ÖHÜ Müh. Bilim. Derg. / OHU J. Eng. Sci.

ISSN: 2564-6605
doi: 10.28948/ngumuh.621183

Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 8, Sayı 3, (2019), 030-036
Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences, Volume 8, Issue 3, (2019), 030-036

21. Ulusal Mekanik Kongresi Özel Sayısı
21st National Mechanics Congress Special Issue

Araştırma / Research

ÇİFT YÖNLÜ FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEMELİ TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Timuçin Alp ASLAN (ORCID: 0000-0002-7558-3568)[1*]
Ahmad Reshad NOORI (ORCID: 0000-0001-6232-6303)[2]
Beytullah TEMEL (ORCID:0000-0002-1673-280X)[1]

[1]*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana. Türkiye*
[2]*İstanbul Gelişim Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye*

Geliş / Received: *17.09.2019*
Kabul / Accepted: *20.11.2019*

ÖZ

Bu çalışmada, çift yönlü fonksiyonel derecelenmiş malzemeden (FDM) yapılmış doğru eksenli kirişlerin serbest titreşim analizi frekans uzayında incelenmiştir. FDM çubukları idare eden denklemler birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı minimum toplam enerji prensibi yardımıyla elde edilmiştir. Temel denklemler, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Kanonik halde elde edilen bu denklemler, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Problemin serbest titreşim analizi için, Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programın doğruluğu, bu çalışmanın sonuçları ve literatürdeki mevcut sonuçların karşılaştırılması ile gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelenmiş malzeme, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, serbest titreşim analizi

FREE VIBRATION ANALYSIS OF BI-DIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS TIMOSHENKO'S BEAMS

ABSTRACT

In this study, free vibration analysis of straight axis beams made of bi-directional functionally graded material (FGM) has been investigated in frequency space. The governing equations of FGM beams are obtained with the help of the principle of minimum total energy based on the first-order shear deformation theory (FSDT). The basic equations are converted to a set of ordinary differential equations (ODEs). These canonical equations are solved numerically by the Complementary Functions Method (CFM). For the free vibration analysis of the problem, a computer program is coded in Fortran. The validity of the written computer program has been shown by the comparison of the presented results with the available literature.

Keywords: functionally graded materials, complementary functions method, free vibration analysis

*Corresponding author / Sorumlu yazar. Tel.:05318563056; e-mail / e-posta:taslan@cu.edu.tr

1. GİRİŞ

FDM’ler, iki veya daha fazla farklı malzemelerin karışımı ile daha dayanıklı malzeme oluşturulması için bir yapı içerisinde kademeli olarak değişmesiyle oluşturulan malzemedir. FDM'ler havacılık, tıp, savunma, enerji alanlarında ve önemli endüstri kollarında yaygın bir yapı elemanı olarak kullanılmaktadır. Bu tür yapıların serbest titreşim ve dinamik davranışı önemli bir mühendislik problemi haline gelmiştir. Bu nedenle konuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Qian ve Ching [1], çift yönlü FD konsol kirişlerin serbest titreşim frekanslarını, ağsız yerel Petrov-Galerkın yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Goupee ve Vel [2], malzeme dağılımlarını çift yönlü düzenleyerek optimize eden elemansız Galerkin yöntemiyle FD kirişlerin serbest titreşim frekanslarını elde etmişlerdir. Aydoğdu ve Taşkın [3], basit mesnetli FDM kirişin serbest titreşim frekanslarını çeşitli yüksek mertebe ve klasik kiriş teorilerini kullanarak hesaplamışlardır. Hareket denklemleri Hamilton prensibi ile elde etmişler ve Navier tipi çözüm yöntemini kullanarak kirişin doğal frekanslarını bulmuşlardır. Lu ve ark. [4] çalışmalarında, diferansiyel quadrature metodunu kullanarak farklı sınır şartları için çift yönlü FDM’li kirişlerin yarı analitik çözümlerini sunmuşlardır. Sina ve ark.[5], geleneksel birinci mertebeden kayma deformasyon teorisinden farklı yeni bir kiriş teorisi kullanarak, FD kirişlerin serbest titreşim frekanslarını hesaplamışlardır. Pradhan ve Chakraverty [6] ise analizlerini, klasik ve birinci dereceden kayma deformasyon kiriş teorilerine dayandırmaktadırlar. Kalınlık boyunca malzeme özellikleri değişen kiriş kesitlerinin yer değiştirme bileşenlerini gösteren deneme fonksiyonlarını, basit cebirsel polinom formlarında ifade etmişler ve temel denklemleri Rayleigh-Ritz metodu ile elde etmişlerdir. Şimşek [7], çeşitli sınır koşullarında FDM Timoshenko kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Timoshenko kiriş teorisine ve Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan Lagrange denklemleri ile türettiği hareket denklemlerini Newmark-β yöntemiyle çözmüştür. Nguyen ve ark. [8], eksenel yüklü kirişlerin statik ve serbest titreşimleri için birinci mertebe kayma deformasyon çubuk teorisini geliştirmişlerdir. Hareket denklemleri Hamilton ilkesinden türetilmiş ve basit mesnetli fonksiyonel olarak derecelenmiş kirişler için denklemlerin analitik çözümlerini sunmuşlardır. Wang ve ark. [9], çift yönlü FD kirişin, serbest titreşimi için teorik bir araştırma yapmışlardır. Sonuçlarda, malzeme özelliklerinin kiriş uzunluğu ve kalınlığındaki meydana getirdiği değişikliklerin doğal frekanslar üzerinde güçlü bir etkisi olduğunu göstermişlerdir. Turan ve Kahya [10] çalışmalarında, birinci mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı olarak FD kirişlerin doğal frekanslarını Navier çözüm yöntemi ile elde etmişlerdir. Hareket denklemlerini Lagrange eşitlikleri ile türetmişler, problemin çözümünde ise trigonometrik fonksiyonlar kullanmışlardır. Karamanlı [11], çift yönlü FD kirişlerin serbest titreşim analizini 3. mertebe kayma deformasyon teorisi ile yapmıştır. Diğer bir çalışmasında [12] ise, dört bilinmeyenli kayma ve normal deformasyon teorisini kullanarak çift yönlü FD kirişlerin serbest titreşim frekanslarını araştırmıştır.

Yapılan araştırmalarda, literatürde çift yönlü FD Timoshenko kiriş teorisine dayalı serbest titreşim analizleri yapan birçok farklı çalışma bulunduğu görülmüştür. Fakat doğru eksenli FD Timoshenko çubuklarının serbest titreşim davranışını TFY ile frekans uzayında inceleyen herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu çalışmada sunulan yöntemle bulunan çözümlerin doğruluğu, literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılarak gösterilecektir.

2. MATERYAL VE METOT

Şekil 1. Malzeme özelliklerinin kiriş boyunca çift yönlü değişimi

İki boyutlu doğru eksenli FDM çubukların (Şekil 1.) elastisite modülü, $E(x,z)$, kütlesel yoğunluğu, $\rho(x,z)$, ve kayma modülü gibi malzeme özelliklerinin çift yönlü olarak, aşağıdaki denklemde verildiği şekilde eksponansiyel olarak değiştiği kabul edilmektedir.

$$P(x,z) = P_{LB} e^{n_x\left(\frac{x}{L}\right)+n_z\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)} \tag{1}$$

Burada $P(x,z)$, malzeme özelliklerini ifade etmektedir. n_x ve n_z ise, malzemeye ait hacim oranının kiriş ekseni ve kalınlığı boyunca dağılımını belirleyen malzeme değişim katsayılarıdır. Birinci mertebe kayma deformasyonu teorisine göre $U_x$ve U_z eksenel ve düşey yer değiştirme, ε_x, x doğrultusundaki eksenel, γ_{xz} ise açısal şekil değiştirmeyi ifade etmekte olup, (2-4) denklemlerinde verilmektedir.

$$U_x = u(x,t) + z\,\theta(x,t)\,; \qquad U_z = w(x,t); \tag{2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\,\theta' \tag{3}$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \tag{4}$$

İç kuvvetler ve gerilmeler arasındaki ilişki, aşağıda integral formunda verilmektedir.

$$N_x = b\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\,dz = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(x,z)(\varepsilon_x)\,dz \tag{5}$$

$$M_x = b\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\,z\,dz = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(x,z)(\varepsilon_x)\,z\,dz \tag{6}$$

$$Q_z = b\int_{-h/2}^{+h/2} k_s\tau_{xz}\,dz = b\int_{-h/2}^{+h/2} k_s\frac{E(x,z)}{2(1+v)}\gamma_{xz}\,dz \tag{7}$$

FDM'li çubukların Toplam potansiyel enerjisi ve kinetik enerjisi,

$$\Pi_t = \int_0^l\int_A \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xz}\gamma_{xz}) - (p_x u + p_z w)\,dAdx \tag{8}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l\int_A \rho(x,z)\left(\dot{U_x}^2 + \dot{U_z}^2\right)\,dAdx \tag{9}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada, p_x ve p_z çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvetlerdir. ρ, kütlesel yoğunluğu, $\dot{U}_x$ ve $\dot{U}_z$ ise sırasıyla, kiriş üzerindeki bir noktanın hızının x ve z doğrultularındaki bileşenleridir. Sistemin Langrangianı, kinetik enerjiden potansiyel enerjiyi çıkararak elde edilmektedir.

$$L = T - \Pi_t \tag{10}$$

Hamilton Prensibi ise, Lagrangian'ın zamana göre integralinin varyasyonunu sıfır yapan varsayımdır.

$$\delta\int_{t0}^{t1} L\,dt = 0 \tag{11}$$

Gerekli büyüklüklerin impulsif bileşenleri ve türevleri bulunarak doğru eksenli FDM kirişlere ait kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A_{12}M_x - A_{22}N_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q_z}{b\ ks\ A_{33}} - \theta \tag{13}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-A_{11}M_x + A_{12}N_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{14}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -p_x + I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -p_z + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} = Q_z + I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{17}$$

Burada, $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{33}$ kesit rijitlik sabitleri, I_0, I_1, I_2 kütlesel atalet momentleridir.
Sistem hareket denklemlerinin (12-17) Laplace dönüşümü alınırsa, kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklem takımı haline dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında FDM'li çubukların davranışını ifade eden adi diferansiyel denklem takımı, kanonik formda aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{A_{12}\bar{M}_x - A_{22}\bar{N}_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{18}$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = \frac{\bar{Q}_z}{b\ ks\ A_{33}} - \bar{\theta} \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} = \frac{-A_{11}\bar{M}_x + A_{12}\bar{N}_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{20}$$

$$\frac{d\bar{N}_x}{dx} = -\bar{p}_x + I_0 s^2\bar{u} + I_1 s^2\bar{\theta} \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{Q}_z}{dx} = -\bar{p}_x + I_0 s^2\bar{w} \tag{22}$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = \bar{Q}_z + I_1 s^2\bar{u} + I_2 s^2\bar{\theta} \tag{23}$$

Burada $(\bar{.})$ ile gösterilen ifadeler büyüklüklerin Laplace Dönüşümünü göstermektedir. *s*, Laplace parametresi olup, kompleks bir sayıdır [13]. Serbest titreşim analizleri için Laplace parametresi 's', serbest titreşim parametresi, "$i\omega$" ile değiştirilmiştir. Doğal titreşim frekansları hesaplanırken dış yükler sıfır alınmaktadır. Katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler serbest titreşim frekanslarını vermektedir. Frekans uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler 5. mertebe RK5 algoritması kullanılarak TFY yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir [14],[15].

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, malzeme özellikleri eksponansiyel olarak değişen kirişlerin farklı sınır şartları ve farklı boy-kalınlık oranları için boyutsuz serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Frekans değeri aşağıdaki ifade ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_{LB}}{E_{LB}}}} \tag{24}$$

Ele alınan kirişin malzeme ve geometrik özellikleri şöyledir: elastisite modülü, $\boldsymbol{E_{LB} = 210GPa}$, yoğunluğu, $\boldsymbol{\rho_{LB} = 7850\ kg/m^3}$, Poisson oranı, ν=0.3; kesit genişliği, *b*= 0.5 *m*, yüksekliği, *h*=1 *m* olarak alınmıştır. Uygulamalarda kayma düzeltme faktörü, k_s = 5/6, olarak alınmıştır.

Çalışmada, ilk olarak farklı boy/kalınlık oranları için ankastre-ankastre (A-A) sınır şartlarına sahip çift yönlü FD kirişin boyutsuz frekansı incelenmiştir. Bu çalışmada bulunan boyutsuz frekanslar, literatürde verilen değerler ile tablo 1.-2. üzerinde karşılaştırılmıştır.

Tablo 1. Ankastre- Ankastre sınır şartları ve L/h=5 oranı için boyutsuz frekans değerleri

		Şimşek [7]	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**
		$\boldsymbol{n_z}$							
		0		**0.4**		**0.8**		**1**	
$\boldsymbol{n_x}$	**0**	5.1943	5.1946	5.1806	5.1811	5.1396	5.1410	5.1083	5.1113
	0.4	5.1982	5.1987	5.1845	5.1852	5.1435	5.1451	5.1123	5.1153
	0.8	5.2119	5.2110	5.1962	5.1975	5.1552	5.1573	5.1240	5.1275
	1	5.2197	5.2204	5.2060	5.2069	5.1650	5.1666	5.1337	5.1368

Tablolar incelendiğinde, FDM'li kirişler için bu çalışmada hesaplanan boyutsuz frekans değerlerinin literatür ile uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Ayrıca, eksenel yöndeki malzeme değişim katsayısı, $\boldsymbol{n_x}$'in kalınlık yönündeki malzeme değişim katsayısı, $\boldsymbol{n_z}$'ye göre boyutsuz frekans değerleri üzerinde daha etkili olduğu anlaşılmıştır. Diğer yandan L/h oranı arttıkça frekans değerlerinin arttığı görülmüştür.

Tablo 2. Ankastre- Ankastre sınır şartları ve L/h=20 oranı için boyutsuz frekans değerleri

		Şimşek [7]	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**	**Şimşek [7]**	**Bu çalışma**
		$\boldsymbol{n_z}$							
		0		**0.4**		**0.8**		**1**	
$\boldsymbol{n_x}$	**0**	6.3486	6.3495	6.3251	6.3250	6.2529	6.2529	6.2001	6.1999
	0.4	6.3564	6.3556	6.3310	6.3311	6.2587	6.2589	6.2060	6.2059
	0.8	6.3740	6.3740	6.3486	6.3495	6.2763	6.2771	6.2236	6.2239
	1	6.3876	6.3879	6.3623	6.3633	6.2900	6.2908	6.2373	6.2375

İlave olarak, farklı sınır şartları ve farklı boy/kalınlık oranları için FDM'li kirişin ilk beş boyutsuz frekans değeri hesaplanmıştır. Ankastre-Ankastre (A-A), Ankastre-Sabit (A-S), ve Ankastre-Serbest (A-Se) sınır şartları için elde edilen frekans değerleri sırasıyla Tablo 3.-5.'da verilmektedir.

Tablo 3. Ankastre-Ankastre sınır şartları için kirişin boyutsuz frekans değerleri

		L/h=5			**L/h=20**		
		$\boldsymbol{n_z}$					
		0	**0.5**	**1**	**0**	**0.5**	**1**
$\boldsymbol{n_x}$	**0**	5.1946	5.1736	5.1113	6.3495	6.3114	6.1999
		11.8905	11.8568	11.7564	17.1312	17.0326	16.7440
		15.7080	15.7080	15.7080	32.6816	32.5033	31.9802
		19.8165	19.7734	19.6448	52.3085	52.0403	51.2518
		28.3143	28.2655	28.1196	62.8319	62.8319	62.8319
	0.5	5.2010	5.1799	5.1176	6.3590	6.3209	6.2093
		11.8986	11.8648	11.7644	17.1437	17.0451	16.7563
		15.7576	15.7576	15.7576	32.6947	32.5164	31.9930
		19.8241	19.7810	19.6523	52.3215	52.0533	51.2646
		28.3213	28.2725	28.1264	63.0305	63.0305	63.0305
	1	5.2204	5.1993	5.1368	6.3879	6.3496	6.2375
		11.9228	11.8890	11.7882	17.1814	17.0826	16.7931
		15.9057	15.9057	15.9057	32.7340	32.5554	32.0316
		19.8469	19.8037	19.6747	52.3605	52.0921	51.3029

		28.3421	28.2933	28.1470	63.6226	63.6226	63.6226

Farklı sınır şartlarına ait tablolar (Tablo 3.-5.) incelendiğinde; en büyük boyutsuz doğal frekans değerinin A-A mesnetli kirişte, en küçük frekans değerinin ise A-Se mesnetli kirişte meydana geldiği görülmüştür. A-A mesnetli kirişte, $\boldsymbol{n_x}$ katsayısı artarken frekans değerinin arttığı ve $\boldsymbol{n_z}$ katsayısı artarken frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür. A-B ve A-S mesnetli kirişlerde ise, $\boldsymbol{n_x}$ve $\boldsymbol{n_z}$ katsayıları artarken frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür.

Tablo 4. Ankastre-Sabit sınır şartları için kirişin boyutsuz frekans

		L/h=5			**L/h=20**		
		$\boldsymbol{n_z}$					
		0	**0.5**	**1**	**0**	**0.5**	**1**
$\boldsymbol{n_x}$	**0**	3.8788	3.8644	3.8222	4.4068	4.3861	4.3257
		10.6456	10.6042	10.4822	14.0433	13.9653	13.7374
		15.7080	15.6683	15.5502	28.6158	28.4560	27.9884
		18.8203	18.7827	18.6720	47.5235	47.2588	46.4849
		27.6462	27.5801	27.3836	70.1204	69.8148	94.0236
	0.5	3.7413	3.7271	3.6857	4.2568	4.2364	4.1769
		10.5471	10.5051	10.3810	13.9125	13.8343	13.6058
		15.7576	15.7161	15.5921	28.4898	28.3296	27.8607
		18.7427	18.7064	18.5999	47.4020	47.1367	46.3609
		27.5895	27.5221	27.3221	70.0035	69.7009	93.9100
	1	3.6015	3.5876	3.5469	4.1084	4.0883	4.0296
		10.4593	10.4167	10.2911	13.8006	13.7222	13.4929
		15.9057	15.8615	15.7298	28.3863	28.2258	27.7558
		18.6761	18.6418	18.5411	47.3042	47.0388	46.2625
		27.5427	27.4742	27.2709	69.9101	69.6134	93.8198

Tablo 5. Ankastre-Serbest sınır şartları için kirişin boyutsuz frekans değerleri

		L/h=5			**L/h=20**		
		$\boldsymbol{n_z}$					
		0	**0,5**	**1**	**0**	**0,5**	**1**
$\boldsymbol{n_x}$	**0**	0.9843	0.9786	0.9617	1.0130	1.0067	0.9884
		5.3011	5.2782	5.2103	6.2742	6.2363	6.1255
		7.8540	7.8540	7.8540	17.2513	17.1507	16.8563
		12.6177	12.5767	12.4548	31.4159	31.4159	31.4159
		20.9483	20.8978	20.7473	32.9650	32.7821	32.2455
	0,5	0.8451	0.8401	0.8256	0.8673	0.8619	0.8463
		5.0450	5.0233	4.9591	5.9839	5.9478	5.8421
		7.0775	7.0775	7.0775	16.9835	16.8845	16.5947
		12.4153	12.3749	12.2552	28.3100	28.3100	28.3100
		20.7722	20.7224	20.5734	32.7046	32.5231	31.9908
	1	0.7221	0.7178	0.7054	0.7393	0.7348	0.7214
		4.7935	4.7731	4.7126	5.7039	5.6694	5.5688
		6.3414	6.3414	6.3414	16.7387	16.6412	16.3556
		12.2259	12.1863	12.0686	25.3656	25.3656	25.3656
		20.6089	20.5595	20.4122	32.4695	32.2893	31.7610

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı, çift yönlü FDM'li doğru eksenli çubukların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Frekans uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemlerin çözümleri, RK5 algoritmasına dayalı TFY ile yapılmaktadır. Ele alınan problemin boyutsuz frekansları literatürde verilen değerlerle karşılaştırılmış ve elde edilen frekansların literatür ile uyum içerisinde oldukları görülmüştür. Çalışmada ayrıca, malzeme değişim katsayılarının, farklı sınır şartları ve farklı boy/kalınlık oranlarının FDM'li çubukların doğal titreşim frekansları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Malzeme parametreleri, farklı sınır şartları ve farklı boy/kalınlık oranlarının kirişin doğal titreşim frekanslarını önemli ölçüde etkilediği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] QIAN, L. F., CHING, H.K., "Static and Dynamic Analysis of 2-D Functionally Graded Elasticity by Using Meshless Local Petrov-Galerkin Method", Journal of the Chinese Institute of Engineers, 27 (4), 491-503, 2004.

[2] GOUPEE, A. J., VEL S. S., "Optimization of Natural Frequencies of Bi-directional Functionally Graded Beams", Struct Multidisc Optim., 32, 473–484, 2006.

[3] AYDOGDU, M., TASKIN, V., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges", Materials & Design, 28(5), 1651-1656, 2007.

[4] LU, C. F., CHEN, W. Q., XU, R. Q., LIM, C.W., "Semi-Analytical Elasticity Solutions For Bi-Directional Functionally Graded Beams, International Journal of Solids and Structures, 45, 258–275, 2008.

[5] SINA, S. A., NAVAZI, H. M., H. HADDADPOUR, "An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams", Materials and Design, 30, 741-747, 2009.

[6] PRADHAN, K.K., CHAKRAVERTY, S., "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method", Composites: Part B, 51, 175–184, 2013.

[7] ŞİMŞEK, M. "Bi-Directional Functionally Graded Materials (BDFGMs) for Free and Forced Vibration of Timoshenko Beams with Various Boundary Conditions", Composite Structures, 133(1), 968-978, 2015.

[8] NGUYEN, T.K., VO. THUC, P., HUU-TAI THAI, "Static and Free Vibration Of Axially Loaded Functionally Graded Beams Based On The First-Order Shear Deformation Theory", Composites: Part B, 55, 147–157, 2013.

[9] WANG, Z-h., WANG, X-h., XU, G-d., CHENG, S. T., ZENG, "Free Vibration Of Two-Directional Functionally Graded Beams, Composite Structures", 135, 191-198, 2016.

[10] TURAN, M., KAHYA, V., "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi", Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 8(2), 119-130, 2018.

[11] KARAMANLI, A., "Free Vibration Analysis of Two Directional Functionally Graded Beams Using a Third Order Shear Deformation Theory", Composite Structures, 189, 127–136, 2018.

[12] KARAMANLI, A., "Free Vibration and Buckling Analysis of Two Directional Functionally Graded Beams Using a Four-Unknown Shear And Normal Deformable Beam Theory", Anadolu University Journal of Science and Technology A- Applied Sciences and Engineering, 19 (2), 375-406, 2018.

[13] ASLAN, T. A., NOORI, A.R., TEMEL, B., "Dynamic response of viscoelastic tapered cycloidal rods", Mechanics Research Communications, 92, 8–14, 2018.

[14] NOORI, A. R., ASLAN, T. A., TEMEL, B., "An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section", Composite Structures, 200 (15), 701-710, 2018.

[15] CHAPRA, C., CANALE, R. P., Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Applications. McGraw-Hill Books, 1998.