



FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

Abdullah AVEY (ORCID: 0000-0001-7678-6351)^{1,}**
Mustafa SÜZER (ORCID: 0000-0002-8578-7417)²

Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye
Burcu Mimarlık, Eskişehir Mahallesi 9528 sokak No 12/1 Manavgat/Antalya, Türkiye

Geliş / Received: 11.09.2019
Kabul / Accepted: 04.11.2019

ÖZ

Bu makalede, karma sınır koşulları altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden (FDM) oluşan silindirik kabukların (FDMSK'ların) dinamik tepkisi klasik kabuk teorisi (KKT) kapsamında incelenmektedir. FDM'lerin özellikleri tanımlanarak, Donnell kabuk teorisi kullanılarak temel bağıntılar ve temel denklemler türetilmektedir. Karma sınır koşulları için temel denklemlere Galerkin yöntemi uygulanarak, frekans için kapalı çözüm elde edilmektedir. Elde edilen ifade dalga sayılarına göre minimize edilerek, frekansın minimum değeri bulunmakta ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılarak doğruluğu kanıtlanmaktadır. FDM'lerin serbest titreşim frekansı üzerindeki etkileri sayısal olarak detaylı bir biçimde incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: FDM, silindirik kabuk, titreşim frekansı, karma sınır koşulları

THE INVESTIGATION OF DYNAMIC RESPONSE OF FGM CYLINDRICAL SHELLS IN MIXED BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT

In this paper, the dynamic response of cylindrical shells composed of functionally graded materials (FGMs) under mixed boundary conditions is examined within the context of classical shell theory (CST). The properties of FGMs are defined and then fundamental relations and governing equations are derived using Donnell shell theory. By applying the Galerkin method to the basic equations for mixed boundary conditions, a closed-form solution for the frequency is obtained. The obtained expression is minimized according to the wave numbers, the minimum value of the frequency is found and its accuracy is proved by comparing with the results in the literature. The effects of FGMs on the free frequency of the vibration frequency are investigated in detail.

Keywords: FGM, cylindrical shell, vibration frequency, mixed boundary conditions

* Corresponding author/Sorumlu yazar, Tel.: +90 5356254664, e-mail/e-posta: abdullahavey@sdu.edu.tr

1. GİRİŞ

Silindirik kabuklar birçok mühendislik uygulamasında örneğin, havacılık, nükleer reaktörler, petrokimyasallar, denizcilik endüstrisi, inşaat ve makine mühendisliğinde yapısal elemanlar olarak yaygın olarak kullanıldığından, onların stabilite ve titreşim davranışları uzun bir süredir incelenmektedir. Geçen yüzyılın sonunda fonksiyonel dereceli malzemeler (FDM'ler) yüksek sertlik, aşınma direnci, düşük sürtünme katsayısı, düşük ısı iletkenliği ve diğer mükemmel mekanik ve kimyasal özelliklerle üretilmiştir. Yeni nesil kompozit malzemelerin yapısal özelliklerine bağlı olarak derecelenebilir olması fikri ilk olarak [1] çalışmasında ortaya atılmış ve yerel özelliklerde ortaya çıkan değişimlerin malzemenin genel özelliklerini etkilediği gösterilmiştir. Bu dönemde teknolojinin seviyesi [1] çalışmasının sonuçlarını uygulanmasına olanak sağlamamıştır.

FDM'ler ilk olarak 1984 yılında bir grup Japon bilim adamı tarafından ısı kalkanları olarak geliştirilen farklı mekanik özelliklere sahip iki veya daha fazla malzemenin karışımından elde edilmiştir [2]. Bu çalışmayı takiben FDM'lerin özelliklerinin araştırılması birçok bilim insanı tarafından hayata geçirilmiştir [3]. Başlangıçta büyük sıcaklık değişikliklerine karşı termal koruma için geliştirilen bu yeni nesil kompozit malzemeler seramik ve metal karışımından oluşturularak, yüksek yapısal özellikler gerektiren çeşitli uygulamalar için kullanılmaktadır [4]. FDM'ler, çeşitli yöntemlerle üretilmektedir. Örneğin; Buhar biriktirme (PVD), Kimyasal buhar biriktirme (CVD), Plazma püskürtme, sıçratma, Darbeli lazer biriktirme (PLD), Sol-jel teknikleri vs [5]. FDM'lerin seri üretiminin yapılabilmesi için ilk önce bu malzemelerin özelliklerinin araştırılması doğrultusunda çalışmalar yapılmıştır. İlk çalışmalar, FDM'lerin termo-mekanik özelliklerinin araştırılmasına adanmıştır [6,7].

FDM'lerin seramik bileşenlerinin düşük ısı iletkenliklerinden dolayı yüksek termal dayanım gösterdiği, metal bileşenlerin ise yüksek viskozite nedeniyle kırılmayı önlediği görülmüştür. Bu üstün özellikler FDM'leri yeni nesil kompozitler arasında özgün kılmakta ve FDM silindirik kabukların günümüz teknolojisinde geniş kullanım alanına sahip olmasını sağlamaktadır. FDM'lerin termo-mekanik özellikleri incelendikten ve geleneksel malzemelere kıyasla önemli avantajlara sahip olduğu belirlendikten sonra bu tür malzemelerden oluşan yapı elemanlarının titreşim ve stabilite davranışları ile ilgili çalışmalar gündeme gelmiştir. FDMSK'ların titreşim ve stabilite problemlerinin çözümünde farklı kabuk teorileri ve çeşitli yöntemler kullanılarak çok sayıda çalışma yapılmıştır [8-12]. Bu çalışmaların yanı sıra farklı sınır koşullarının FDM kabukların titreşim problemlerine etkisinin araştırılmasına ait literatürde yeteri kadar çalışmalar mevcuttur [13-15].

Yaklaşım fonksiyonun matematiksel olarak tanımlanmasında ortaya çıkan zorluklardan dolayı karma sınır koşulları altında FDMSK'ların titreşimi konusunda sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu Sofiyev ve meslektaşlarına aittir [16-19]. Bu faktörler FDMSK'ların dinamik tepkisinin yeniden ele alınmasını ve karma sınır koşullarında yeni ve özgün çözüm yöntemleri geliştirmesini talep etmektedir. FDMSK'ların karma sınır koşullarında yeni ve özgün sayısal hesaplarının yapılması bu tür yapı elemanlarının güvenilirliği ve emniyeti açısından önemlidir.

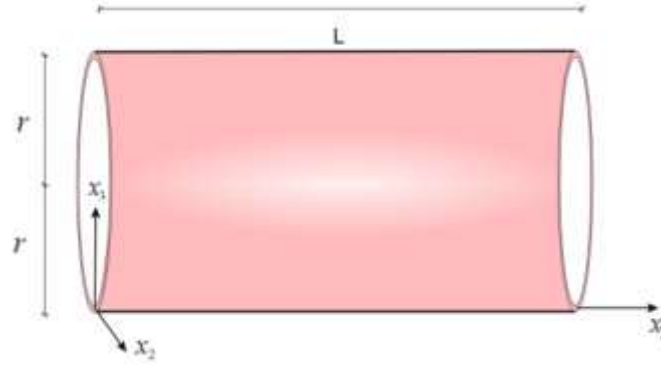
Bu makalede, FDMSK'ların titreşim problemi karma sınır koşulları için klasik kabuk teorisi kullanılarak incelenmektedir.

2. MATERYAL METOT

2. 1. Temel bağıntılar

Şekil 1' de uzunluğu L , yarıçapı r ve kalınlığı h olan fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabuk ele alınmaktadır. FDMSK'da eğrisel koordinat sistemi sol uçta referans yüzeyinde bulunmakta, x_1 ve x_2 eksenleri sırasıyla uzunluk ve dairesel doğrultularda ve x_3 eksenini onların bulunduğu yüzeye dik doğrultudadır ve içe doğru yönelmektedir (Şekil 1).

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukta koordinat sistemi ve notlar

Fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukların özellikleri aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır [18-21]:

$$F_f = F_0 (F_1 T^{-1} + 1 + T F_1 + T^2 F_2 + T^3 F_3) \quad (1)$$

Burada F_j , $j = -1, 0, \dots, 3$ olup, T (K) sıcaklık katsayılarıdır ve bileşen malzemelere özgüdür.

FDM'lerin F genel malzeme özelliği, F_1 ve F_2 sırasıyla metal ve seramiğin özellikleri olup etkin özellikler için şu bağıntı kullanılmaktadır:

$$F = F_1 V_1 + F_2 V_2 \quad (2)$$

Burada V_1 ve V_2 metal ve seramik fazlarının hacim kesirleri olup aşağıdaki bağıntı sağlanmaktadır:

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (3)$$

Seramik fazın hacim kesir fonksiyonu kuvvet kuralına tabidir ve matematiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir [7,18,19]:

1. Kuvvet kuralı $V_2 = (X_3 + 0.5)^d, d \geq 0 \quad (4)$

2. Ters kuadratik fonksiyon $V_2 = 1 - (0.5 - X_3)^2 \quad (5)$

Burada d , FDM'nin kalınlık yönü boyunca değişim profilini belirlemekte olup pozitif bir sayıdır.

Yukarıda belirtilen karışım kuralına dayanarak, FDM'lerin etkin malzeme özellikleri kalınlık koordinatının bir fonksiyonu olarak aşağıdaki biçimde matematiksel olarak modellenmektedir [6,18,19]:

$$E_f = (E_1 - E_2)V_2 + E_2, \quad \nu_f = (\nu_1 - \nu_2)V_2 + \nu_2, \quad \rho_f = (\rho_1 - \rho_2)V_2 + \rho_2 \quad (6)$$

Burada E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 ve ρ_1 , ρ_2 , sırasıyla FDM'lerin metal ve seramik yüzeylerinin Young modülleri, Poisson oranları ve yoğunluklarıdır.

2.2. Temel denklemlerinin türetilmesi

FDMSK'lar için stabilite ve deformasyon uygunluk denklemleri küçük yer değiştirmeler teorisi kullanılarak, yani $u_3 \ll h$ eşitsizliği kullanılarak elde edilmektedir, yani Kirchhoff-Love varsayımı geçerlidir. FDMSK'ların gerilme-deformasyon ilişkileri KKT bağlamında aşağıdaki biçimde ifade edilebilir [18,19]:

A. AVEY, M. SÜZER

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(X_3) & P_{12}(X_3) & 0 \\ P_{12}(X_3) & P_{11}(X_3) & 0 \\ 0 & 0 & P_{66}(X_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Burada $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ ve $e_{11}, e_{22}, \gamma_{12}$ FDMSK'ların sırasıyla gerilme bileşenleri ve referans yüzeyden x_3 uzaklığındaki yüzeyin deformasyon bileşenleri ve $P_{ij}(X_3)$, ($i, j = 1, 2, 6$), normalize edilmiş kalınlık koordinatı X_3 ' e bağlı olarak değişen büyüklükler olup aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$P_{11}(X_3) = \frac{E_f(X_3)}{1 - \nu_f^2(X_3)}, \quad P_{12}(X_3) = \nu_f P_{11}(X_3), \quad P_{66}(X_3) = \frac{E_f(X_3)}{2[1 + \nu_f(X_3)]} \quad (8)$$

Yukarıda tanımlanan FDMSK'lar için referans yüzeyden x_3 uzaklığındaki yüzeyin deformasyon bileşenleri ile referans yüzeyin deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki biçimde ifade edilir [22]:

$$e_{11} = \bar{e}_{11} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}, \quad e_{22} = \bar{e}_{22} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, \quad \gamma_{12} = \bar{\gamma}_{12} - 2x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9)$$

FDMSK 'nın kuvvet ve moment bileşenlerini bulmak için aşağıdaki integraller kullanılmaktadır [22-24]:

$$n_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} dx_3 \quad (i, j = 1, 2) \quad (10)$$

$$m_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j = 1, 2) \quad (11)$$

(9) ifadesi (7) bağıntısında yerine yazılıp elde edilen ifadeler (10) ve (11) integrallerinde dikkate alındığında FDMSK'ların kuvvet ve moment bileşenleri için aşağıdaki bağıntılar bulunur:

$$n_{11} = k_{10} \bar{e}_{11} + k_{20} \bar{e}_{22} - k_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - k_{21} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, \quad n_{12} = k_{60} \bar{\gamma}_{12} - 2k_{61} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (12)$$

$$n_{22} = k_{20} \bar{e}_{11} + k_{10} \bar{e}_{22} - k_{21} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - k_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

$$m_{11} = k_{11} \bar{e}_{11} + k_{21} \bar{e}_{22} - k_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - k_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, \quad m_{12} = k_{61} \bar{\gamma}_{12} - 2k_{62} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (13)$$

$$m_{22} = k_{21} \bar{e}_{11} + k_{11} \bar{e}_{22} - k_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - k_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

Burada, aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$k_{1\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_f(X_3)}{1 - [\nu_f(X_3)]^2} x_3^\alpha dx_3, \quad k_{2\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu_f(X_3) E_f(X_3)}{1 - [\nu_f(X_3)]^2} x_3^\alpha dx_3 \quad (14)$$

$$k_{6\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_f(X_3)}{2[1 + \nu_f(X_3)]} x_3^\alpha dx_3, \quad \alpha = 0, 1, 2$$

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

$n_{ij}(i, j = 1, 2)$ kuvvet bileşenleriyle ϕ Airy gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntılar aşağıdaki biçimdedir [22]:

$$n_{11} = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, n_{22} = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, n_{12} = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (15)$$

(15) ifadesi (12) denklemlerinde yerine yazıldığında ve bazı işlemlerden sonra, referans yüzeydeki $\bar{e}_{11}, \bar{e}_{22}, \bar{\gamma}_{12}$ deformasyon bileşenleri için aşağıdaki ifadeler edilir:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{11} &= q_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + q_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - q_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - q_4 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ \bar{e}_{22} &= q_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + q_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - q_4 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - q_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ \bar{\gamma}_{12} &= -q_5 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - q_6 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (16)$$

Burada, şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned} q_1 &= k_{10} \Delta, \quad q_2 = -k_{20} \Delta, \quad q_3 = (k_{20} k_{21} - k_{11} k_{10}) \Delta, \\ q_4 &= (k_{20} k_{11} - k_{21} k_{10}) \Delta, \quad q_5 = \frac{1}{k_{60}}, \quad q_6 = -\frac{2k_{61}}{k_{60}}, \quad \Delta = \frac{1}{k_{10} k_{10} - k_{20} k_{20}} \end{aligned} \quad (17)$$

(15) bağıntısı (12) ve (13) bağıntılarında yerine yazılıp elde edilen ifadeler, (16) bağıntısı ile birlikte temel denklemlerde [22, 23] yerine yazıldığında aşağıdaki hareket ve deformasyon uygunluk denklemleri elde edilir

$$\begin{aligned} L_{11} \phi + L_{12} u_3 &= \bar{p}_f \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ L_{21} \phi + L_{22} u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Burada, $L_{ij} = (i, j = 1, 2)$ diferansiyel operatör olup şu biçimde tanımlanır:

$$\begin{aligned} L_{11} &= Q_2 h \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(Q_1 - Q_5) h \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + Q_2 h \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \frac{h}{r} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ L_{12} &= -Q_3 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2(Q_4 + 2Q_6) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - Q_4 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \\ L_{21} &= h q_1 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + h(2q_2 + q_5) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + h q_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \\ L_{22} &= -q_3 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - (2q_3 - q_6) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - q_4 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Yukarıdaki diferansiyel operatörlerin içerdiği $Q_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ sembolleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} Q_1 &= k_{11} q_1 + k_{21} q_2, \quad Q_2 = k_{11} q_2 + k_{21} q_1, \quad Q_3 = k_{11} q_3 + k_{21} q_4 + k_{12}, \quad Q_4 = k_{11} q_4 + k_{21} q_3 + k_{22}, \\ Q_5 &= k_{61} q_5, \quad Q_6 = k_{61} q_6 + k_{62} \end{aligned} \quad (20)$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Temel denklemlerin çözümü

FDMSK 'nın bir ucu basitçe desteklenmekte olup diğer ucunda ise boyuna yer değiştirmeni ve dönmeni önleyen bir kavrama kullanılmaktadır. Çalışmanın amacı, bu tür karma sınır koşullarında problemin çözümünü bulmaktır. Karma sınır koşullarının matematiksel modeli aşağıdaki biçimde tanımlanır [16-19]:

$$x_1 = 0 \quad \text{ise} \quad u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0 \quad (21)$$

$$x_1 = L \quad \text{ise} \quad u_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \quad (22)$$

Karma sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonlar aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$u_3 = \bar{u}_3(t) \sin\left(\frac{\alpha x_1}{2}\right) \cos(\beta x_2), \quad \phi = \bar{\phi}(t) \sin\left(\frac{\alpha x_1}{2}\right) \cos(\beta x_2) \quad (23)$$

Burada $\bar{u}_3(t)$ ve $\bar{\phi}(t)$ bilinmeyen fonksiyonlar olup şu tanımlar geçerlidir: $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ ve $\beta = \frac{n}{r}$. Bu sembollerin içerdiği $m=1,3,5,\dots$ x_1 doğrultusunda ve n, x_2 doğrultusundaki titreşim modlarıdır.

(18) diferansiyel denklemler sistemine Galerkin yöntemi uygulandığında ve (23) bağıntıları bu denklemlerde dikkate alındığında, inetgrallemeden sonra $\bar{\phi}(t)$ fonksiyonu elde edilen denklemlerden yok edilerek FDMSK'ların karma sınır koşullarında serbest titreşim frekansı (rad/s) için analitik ifade aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{16\bar{\rho}_f} \left[\frac{4\alpha^2}{r} - Q_2\alpha^4 - 8(Q_1 - Q_5)\alpha^2\beta^2 - 16Q_2\beta^4 \right] \left(q_1\alpha^4 + 4q_5\alpha^2\beta^2 + 16q_1\beta^4 \right)^{-1} \times \left[\frac{4\alpha^2}{r} + q_4\alpha^4 + 8(q_3 - q_6)\alpha^2\beta^2 + 16q_4\beta^4 \right] + Q_3\alpha^4 + 4Q_6\alpha^2\beta^2 + 16Q_3\beta^4} \quad (24)$$

(24) ifadesinin boyutsuz şekli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [18]:

$$\omega_1 = \omega \frac{r^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_1(1-\nu_1^2)}{E_1}} \quad (25)$$

3.2. Karşılaştırma

Bu çalışmada, karma sınır koşulları altında frekans için elde edilen kapalı çözümü doğrulamak için (24) ifadesi kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar literatürde bulunan sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Birinci karşılaştırmada karma sınır koşulları altındaki pür metal silindirik kabuğun frekans değerleri [16] sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. [16] makalesinde, frekans için aşağıdaki ifade kullanılmaktadır (Bkz., Denk. (4.6)):

$$\omega_{A-S} = \left(\frac{n^2}{1+n^2} \frac{1}{\rho_{02}hr^2} \right)^{1/2} \times \left\{ \frac{D_0}{16r^2} \left[\bar{\alpha}^4 + 8\bar{\alpha}^2n^2 + 16(n^2-1)^2 \right] + \frac{E_{02}h\bar{\alpha}^4}{\left[\bar{\alpha}^2 + 4n^2 \right]^2} \right\}^{1/2} \quad (26)$$

Burada $\bar{\alpha}$ kabuk ölçülerine bağlı parametre ve D_0 silindirik sertlik parametresi olup şu tanımlar geçerlidir:

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

$$\bar{\alpha} = \frac{m\pi r}{L}, D_0 = \frac{E_{02}h^3}{12(1-\nu_{02}^2)} \quad (27)$$

Karşılaştırma yapabilmek için bu çalışmadaki (24) ifadesinin özel halı kullanılmaktadır, yani $d = 0$ olduğunda FDMSK pür metal silindirik kabuğa dönüşmektedir. Tablo 1’ de değişik r/h ve L/r oranları için karma sınır koşullarında pür metal silindirik kabukların $\omega(\text{rad}/sn)$ temel doğal frekans değerleri [16] çalışmasında elde edilen $\omega_{A-S}(\text{rad}/sn)$ frekansları ile mukayese edilmektedir. Karşılaştırmada pür çelik özellikleri kullanılmıştır: $E_{02} = 1.93 \times 10^{11} (Pa)$, $\nu_{02} = 0.3$, $\rho_{02} = 8000 \text{kg}/m^3$. Ayrıca silindirik kabuk parametreleri şu şekildedir: $r/h = 200; 500; 1000$ ve $L/r = 1$. Tablo 1’de boyuna dalga sayısı bire eşit ($m = 1$) olarak dikkate alınmıştır.

Karşılaştırmada kullanılan tüm veriler [16] çalışmasından alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen temel doğal frekans değerlerinin [16] çalışmasında elde edilen sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu Tablo 1’ den görülmektedir. Tablo 1’ den frekanslar arasındaki maksimum farkın % 0.67’den küçük olduğu görülmektedir.

Tablo 1. Karma sınır koşullarında pür metal silindirik kabuğun frekanslarının mukayesesi

	[16]	Bu çalışma
r/h	$\omega_{A-S}(\text{rad}/sn)$	$\omega(\text{rad}/sn)$
200	212.141 (6)	212.711 (6)
500	53.776(8)	53.772(8)
1000	19.074(9)	19.098(9)

3.3. Karma sınır koşulları altındaki FDMSK’ların boyutsuz frekans parametreleri için özgün hesap ve analizler

Sayısal analizlerde, iki FDM türü kısaca FD_A ve FD_B olarak adlandırılan fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme türü kullanılmaktadır. FD_A ve FD_B silindirik kabukları, sırasıyla silikon nitrat ve nikel karışımı (Si_3N_4/Ni), ve zirkonyum oksit ve paslanmaz çelik ($ZrO_2/SUS304$) karışımından oluşmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri Shen [21] kitabından alınmış ve aşağıda sunulmaktadır:

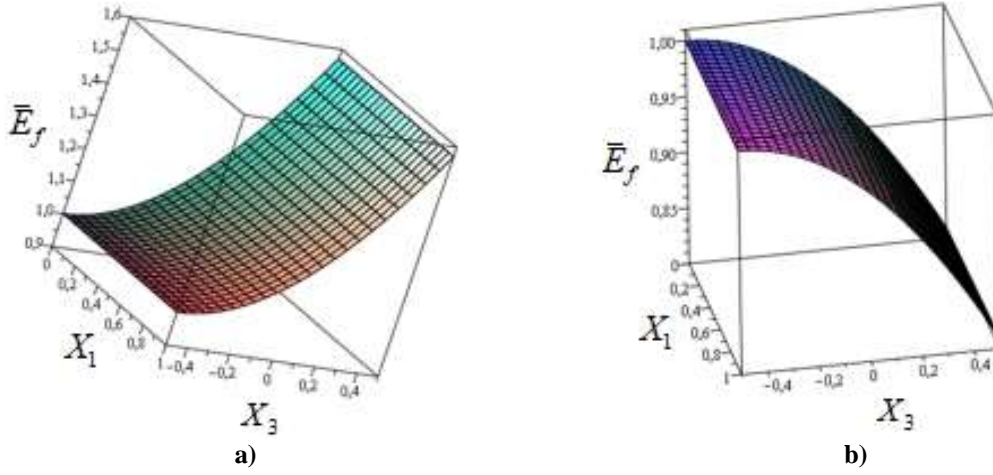
$$E_{ZrO} = 1.68 \times 10^{11} (Pa), E_{Sus} = 2.07788 \times 10^{11} (Pa), \nu_{ZrO} = 0.297996, \nu_{Sus} = 0.317756$$

$$E_{Si_3N_4} = 3.22271 \times 10^{11} (Pa), E_{Ni} = 2.05098 \times 10^{11} (Pa), \nu_{Si_3N_4} = 0.24, \nu_{Ni} = 0.31$$

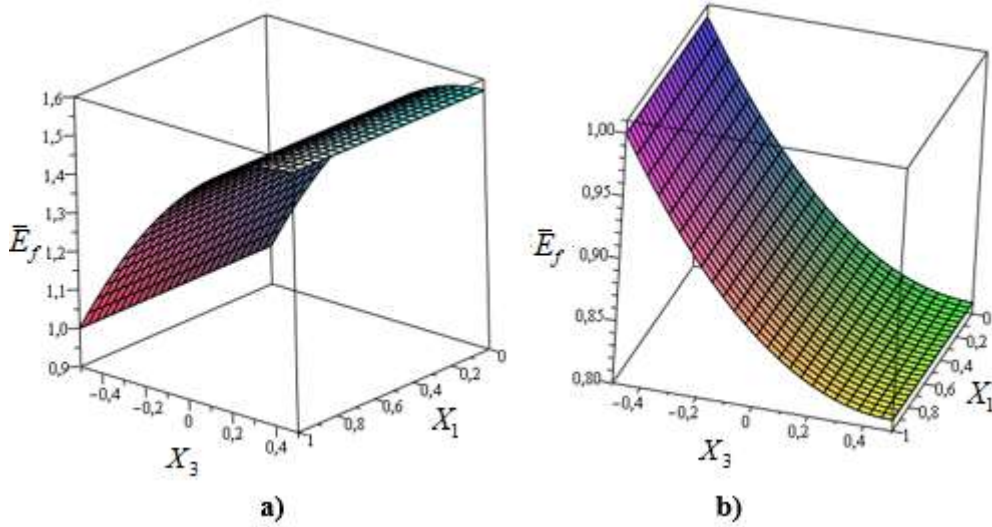
Ayrıca, ZrO_2 , Si_3N_4 , Ni ve $SUS304$ malzemelerinin yoğunlukları sırasıyla $5680 (kg/m^3)$, $2370 (kg/m^3)$, $8900 (kg/m^3)$ ve $8166 (kg/m^3)$ olarak kullanılmaktadır [21].

Örnek olarak kuadratik ($d=2$) ve ters kuadratik durumlar için a) Si_3N_4/Ni ve b) $ZrO_2/SUS304$ karışımından oluşan FDMSK’ların \bar{E}_f boyutsuz Young modülünün X_3 boyutsuz kalınlık koordinatına bağlı değişiminin üç boyutlu grafikleri Şekil 2 ve 3’de sunulmaktadır.

A. AVEY, M. SÜZER



Şekil 2. a) FD_A ve b) FD_B tip SK'ların \bar{E}_f boyutsuz Young modülünün $V_1 = (X_3 + 1/2)^2$ kuadratik ($d=2$) hacim kesir için X_3 ' e bağlı üç boyutlu dağılımı



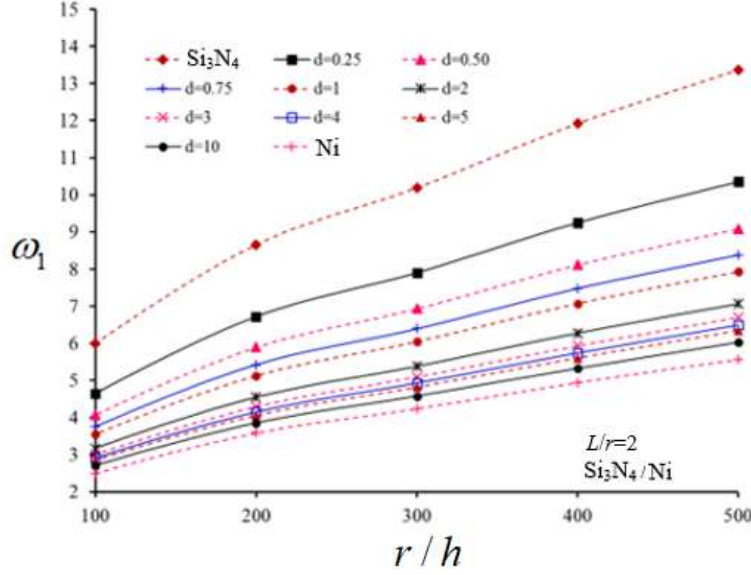
Şekil 3. a) Si₃N₄/Ni ve b) ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan FDMSK'ların \bar{E}_f boyutsuz Young modülünün $V_1 = 1 - (1/2 - X_3)^2$ ters kuadratik hacim kesir için X_3 ' e bağlı üç boyutlu dağılımı

Şekil 4' de Si₃N₄/Ni karışımından oluşan veya FD_A çeşit silindirik kabukların (SK) tüm profilleri için boyutsuz frekans parametresinin r/h oranına bağlı değişimi sunulmaktadır. Şekil 2' de $L/r=2$, pür seramik (Si₃N₄), FDM'nin hacim kesir indeksi (HKİ) için $d=0.25; 0.5; 0.75; 1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 10$, ters kuadratik profil ve pür metal (Ni) silindirik kabuklar (SK) kullanılmaktadır. Şekil 4' den görüldüğü gibi r/h oranının artması ile BFP değerlerinin ve onlara karşı gelen dairesel dalga sayısının arttığı görülmektedir. HKİ sıfırdan, yani $d=0$ ' dan (Si₃N₄'ten) $d=10$ 'a kadar arttığında seramiğin BFP değerleri nikelden oluşan SK'nın frekans değerlerine doğru sürekli bir biçimde azalma göstermektedir. FDMSK'ların BFP değerleri Si₃N₄ 'den oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, $d=0.25$ olduğunda FD profilin BFP'ye etkisi (-%22.44) olduğu halde $d=10$ olduğunda söz konusu etki (-%55.2) olmaktadır. Burada ve sonraki karşılaştırmalarda eksi işaretinin FDM kabuğun BFP değerlerinin pür metal veya seramikten oluşan SK'ların BFP değerlerinden küçük olduğunu göstermektedir. FDMSK'ların BFP değerleri Nikelden oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, $d=0.25$ için FD_A profilin BFP'ye etkisi (+%88) civarında iken $d=10$ olduğunda söz konusu etki (+%8) civarında olduğu görülmüştür. Ters kuadratik profil için BFP değerlerine FD_A etkisi $d=0.5$ profil kabuktaki BFP'ye etki ile

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

yaklaşık aynı olduğu tespit edilmiştir. Örneğin seramik kabukla mukayesede etki (-%32) civarında iken, metal kabukla kıyaslandığında bu etki (+%63) etrafında olduğu tespit edilmiştir.

NOT: Etkileri belirlemek için aşağıdaki oranlar kullanılmaktadır: $\%100 \times \frac{\omega_{1f} - \omega_{1m}}{\omega_{1m}}$, $\%100 \times \frac{\omega_{1f} - \omega_{1c}}{\omega_{1c}}$

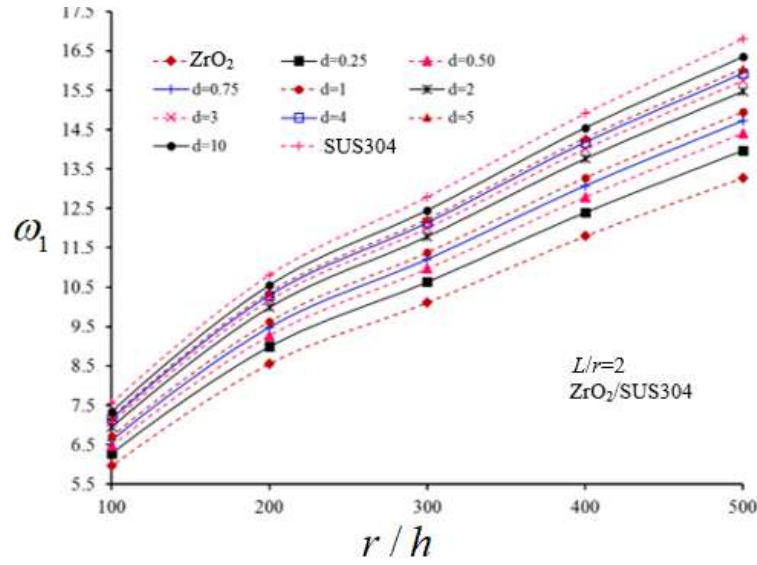


Şekil 4. FD_A çeşit SK'ların tüm profilleri için boyutsuz frekans parametresinin r/h oranı 100'den 500'e kadar değiştiğinde dağılımı

Şekil 5' de ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan veya FD_B çeşit SK'ların tüm profilleri için boyutsuz frekans parametresinin r/h oranına bağlı değişimi sunulmaktadır. Şekil 5' de L/r=2, ZrO₂, FDM'nin hacim kesir indeksi (HKİ) için d =0.25; 0.5;0.75;1.0;2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 10, ters kuadratik profil ve paslanmaz çelikten oluşan SK'lar kullanılmaktadır. Şekil 3' den görüldüğü gibi r/h oranının artması ile BFP değerlerinin ve onlara karşı gelen dairesel dalga sayısının arttığı görülmektedir. HKİ sıfırdan, yani d=0 (pür seramikten) d =10'a kadar arttığında seramiğin BFP değerleri paslanmaz çelikten oluşan SK'nın frekans değerlerine doğru sürekli bir biçimde arttığı görülmektedir. FDMSK'ların BFP değerleri ZrO₂ 'den oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, d=0.25 olduğunda FD_B profilin BFP'ye etkisi (+%5.1) civarında olduğu halde d=10 olduğunda söz konusu etki (+%23) civarında olduğu görülmektedir.

FD_B çeşit SK'ların BFP değerleri SUS304 'ten oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, d=0.25 olduğunda FD_B profilin BFP'ye etkisi (-%16.9) civarında iken d=10 olduğunda söz konusu etki önemli derecede azalarak (-%2.5) civarında olduğu görülmektedir.

A. AVEY, M. SÜZER



Şekil 5. ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan FDMSK'ların tüm profilleri için boyutsuz frekans parametresinin r/h oranı 100'den 500'e kadar değiştiğinde dağılımı

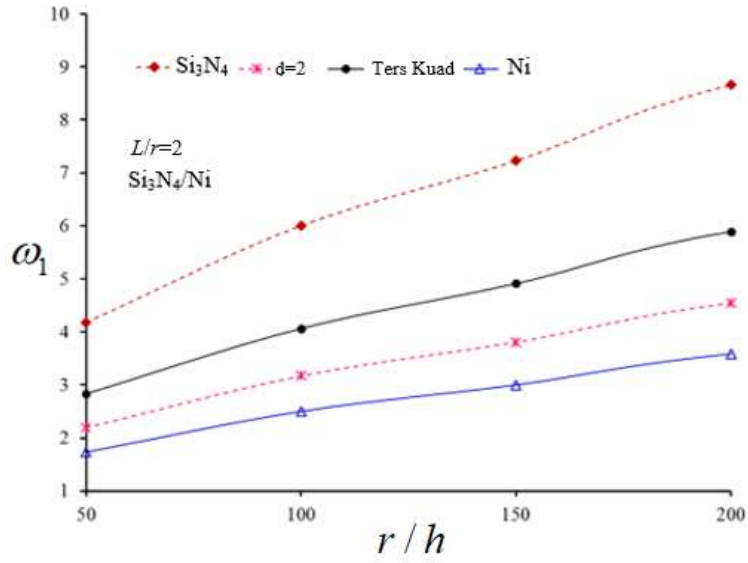
Tablo 2' de FD_A ve FD_B tip FDMSK'ların tüm profilleri için boyutsuz frekans parametresinin değerleri ve d hacim kesir indeksine bağlı değişimi sunulmaktadır. Hacim kesir indeksi, d 'ni artışına bağlı olarak Si₃N₄/Ni karışımından oluşan FDMSK'larda BFP değerleri önce belirgin olarak azalmakta ve d 'nin belirli değerinden sonra bu azalma zayıflamaktadır. ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan FDMSK'larda BFP değerleri d 'nin küçük değerlerinde belirgin olarak atmasına rağmen, $d > 4$ olduğunda bu azalmanın zayıfladığı görülmektedir.

Tablo 2. FDMSK'ların boyutsuz frekans parametresinin d indeksine bağlı dağılımı

d	$\omega_1(n)$ (n)	
	Si ₃ N ₄ /Ni	ZrO ₂ /SUS304
Metal	2.503(1,4)	7.550(1,4)
0.25	4.647(1,4)	6.276(1,4)
0.5	4.079(1,4)	6.474(1,4)
0.75	3.762(1,4)	6.612(1,4)
1.0	3.559(1,4)	6.714(1,4)
2	3.171(1,4)	6.950(1,4)
3	3.007(1,4)	7.072(1,4)
4	2.914(1,4)	7.150(1,4)
5	2.852(1,4)	7.204(1,4)
10	2.708(1,4)	7.341(1,4)
Seramik	6.000(1,4)	5.964(1,4)

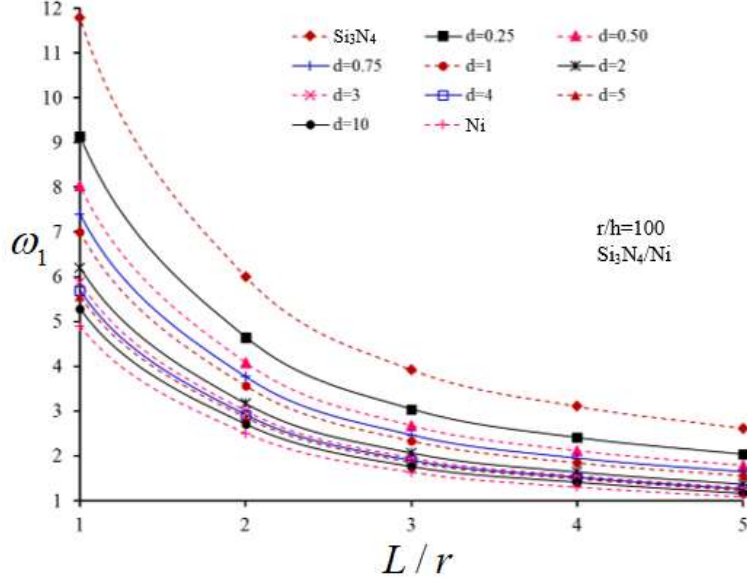
Şekil 6'da Si₃N₄/Ni karışımından oluşan FDMSK'ların kuadratik ($d=2$) ve ters kuadratik profilleri için boyutsuz frekans parametresinin r/h oranı 50'den 200'e 50 şer olarak değiştiği durumlarda çizilen eğrilerin sürekli arttığı görülmektedir. Şekil 7'den görüldüğü gibi ters kuadratik profilli kabuğun BFP değerlerine karşı gelen eğriler Silikon nitrat ve Nikelden oluşan kabukların BFP eğrilerine yaklaşık aynı mesafede olmaktadır.

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ



Şekil 6. Si₃N₄/Ni karışımından oluşan FDMSK'ların boyutsuz frekans parametresinin kuadratik ve ters kuadratik profiller için r/h oranı değişimine bağlı dağılımı

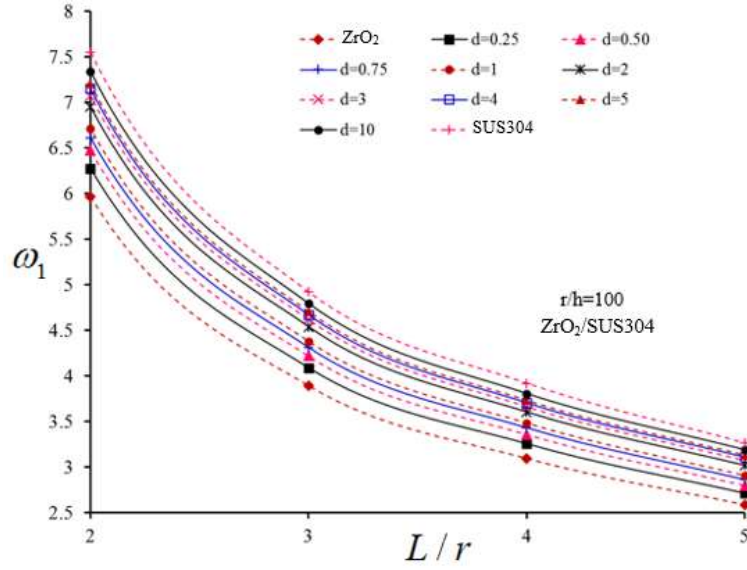
Si₃N₄/Ni karışımından oluşan FD_A tip SK'ların tüm d değerleri için BFP'nin L/r oranı 1'den 5'e değiştiğinde çizilen eğriler Şekil 7'de sunulmaktadır. Şekil 7'den görüldüğü gibi L/r oranı arttığında FDMSK'ların frekans eğrileri aşağıya doğru yönelir, yani BFP değerleri azalmaktadır. Ayrıca d 'nin artması ile FDM kabukların frekans eğrileri metal kabuğun BFP eğrisine üstten kümelenmektedir.



Şekil 7. Si₃N₄/Ni karışımından oluşan FDMSK'ların boyutsuz frekans parametresinin tüm HKİ'leri için L/r oranı değişimine bağlı dağılımı

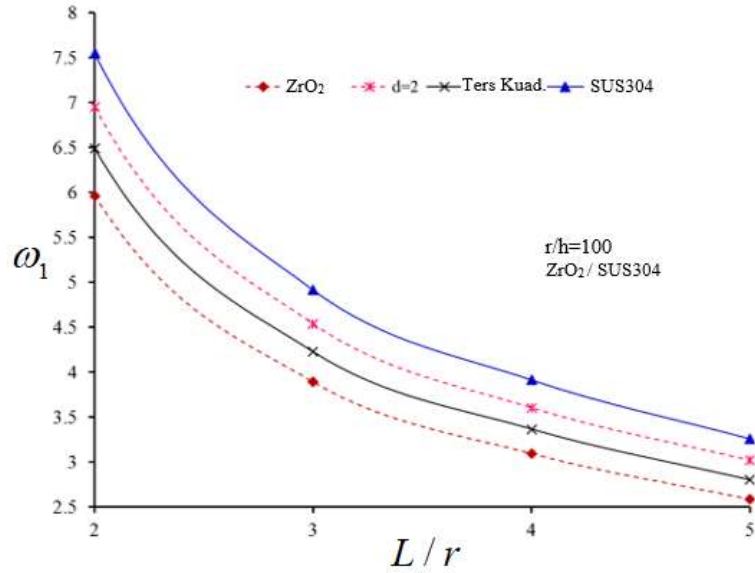
Şekil 8'de $r/h=100$ olduğunda, ZrO₂, kabuk, FDM'nin hacim kesir indeksi için $d=0.25; 0.5; 0.75; 1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 10$ ve SUS304 silindirik kabukların titreşim frekansı için eğriler çizilmiştir. L/r oranı 2'den 5'e değiştiğinde FD_B çeşit SK'ların tüm d hacim kesir indeksleri için BFP'nin dağılımı sunulmaktadır. FD_B çeşit SK'ların frekans eğrileri L/r arttığında BFP değerlerinin önemli derecede azaldıkları görülmektedir. L/r oranının artması FDM'lerin BFP'lerine etkisini %1'den az olmakla beraber düzensiz olarak değiştirmektedir.

A. AVEY, M. SÜZER



Şekil 8. ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan FDMK'ların boyutsuz frekans parametresinin tüm HKİ'leri için L/r oranı değişimine bağlı dağılımı

Şekil 9'da L/r oranı 2'den 5'e değiştiğinde FD_B çeşit SK'ların kuadratik ve ters kuadratik profilleri için BFP'nin dağılımından görüldüğü gibi L/r oranı arttığında BFP değerlerinin önemli derecede azaldıkları görülmektedir. Ters kuadratik profil için BFP değerlerinin kuadratik durumdaki BFP değerlerinden küçük olduğu görülmektedir.



Şekil 9. ZrO₂/SUS304 karışımından oluşan FDMK'ların boyutsuz frekans parametresinin kuadratik ve ters kuadratik profiller için L/r oranı değiştiğinde dağılımı

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu makalede, karma sınır koşulları altındaki FDMK'ların dinamik tepkisi incelenmektedir. FDMK'ların temel denklemlerinin türetilmesinde Donnell tipi kabuk teorisi kullanılmaktadır. Temel denklemler Galerkin yöntemi uygulanarak çözülmüş ve titreşim frekansı için analitik ifade elde edilmiştir.

Sayısal sonuçlar aşağıdaki genelleştirmeleri desteklemektedir:

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

- a.) FD_A ve FD_B tip silindirik kabuklarda BFP değerlerinin ve onlara karşı gelen dairesel dalga sayısının r/h oranının artması ile arttığı görülmektedir.
- b.) FD_A ve FD_B profillerin BFP'lere etkisi r/h oranı değişiminden yaklaşık olarak bağımsız olduğu görülmektedir.
- c.) Hacim kesir indeksi sıfırdan ona kadar arttığında Si_3N_4 ' ten oluşan SK'nın BFP değerleri nikelden oluşan SK'nın frekans değerlerine doğru sürekli bir biçimde azalma göstermiştir.
- d.) FD_A tip SK'ların BFP değerleri Si_3N_4 'ten oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde FD_A profilin BFP'ye etkisi hacim kesir indeksinin artması ile artmaktadır.
- e.) FD_A çeşit SK'ların BFP değerleri nikelden oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, FD_A profilin BFP'ye etkisi hacim kesir indeksinin artması ile önemli derecede azaldığı tespit edilmiştir.
- f.) HKİ sıfırdan ona kadar arttığında FD_B tip SK'nın BFP değerleri paslanmaz çelikten oluşan SK'nın frekans değerlerine doğru sürekli bir biçimde arttığı görülmektedir.
- g.) FD_B tip SK'ların BFP değerleri ZrO_2 'den oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, FD_B profilin BFP'ye etkisi artmasına rağmen FD_A tipin etkisinden az olmaktadır.
- h.) FD_B SK'ların BFP değerleri paslanmaz çelikten oluşan kabuğun BFP değerleri ile mukayese edildiğinde, FD_B profilin BFP'ye etkisi azalmanın yanı sıra rağmen FD_A tipin etkisinden az olmaktadır.
- i.) FD_A ve FD_B tip kabukların BFP değerlerine ters kudratik profilin etkisi $d=0.5$ profilli kabuktaki BFP'ye etki ile yaklaşık aynı olduğu tespit edilmiştir.
- j.) L/r oranının artması ile BFP değerlerinin FD_A ve FD_B tip silindirik kabuklarda azaldığı görülmektedir.
- k.) L/r oranının artması FD_A ve FD_B profillerin BFP'lerine etkisini %1'den az olmakla beraber düzensiz olarak değiştirmektedir.
- l.) Hacim kesir indeksi arttığında $ZrO_2/SUS304$ profilleri için BFP değerleri azaldığı, Si_3N_4/Ni profilleri için BFP değerlerinin ise arttığı gözlenmiştir.
- m.) Hacim kesir indeksi dörtten büyük olduğunda FD_A ve FD_B profilleri için BFP'nin artış (veya azalma) hızı yavaşlamaktadır.

NOT: Makalenin bir kısmı Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, 02-06 Eylül 2019 tarihinde gerçekleştirilen 21. Ulusal Mekanik Kongresinde sunulmuştur [19].

SEMBOLLER

d	: Kuvvet üstü olup hacim kesir indeksi
D_0	: Silindirik sertlik parametresi
E_1, E_2	: FDM'lerin metal ve seramik yüzeylerinin Young modülleri
$E_{ij}(X_3)$: Normalleştirilmiş kalınlık koordinatı X_3 'e bağlı değişen büyüklükler
$\bar{e}_{x_1}, \bar{e}_{x_2}, \gamma_{x_1x_2}$: FDMSK'ların referans yüzeyindeki deformasyon bileşenleri
FDM	: Fonksiyonel dereceli malzemenin kısaltılması
FDMSK	: Fonksiyonel dereceli silindirik kabuğun kısaltması
FD_A, FD_B	: FDM profilleri
h	: Silindirik kabuğun kalınlığı
KKT	: Klasik kabuk teorisi kısaltması
L	: Silindirik kabuğun uzunluğu
m	: x_1 doğrultusunda dalga sayısı
m_{ij}	: Moment bileşenleri
Ni	: Nikel
n_{ij}	: Kuvvet bileşenlerini
n	: x_2 doğrultusundaki dalga sayısı
P	: Genel malzeme özelliği
P_1, P_2	: Sırasıyla metal ve seramiğin özellikleri

A. AVEY, M. SÜZER

r	: Silindirik kabuğun yarıçapı
Q_{ij}	: Kabuk ve malzeme özelliklerine bağlı parametre
Si_3N_4	: Silikon nitrat
T	: Sıcaklık katsayısı
t	: Zaman
u_3	: Yerdeğiştirme fonksiyonu
$\bar{u}_3(t)$: zamana bağlı fonksiyon
V_1, V_2	: Metal ve seramik fazlarının hacim kesirleri
ZrO_2	: Zirkonyum oksit
α	: x_1 doğrultusunda dalga sayısı parametresi
β	: x_2 doğrultusunda dalga sayısı parametresi
$\bar{\alpha}$: Dalga sayısı parametresi
ϕ	: Airy gerilme fonksiyonu
$\bar{\phi}(t)$: Zamana bağlı fonksiyon
ν_1, ν_2	: Sırasıyla FDM'lerin metal ve seramik yüzeylerinin Poisson oranları
$\bar{\rho}_f$: FDMSK'nın yoğunluk parametresi
ρ_1, ρ_2	: Sırasıyla FDM'lerin metal ve seramik yüzeylerinin yoğunlukları
$\tau_{x_1}, \tau_{x_2}, \tau_{x_1x_2}$: FDMSK'ların sırasıyla gerilme bileşenleri
ω	: Titreşim frekansı (rad/sn)
ω_1	
$x_i (i = 1, 2, 3)$: Boyutsuz frekans parametresi : Koordinat eksenleri

KAYNAKLAR

- [1] Bever, M.B., Duwez, P.F., 1972. Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*, 10, 1–8.
- [2] Koizumi, M., 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28, 1–4.
- [3] Hirai, T., *Materials Science and Technology*. Brook, R.J., (Ed.), Vch Verlagsgesellschaft (292-341), Weinheim, Germany, 1996.
- [4] Müller, E., Drašar, C., Schilz, J., Kaysser, W.A., 2003. Functionally graded materials for sensor and energy Applications. *Materials Science Engineering A*, 362, 1–2, 17–39.
- [5] Kawasaki, A., Watanabe, R., 1997. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramic International*, 23(1), 73–83.
- [6] Reddy, J.N., Chin, C.D., 1998. Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 21, 593–626.
- [7] Pitakthapanaphong, S., Busso, E.P., 2002. Self-consistent elastoplastic stress solutions for functionally graded material systems subjected to thermal transients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, 695–716.
- [8] Loy, C.T., Lam, K.Y., Reddy, J.N., 1999. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Science*, 41, 309–324.
- [9] Sofiyev, A.H., 2003. Dynamic buckling of functionally graded cylindrical thin shells under non-periodic impulsive loading. *Acta Mechanica*, 165, 151–163.
- [10] Tornabene, F., 2009. Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2911–2935.
- [11] Brischetto, S., 2016. Curvature approximation effects in the free vibration analysis of functionally graded shells. *International Journal of Applied Mechanics*, 1650079.
- [12] Zghal, S., Frikha, A., Dammak, F., 2018. Free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite shell structures. *Applied Mathematics Modeling*, 53, 132-155.

FDM SİLİNDİRİK KABUKLARIN KARMA SINIR KOŞULLARINDA DİNAMİK TEPKİSİNİN İNCELENMESİ

- [13] Pradhan, S.C., Loy, C.T., Reddy, J.N., 2000. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions. *Applied Acoustic*, 61, 111–129.
- [14] Haddadpour, H., Mahmoudkhani, S., Navazi, H.M., 2007. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects. *Thin-Walled Structures*, 45, 591–599.
- [15] Pandey, S., Pradyumna, S., 2015. A layerwise finite element formulation for free vibration analysis of functionally graded sandwich shells. *Composite Structures*, 133, 438-450.
- [16] Agenosov, L.G., Sachenkov, A.V., *Stability and Free Vibration of Thin Circular Cylindrical and Conical Shells with Different Boundary Conditions*. Research on the Theory of Plates and Shells, Kazan State University, Kazan, USSR, 2, 111–126 (in Russian), 1964.
- [17] Sofiyev, A.H., Kuruoglu, N., 2015. On a problem of the vibration of functionally graded conical shells with mixed boundary conditions. *Composites Part B-Engineering*, 70, 122-130.
- [18] Süzer, M., 2019. Karışık sınır koşulları altında fonksiyonel dereceli silindirik kabukların titreşim analizi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 94s.
- [19] Avey, A., Süzer, M., 2019. Karışık sınır koşulları altında fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukların titreşim analizi. 21. Ulusal Mekanik Kongresi Bildiriler Kitabı, Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, 02-06 Eylül 2019, 915-924.
- [20] Sofiyev, A.H., Hui, D., 2019. On the vibration and stability of FGM cylindrical shells under external pressures with mixed boundary conditions by using FOSDT. *Thin-Walled Structures*, 134, 419-427.
- [21] Shen, H.S., *Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, Florida, 2009.
- [22] Volmir, A.S., *Stability of Elastic Systems*. Nauka, Moscow. English Translation: Foreign Tech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD628508, 1967.
- [23] Leissa, A.W., *Vibration of Shells*. NASA SP-288, 1973.
- [24] Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC press, 2004.