BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
8 (4), 1154-1161, 2019

BEU Journal of Science
8 (4), 1154-1161, 2019

*Araştırma Makalesi / Research Article*

# Lorentziyan Düzlem Hareketinde İkinci Eğrilik Merkezi

Kemal EREN*

*Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Sakarya*
*(ORCID:0000-0001-5273-7897)*

**Öz**
Bu çalışmanın amacı Lorentziyan düzlem hareketinde bir noktanın takip ettiği yörüngenin için ikinci eğrilik merkezini bulmak ve yorumlamaktır. Bunun için Lorentziyan düzlem kinematiğinin temel prensipleri ve [9] tarafından tanımlanan Lorentziyan ani invaryantlar göz önüne alınarak bu hareket boyunca keyfi bir noktanın takip ettiği yörüngenin birinci ve ikinci eğrilik merkezleri bulundu. Ayrıca birinci ve ikinci eğrilik merkezleri ile ilgili özel durumlar araştırıldı ve geometrik yorumlar yapıldı. Bu özel durumları karakterize eden teoremler ifade ve ispat edildi ve ilgili örnekler verildi.

**Anahtar kelimeler**: Lorentziyan Düzlem Hareketi, Lorentziyan Ani İnvaryantlar, İkinci Eğrilik Merkezi.

# Secondary Center of Curvature in a Lorentzian Planar Motion

**Abstract**
The aim of this manuscript is to find and interpret the second center of curvature for the trajectory of a point in the Lorentzian planar motion. For this purpose, the first and second curvature centers of the trajectory of an arbitrary point along the motion have been found under the consideration of the basic principles of Lorentzian planar kinematics and Lorentzian instantaneous invariants defined by [9]. In addition, special cases related to the first and second curvature centers have been investigated and geometric interpretations have been given. The theorems characterizing these special cases have been expressed and proved.

**Keywords:** Lorentzian Planar Motion, Lorentzian Instantaneous Invariants, Secondary Center of Curvature.

## 1. Giriş

Reinhold Müller, 1890-1910 yılları arasında düzlem kinematiği alanında önemli çalışmalar yaparak bu alandaki birçok problemin çözümünde rol almıştır. Daha sonraki zamanlarda Müller'in çalışmaları farklı dillere çevrilerek kinematik alanında evrensel boyut kazanmıştır [1]. Müller çalışmalarında hareketli bir düzlemdeki noktanın yörüngesinin birinci ve ikinci eğrilik merkezlerini bulmuş ve bu yörünge ile eğrilik merkezleri arasındaki bağıntıları incelemiştir [2]. Diğer taraftan Bottema tarafından hareketli katı bir cisme ait herhangi bir noktanın yörüngesini karakterize eden ani invaryantlar tanımlanmış ve bu invaryantlar hem düzlemsel hem de uzaysal kinematik analizde kullanılmıştır [3-5]. Veldkamp Bottema'nın ani invaryantlarını B-invaryantlar olarak adlandırmış ve [6] çalışmasında eğrilik teorisinin uygulamalarında B-invaryantlara yer vermiştir. Ayrıca [7]'de Bottema tarafından ani invaryantlar kullanılarak hareketli düzlemdeki bir noktanın yörüngesi için ikinci eğrilik merkezi incelenmiştir.

Literatürde Öklidyen düzlemsel ya da uzaysal hareketler için çok sayıda araştırma var olmak birlikte Öklidyen olmayan düzlemsel kinematik araştırmalar yakın zamanda hız kazanmıştır. Özellikle Lorentz ya da Afin-Cayley Klein düzlemlerinin hareketi boyunca herhangi bir noktanın yörüngesini karakterize eden ani invaryantlara başvuran incelemeler [8-11] çalışmalarında yapılmıştır. Ancak bu çalışmalarda da ikinci eğrilik merkezi irdelenmemiştir. Dolayısıyla, bu çalışmalar neticesinde elde edilen bazı veriler kullanılarak Lorentz hareketli düzlemdeki bir noktanın yörüngesi için ikinci eğrilik

*Sorumlu yazar: kemaleren52@gmail.com
*Geliş Tarihi: 08.02.2019, Kabul Tarihi: 10.09.2019*

merkezinin bulması ve Lorentz hareketli düzlemdeki nokta ve birinci, ikinci eğrilik merkezleri arasındaki bağıntıların yorumlanması hedeflenmektedir.

## 2. Temel Kavramlar

$R^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $u=(u_1,u_2)$ ve $w=(w_1,w_2)$ vektörleri için $\langle u,w\rangle = u_1w_1-u_2w_2$ biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı alınırsa $R^2$ afin uzayı Lorentz düzlemi isimlendirilir. $L$ Lorentz düzlemini göstermek $u\in L$ vektörü $\langle u,u\rangle<0$ ise timelike vektör, $\langle u,u\rangle>0$ veya $u=0$ ise spacelike vektör ve $\langle u,u\rangle=0$, $u\neq 0$ ise lightlike (veya null) vektör olarak adlandırılır. $u\in L$ vektörünün normu ise $\|u\|=\sqrt{|\langle u,u\rangle|}$ .şeklindedir. $L$ Lorentz düzleminde $u$ ve $w$ vektörleri için $\langle u,w\rangle=0$ ise bu vektörlere diktir denir.

$L_m$ ve $L_f$ birbirine göre hareket eden hareketli ve sabit Lorentz düzlemleri olsun. Lorentz düzleminde hareketi tanımlamak üzere $L_m$ ve $L_f$ Lorentz düzlemlerinin Kartezyen koordinat sistemleri sırasıyla $XOY$ ve $xoy$ ile gösterilsin. $L_m$ hareketli Lorentz düzleminin $L_f$ sabit Lorentz düzlemine göre hareketi,

$$\begin{aligned} X &= x\cosh\varphi + y\sinh\varphi + a(\varphi) \\ Y &= x\sinh\varphi + y\cosh\varphi + b(\varphi) \end{aligned} \tag{1}$$

denklemi ile verilir. Herhangi bir $A$ noktasının $L_m$ hareketli Lorentz düzlemine ve $L_f$ sabit Lorentz düzleme göre koordinatları sırasıyla $(x,y)$ ve $(X,Y)$ olsun. Ayrıca $L_m$ hareketli Lorentz düzleminin $(0,0)$ noktası $L_f$ sabit Lorentz düzleminin koordinat sistemine göre koordinatları $(a,b)$ ile temsil edilsin. $L_m$ haraketli Lorentz düzlemin $L_f$ sabit Lorentz düzleme göre dönme açısı $\varphi$ olup aynı zamanda $d\varphi/dt$ açısal hızının sıfırdan farklı durumu incelenecektir. Burada $t$ keyfi parametre olmak üzere $\varphi$, $a$ ve $b$ değerleri $t$ parametresine bağlı fonksiyonlardır ve $\varphi=\varphi(t)$, $a=a(t)$, $b=b(t)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca genelliği bozmayacak şekilde $t$ parametresi için hareketin $\varphi=0$ anındaki konumuna ise sıfır pozisyonu denir. Bu çalışmada herhangi bir $f(\varphi)$ fonksiyonu için $\varphi=0$ pozisyonunda $(d^n f/d\varphi^n)$ ifadesi $f_n$ ile gösterilecektir.

Bu çalışmada amacımız Lorentz kinematiğinde herhangi bir noktanın yörüngesinin ikinci eğrilik merkezini bulmak ve özel durumlara göre yorumlamaktır. Bunun için öncelikle Lorentz hareketinin kanonikal sistemi ve ani invaryantları verilmelidir. Daha önceki [8,9,10,11] çalışmalarında da görüldüğü üzere Lorentz hareketinin kanonikal sistemi $a_0=b_0=a_1=b_1=a_2=0$ ve $b_2\neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &X_0=x, \quad X_1=y, \quad X_2=x, \quad X_3=y+a_3, \quad X_4=x+a_4, \quad \dots \\ &Y_0=y, \quad Y_1=x, \quad Y_2=y+b_2, \quad Y_3=x+b_3, \quad Y_4=y+b_4, \quad \dots \end{aligned} \tag{2}$$

denklemleriyle verilir. Burada $a_n$ ve $b_n$ ifadeleri verilen pozisyonda hareketin $n$. mertebeden ani invaryantlarıdır.

Lorentz hareketinin üçüncü mertebeden özelliklerini $b_2, a_3$ ve $b_3$ değerleri vermektedir. $L_m$ hareketli Lorentz düzleminde $(x,y)$ noktasının $L_f$ sabit Lorentz düzlemindeki yörünge eğriliği ise,

$$\kappa = \frac{X'Y'' - X''Y'}{\left|\left(X'\right)^2 - \left(Y'\right)^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde verilir [8-10].

## 3. Lorentziyen Düzlemsel Harekette Yörüngenin Eğrilik Merkezleri

$L_m$ hareketli Lorentz düzlemde bir $A(x, y)$ noktasının $L_f$ sabit Lorentz düzleminde takip ettiği yörüngenin koordinatları $(X, Y)$ olsun. O zaman bu noktanın $L_f$ sabit Lorentz düzlemdeki yörüngesi de $\varphi$ parametre olmak üzere $X(\varphi), Y(\varphi)$ değerleri ile $k$ eğrisi olarak verilebilir. (1)'de verilen hareket denklemi ile $k$ eğrisi timelike eğri olur. Bu çalışmada fonksiyonların $\varphi$'ye göre türevini ifadelerin üzerindeki nokta ile gösterelim.

$L_m$ hareketli Lorentz düzlemdeki Lorentziyan büküm çemberi üzerinde olmayan ( $\kappa \neq 0$ yani $\dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y} \neq 0$ olan) bir $A(x, y)$ noktasının yörünge eğrilik merkezi $A'(\xi, \eta)$ ile gösterilirse bu koordinatlar,

$$\xi = X - \frac{\left(\dot{X}^2 - \dot{Y}^2\right)\dot{Y}}{\dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y}}, \quad \eta = Y - \frac{\left(\dot{X}^2 - \dot{Y}^2\right)\dot{X}}{\dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y}} \tag{3}$$

şeklindedir. Burada

$$S = \left(\dot{X}^2 - \dot{Y}^2\right), \quad N = \dot{X}\ddot{Y} - \ddot{X}\dot{Y} \tag{4}$$

olmak üzere (3) denklemini

$$\xi = X - \frac{S\dot{Y}}{N}, \quad \eta = Y - \frac{S\dot{X}}{N} \tag{5}$$

formunda da gösterilir. (5) denklemi dikkate alındığında $A$ noktası $k$ eğrisinin büküm noktası olmadığından $N \neq 0$ olduğu görülür. Ayrıca (5) denklemi $\varphi$ değeri için $k$ eğrisinin $k'$ evolutünün denklemidir ve $k'$ spacelike bir eğridir çünkü Lorentziyen düzlemsel bir eğrinin evolütü eğrilik merkezinin geometrik yeri olduğundan $k'$ eğrisi Lorentz düzleminde spacelike eğri belirtmektedir.

$A$ noktasının ikinci eğrilik merkezi $A''(X', Y')$ olsun. Yani $A'$ noktasında $k'$ spacelike eğrisinin eğrilik merkezi olsun. O zaman (3) denkleminde $X$ ve $Y$ ifadelerinin yerine sırasıyla $\xi$ ve $\eta$ yazıldığında,

$$X' = \xi - \frac{\left(\dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2\right)\dot{\eta}}{\dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta}}, \quad Y' = \eta - \frac{\left(\dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2\right)\dot{\xi}}{\dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta}} \tag{6}$$

ikinci eğrilik merkezinin koordinatları bulunur. (4) denkleminde $S$ ve $N$ değerleri için,

$$\rho = \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2, \quad n = \dot{\xi}\ddot{\eta} - \ddot{\xi}\dot{\eta}$$

alındığında ve bazı cebirsel işlemler sonucunda,

$$\dot{\xi} = -P\dot{Y}, \quad \dot{\eta} = -P\dot{X} \tag{7}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$P=\frac{3N\dot{S}-2S\dot{N}}{2N^2} \tag{8}$$

olup (7) denkleminden $\rho=P^2S$ ve $n=-P^2N$ bulunur. Yukarıda bulunan denklemler dikkate alındığında sonuç olarak eğrinin $A''\left(X',Y'\right)$ ikinci eğrilik merkezinin koordinatları,

$$X'=X-\frac{S}{N}\left(\dot{Y}-P\dot{X}\right),\quad Y'=Y-\frac{S}{N}\left(\dot{X}-P\dot{Y}\right) \tag{9}$$

şeklinde de yazılabilir. (4) denkleminden $\varphi=0$ için,

$$S_0=X_1^{\,2}-Y_1^2=y^2-x^2,\quad N_0=X_1Y_2-X_2Y_1=y^2-x^2+b_2y \tag{10}$$

elde edilir. Üstelik (4) denkleminin türevi $\dot{S}=2\left(\dot{X}\ddot{X}-\dot{Y}\ddot{Y}\right)$, $\dot{N}=\dot{X}\dddot{Y}-\dddot{X}\dot{Y}$ olmak üzere

$$S_1=2\left(X_1X_2-Y_1Y_2\right)=-2b_2x,\quad N_1=X_1Y_3-X_3Y_1=-\left(a_3x-b_3y\right) \tag{11}$$

ifadeleri bulunur. (8) denkleminden ise $\varphi=0$ için,

$$P_0=\frac{F}{N_0^2}$$

bulunur ve burada,

$$F=-3b_2x\left(y^2-x^2+b_2y\right)+\left(y^2-x^2\right)\left(a_3x-b_3y\right) \tag{12}$$

eşitliği vardır. Bu ifadelerin geometrik yorumu ile ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç:** $N_0=0$ eşitliği Lorentziyan büküm çember denklemini, $x=0$ doğrusu pol normalini, $a_3x-b_3y=0$ doğrusu $O$ ve Ball noktasından gecen doğruyu, $F=0$ eşitliği Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisini ifade etmektedir. $\varphi=0$ için (5) denkleminden birinci eğrilik merkezinin koordinatları,

$$\xi=\frac{b_2xy}{y^2-x^2+b_2y},\quad \eta=\frac{b_2y^2}{y^2-x^2+b_2y} \tag{13}$$

ve (9) denkleminden ikinci eğrilik merkezinin koordinatları,

$$X'=\frac{\left(y^2-x^2\right)Fy+b_2xyN_0^2}{N_0^3},\quad Y'=\frac{\left(y^2-x^2\right)Fx+b_2y^2N_0^2}{N_0^3} \tag{14}$$

şeklinde bulunur. Hareketli Lorentz düzlemi üzerinde bir noktanın homojen koordinatları $\left(x,y,z\right)$ ve sabit Lorentz düzlemi üzerinde bu noktanın birinci eğrilik merkezi ve ikinci eğrilik merkezinin homojen koordinatları sırasıyla $\left(\xi,\eta,\zeta\right)$ ve $\left(X',Y',Z'\right)$ ise (13) ve (14) denklemlerinden,

$$\xi = b_2 xy, \quad \eta = b_2 y^2, \quad \zeta = N_0 \tag{15}$$

ve

$$X' = \left(y^2 - x^2\right) Fy + b_2 xy N_0^2, \quad Y' = \left(y^2 - x^2\right) Fx + b_2 y^2 N_0^2, \quad Z' = N_0^3 \tag{16}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} F &= -3b_2 x N_0 + \left(y^2 - x^2\right)\left(a_3 x - b_3 y\right) \\ N_0 &= y^2 - x^2 + b_2 yz \end{aligned} \tag{17}$$

eşitliği vardır.
(16) denklemi dikkate alındığında aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 1**. *$A''$ ikinci eğrilik merkez koordinatları $A$ hareketli noktasının altıncı mertebeden polinomudur.*

(16) denkleminden görüldüğü gibi $X' = Y' = Z' = 0$ olması durumunda ise $A''$ ikinci eğrilik merkez koordinatları altıncı mertebeden polinom belirtmez. Ancak bu (16) denklemi $N_0 = a_3 x - b_3 y = 0$ veya $y^2 - x^2 = z$ olmasını gerektirir. Böylece $A$ tekil noktaların $O$ polü, Ball noktası ve izotropik noktalar olduğu görülmektedir.

## 4. Özel Durumlar

(16) denklemi dikkate alındığında $A''$ sonsuzdadır ancak ve ancak $N_0 = 0$ dır, yani $A$ noktası Lorentziyan büküm çemberi üzerindedir. $A$ noktası sonsuzda ise birinci eğrilik merkezi $A'$ nün limit durumunda tanımlanır. Öyleyse $z \to 0$ durumunda birinci eğrilik merkezi hesaplanır. (15) denkleminden,

$$\xi = b_2 xy, \quad \eta = b_2 y^2, \quad \zeta = y^2 - x^2 \tag{18}$$

elde edilir. Burada $x$ ve $y$ yok edildiğinde,

$$\xi^2 - \eta^2 + b_2 \eta \zeta = 0 \tag{19}$$

Lorentziyan çember denklemi bulunur. Buradan $A$ noktası sonsuzda olduğunda $A'$ eğrilik merkezinin geometrik yeri Lorentziyan cuspidal çemberini (pol teğetinde Lorentziyan büküm çemberinin yansıması) belirtir.

Benzer şekilde bu tanım ikinci eğrilik merkezi içinde yapılabilir. (16) ve (17) denklemlerinde $z = 0$ alındığında $X'$, $Y'$ ve $Z'$ ifadelerinin her birinde $\left(y^2 - x^2\right)^2$ faktörü vardır. Bu $X'$, $Y'$ ve $Z'$ ifadelerini daha sade olarak,

$$X' = \left(a_3 - 3b_2\right) xy - b_3 y^2, \quad Y' = \left(a_3 - 3b_2\right) x^2 - b_3 xy + b_2 y^2, \quad Z' = y^2 - x^2 \tag{20}$$

biçiminde yazılabilir ve bu denklem ikinci derecededir. Buradan $A''$ eğrilik merkezinin geometrik yeri $y = mx$ olmak üzere,

$$X' = -b_3 m^2 + (a_3 - 2b_2)m, \quad Y' = b_2 m^2 - b_3 m + (a_3 - 3b_2), \quad Z' = m^2 - 1 \tag{21}$$

denklemiyle ifade edilir. Bu denklem bir konik belirtir ve bu koniği $C$ ile gösterelim Lorentz düzleminde koniklerle ilgili temel bilgiler [13,14,15] çalışmalarında mevcuttur. $Z' = 0$ olduğunda $m = \pm 1$ olup $C$ koniğinin sonsuzdaki noktaları $(1, \pm 1, 0)$ izotropik noktalarıdır. Gerekli cebirsel işlemlerden sonra (21) denkleminde $m$ değeri yok edildiğinde $C$ koniğinin,

$$\left(X' + \frac{b_3}{2}\right)^2 - \left(Y' - \frac{a_3 - 4b_2}{2}\right)^2 = \frac{b_3^2 - (a_3 - 3b_2)^2}{4} \tag{22}$$

şeklinde Lorentziyan çemberi belirttiği görülür. $A$ noktası sonsuzda olduğunda $A''$ eğrilik merkezinin geometrik yeri (22) denklemiyle verilen Lorentz çemberidir. Bu Lorentz çemberinin merkezi $\left(-\frac{b_3}{2}, -\frac{a_3 - 4b_2}{2}\right)$ ve yarıçapı $R = \frac{\sqrt{\left|b_3^2 - (a_3 - 3b_2)^2\right|}}{2}$ şeklinde bulunur. (22) denklemiyle verilen Lorentziyan çemberi $\left(0, \frac{-b_2}{2}\right)$ cuspidal polden ve $\left(-b_3, \frac{-b_2}{2}\right)$ noktasından geçer ve aynı zamanda $OY$ ekseni ile kesişimi $H\left(0, \frac{2a_3 - 7b_2}{2}\right)$ noktasıdır.

Kabul edelim ki $OX$ ekseniyle çakışmayan ve orijinden geçen $d$ doğrusu üzerinde bir $A$ noktası alalım. $d$ doğrusunun denklemi $y = lx, \ l \neq 0$ olsun. (12) denkleminden,

$$F = (l^2 - 1)(-3b_2 + a_3 - b_3 l)x^3 - 3b_2^2 l x^2$$

ve (10) denkleminden

$$N_0 = (l^2 - 1)x^2 + l b_2 x$$

bulunur. Bu denklemden ve (16) denkleminden $A''$ eğrilik merkezinin geometrik yeri ( $x^3$ faktörünü dâhil etmeden)

$$\begin{aligned} X' &= l(l^2 - 1)^2 (-2b_2 + a_3 - b_3 l)x^3 - l^2 (l^2 - 1) b_2^2 x^2 + l^3 b_2^3 x, \\ Y' &= (l^2 - 1)^2 (-3b_2 + a_3 - b_3 l + l^2 b_2)x^3 + l(l^2 - 1)(2l^2 - 3) b_2^2 x^2 + l^4 b_2^3 x, \\ Z' &= \left((l^2 - 1)x + l b_2\right)^3 \end{aligned} \tag{23}$$

bulunur Buradan (23) denklemi sonsuzda bir $S$ cusp noktaya sahip rasyonel kübik bir timelike eğri olduğu söylenir. Bu eğri $x = 0$ için orijinden geçer ve $O$ noktasında teğeti $d$ doğrusu ile çakışır. $O$ noktasından farklı $x = -\frac{l b_2}{l^2 - 1}$ ifadesine karşılık gelen noktalar $d$ doğrusu ve Lorentz büküm çemberinin kesişimini vermektedir. Buradan sonuç olarak $S$ cusp noktası orijinal pol doğrusu $d$ 'ye dik doğru üzerindedir.

Özel olarak $d$ doğrusu $OX$ ekseni ile çakışırsa $l = 0$ için (23) denkleminden $X' = 0, Y' = a_3 - 3b_2$ ve $Z' = -1$ elde edilir. Bu nokta ise önceden ifade edilen $H$ noktasıdır.

$A$ noktası $F=0$ eğrisinin bir noktası ise (16) denkleminden,

$$X':Y':Z'=b_2xy:b_2y^2:N_0$$

elde edilir ve (15) denklemi dikkate alındığında aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 3.** *$A$ noktası Lorentz düzleminde çembersel nokta eğrisinin bir noktası ise $A'$ birinci eğrilik merkezi ile $A''$ ikinci eğrilik merkezi çakışır.*

Ayrıca bu teoremden dolayı $A'$ birinci eğrilik merkezinde $k'$ evolütünün bir cusp noktasına sahip olduğu söylenebilir. $(b_2, a_3, b_3)$ ani invaryantlarının belli şartları sağlaması durumunda başka özel bir durumla karşılaştırma yapılabilir. Bunun için aşağıdaki örnekler verilebilir.

**Örnek 1.** $2a_3-7b_2=0$ ise $A''$ eğrilik merkezinin geometrik yeri olan Lorentz çemberinin $OY$ ekseni ile kesişimi olan $H$ noktası $O$ noktası ile çakışır.

**Örnek 2.** $a_3=b_3=0$ olması durumunda Lorentz düzleminde eliptik hareket elde edilir. O halde Lorentz düzleminde eliptik hareketin olması durumunda (17) denkleminden

$$F=-3b_2xN_0$$

ve (22) denkleminden $C$ Lorentz çemberinin denklemi,

$$4X'^2-4Y'^2-16b_2Y'-7b_2^2=0$$

bulunur. Bu Lorentziyan çemberinin merkezi $(0,2b_2)$ ve yarıçapı $4R^2+9b_2^2=0$ dır. $A''$ eğrilik merkezinin geometrik yeri olan Lorentz çemberinin $OY$ ekseni ile kesişimi olan $H$ noktası ise $\left(0,\dfrac{-7b_2}{2}\right)$ şeklinde bulunur.

## Kaynaklar

[1] Müller R. 1962. Papers on Geometrical Theory of Motion Applied to Approximate Straight Line Motion. Translated from the German by D. Tesar, Kansas State University Bulletin, Special Report 21, V+265pp.
[2] Müller R. 1920. About the Curvature of the Path Evolutes of Rigid Plane Systems, I.e. 23-40. Translation of Uber die Krfimmung der Bahnevoluten bei Starren Ebenen Systemen, Z. Math. Physik, 36: 193-205, 1891. See M. Krause, Analysis der Ebenen Bewgung, Berlin-Leipzig, 111-122.
[3] Bottema O. 1961. On Instantaneous Invariants, Proceedings of the International Conference for Teachers of Mechanisms. New Haven (Ct), Yale University, pp: 159–164.
[4] Bottema O., Roth B. 1990. Theoretical Kinematics. Dover, New York.
[5] Roth B. 2015. On the Advantages of Instantaneous Invariants and Geometric Kinematics. Mech. Mach. Theory, 89: 5–13.
[6] Veldkamp G.R. 1963. Curvature Theory in Plane Kinematics. J.B. Wolters Groningen, PhD thesis.
[7] Bottema O. 1981. Secondary Centres of Curvatures for the Point-Paths of a Planar Motion. Mechanism and Machine Theory, 16: 147–151.
[8] Eren K., Ersoy S. 2018. Circling-Point Curve in Minkowski Plane. Conference Proceedings of Science and Technology, 1 (1): 1–6.
[9] Eren K., Ersoy S. 2018. Cardan Positions in the Lorentzian Plane, Honam Mathematical J., 40 (1): 185–196.

[10] Eren K., Ersoy S. 2019. A Comparison of Original and Inverse Motion in Minkowski Plane. AAM Intern, 5: 56-67.
[11] Eren K., Ersoy S. 2018. Burmester Theory in Cayley–Klein Planes with Affine Base. Journal of Geometry, 109 (3): 45-57.
[12] Cera M., Pennestrì E. 2018. Generalized Burmester Points Computation by means of Bottema's İnstantaneous İnvariants and İntrinsic Geometry. Mechanism and Machine Theory, 129: 316–335.
[13] Fankhanel A. 2012. On Conics in Minkowski Planes. Extracta Mathematicae, 27 (1): 13–29.
[14] Aceff-Sánchez F., Del Riego Senior L. 2007. Geometry of the Conics on the Minkowski Plane. https://arxiv.org/abs/0712.2234v1 (Erişim tarihi: 13.12.2007).
[15] Horváth Á.G. 2016. Constructive Curves in Non-Euclidean Planes (Plenary Lecture). 19-th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, 4-6 September, Abstract Book, 1s. Starigrad-Paklenica.