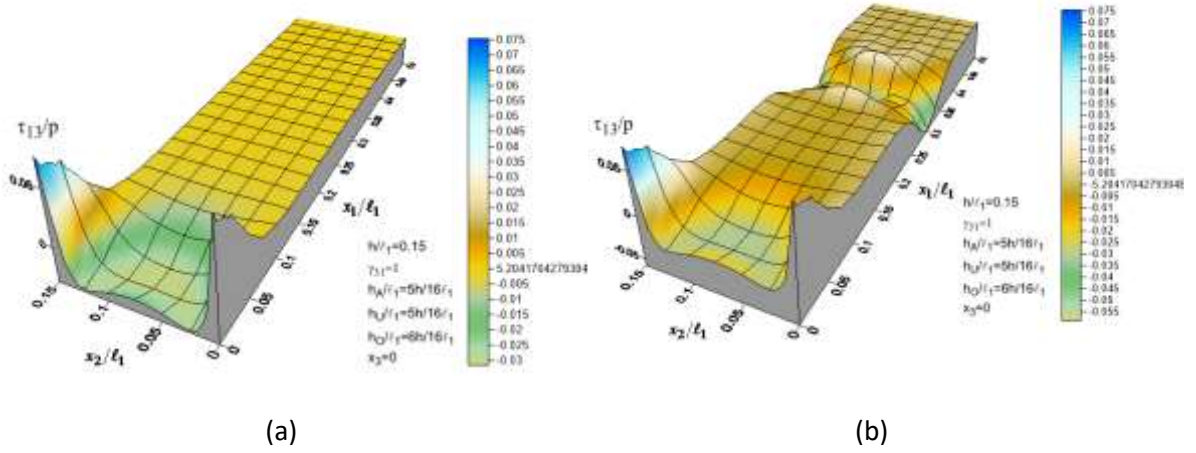
**Şekil 14.** Farklı PZT dolgu için  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = 0$  kesitinde (a)  $\tau_{12}/p$ ; (b)  $\tau_{13}/p$ ; (c)  $\tau_{23}/p$  kayma gerilme yayılımlarının Durum 1 ( $e_{ij} = 0$ ;  $\varepsilon_{ij} = 0$ ) ve Durum 2 ( $e_{ij} \neq 0$ ;  $\varepsilon_{ij} \neq 0$ ) için  $x_1/l_1$ 'e göre dağılımı.

Şekil 15-Şekil 17’de sırasıyla  $\tau_{12}/p$ ,  $\tau_{13}/p$  ve  $\tau_{23}/p$  kayma gerilmelerinin, plak içerisindeki dolgu malzemesinin (a) Elastik ve (b) PZT-5H olması durumlarında, plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı verilmiştir. Buna göre yapı içerisindeki dolgu malzemesinin elastik veya PZT seçilmesi tüm gerilme değerlerini önemli ölçüde etkilemekte ve dolgu sınırlarında gerilme yığılmalarına neden olmaktadır.

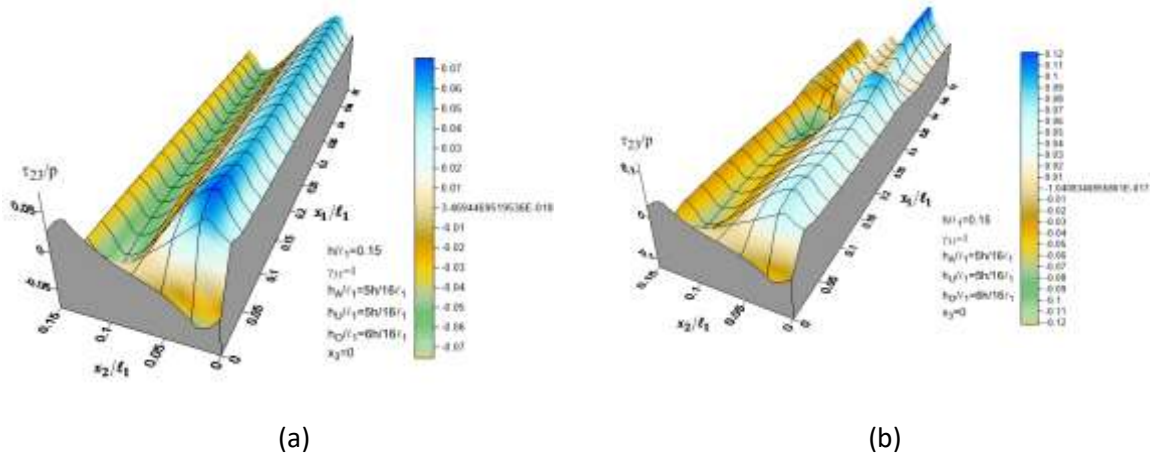


**Şekil 15.**  $\tau_{12}/p$  kayma gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) Elastik dolgu (b) PZT-5H dolgu malzemesi için.

Ü. BABUŞCU YEŞİL, N. YAHNİOĞLU, Y. UÇAN



Şekil 16.  $\tau_{13}/p$  kayma gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) Elastik dolgu (b) PZT-5H dolgu malzemesi için.



Şekil 17.  $\tau_{23}/p$  kayma gerilmesinin plağın önyüzündeki ( $x_3 = 0$ ) yayılımı (a) Elastik dolgu (b) PZT-5H dolgu malzemesi için.

Tablo 2’de BaTiO<sub>3</sub> dolgu malzemesi içeren dikdörtgen plakta ele alınan yükleme durumu için plağın önyüzünde seçilen bazı noktadaki gerilme tansörü bileşenleri verilmiştir. Bu yüzeyde en büyük gerilme bileşeni  $\sigma_{11}/p$  için elde edilmektedir.

**Tablo 2.** BaTiO<sub>3</sub> dolgu malzemesi içeren dikdörtgen plakta gerilme değerlerinin plağın önyüzünde ( $x_3 = 0$ ), bazı noktalardaki değerleri.

Gerilmeler	$x_1 = \ell_E/2$	$x_1 = \ell_E$	$x_1 = \ell_E + \frac{\ell_D}{4}$	$x_1 = \ell_E + \frac{\ell_D}{2}$	$x_1 = \frac{\ell_1}{2}$ $= \ell_E + \ell_D$
$\sigma_{11}/p$ ( $x_2 = h/2$ )	1.118950	1.070135	0.796745	0.806492	0.710725
$\sigma_{22}/p$ ( $x_2 = h/2$ )	0.359525	0.355803	0.254561	0.256504	0.225450
$\sigma_{33}/p$ ( $x_2 = h/2$ )	0.079465	0.114378	0.050146	0.046833	0.041962

*PİEZOELEKTRİK PRİZMATİK DOLGU İÇEREN DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN FEM İLE ELEKTRO-STATİK ANALİZİ*

$\tau_{12}/p$ ( $x_2 = 0$ )	$-2.6037 \cdot 10^{-4}$	$1.1955 \cdot 10^{-2}$	$7.5584 \cdot 10^{-3}$	$2.4112 \cdot 10^{-3}$	$5.5727 \cdot 10^{-8}$
$\tau_{13}/p$ ( $x_2 = 0$ )	0.001275	-0.056436	-0.016511	0.001619	-0.001211
$\tau_{23}/p$ ( $x_2 = 0$ )	0.026241	0.023402	0.015162	0.017947	0.018725

**4. SONUÇLAR**

Yapısında dikdörtgen prizmatik formda PZT malzemeden yapılmış dolgu içeren dikdörtgen kalın plağın, ele alınan yükleme durumu ile sınır ve temas koşulları için yapısında oluşan yer değiştirme ve gerilme yayılımlarına, plağa ait çeşitli malzeme ve geometrik parametreler ile elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkileşiminin etkileri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

1. Dikdörtgen dolgu malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin muhafaza edilmesi (Durum 2) durumunda elde edilen yer değiştirme veya gerilme değerleri, PZT dolgunun piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin ihmal edilmesi (Durum 1) için elde edilen uygun yer değiştirme veya gerilme değerlerinden her zaman mutlak değerce küçük kalmaktadır.
2. Dolgu malzemesinin seçimi (farklı PZT alınması), Durum 1 ve Durum 2 için elde edilen yer değiştirme veya gerilme yayılımları arasındaki farkı değiştirmektedir. Örneğin, Tablo 1 de verilen malzemeler arasında, dolgu malzemesinin BaTiO<sub>3</sub> seçilmesi sonucunda bulunan yer değiştirmeler için Durum 1 ve Durum 2 için elde edilen sayısal sonuçlar arasındaki fark en azdır.
3. Tablo 1'de verilen PZT'ler arasında, dolgu malzemesinin PZT5H (BaTiO<sub>3</sub>) alınması durumunda bulunan elektriksel potansiyel değerleri, mutlak değerce en büyük (en küçük) olmaktadır.
4. Mutlak değerce en düşük normal gerilme değerleri dolgu malzemesi BaTiO<sub>3</sub> seçilmesi durumunda elde edilmiştir.
5.  $\tau_{12}/p$  ve  $\tau_{13}/p$  kayma gerilmeleri için dikdörtgen dolgu malzemesinin Tablo 1'de verilen PZT'ler arasında PZT-4 seçilmesi durumunda en büyük kayma gerilmeleri oluşurken,  $\tau_{23}/p$  kayma gerilmesinin değerleri ise en küçük olmaktadır.
6. Yapıda PZT dolgu olması, gerilme değerlerinde ortalama %45 (Şekil 11-Şekil 13), yer değiştirme değerlerinde ise ortalama %20 (Şekil 8 ve Şekil 9) değişime neden olmaktadır.

**TEŞEKKÜR**

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün FBA-2018-3255 kodlu projesi ile desteklenmiştir.

**KAYNAKLAR**

- [1] YANG, B.H., GAO, C.F., "Plane problems of multiple piezoelectric inclusions in a non-piezoelectric matrix", International Journal of Engineering Science, 48, 518-528, 2010.
- [2] FAN, H., QIN, S., "A piezoelectric sensor embedded in a non-piezoelectric matrix", International Journal of Engineering Science, 33 (3), 379-388, 1995.
- [3] XIAO, Z.M., BAI, J., "On piezoelectric inhomogeneity related problem- part I: a close-form solution for the stress field outside a circular piezoelectric inhomogeneity", International Journal of Engineering Science, 37, 945-959, 1999.
- [4] WANG, B., "Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material", International Journal Solids Structures, 29 (3), 293-308, 1992.
- [5] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems 1, (4th ed.), Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.
- [6] YANG, J., An Introduction to The Theory of Piezoelectricity, Springer, 2005.