Bir Şans Probleminin Bazı Aritmetik İntegralin Hesabına Tatbiki

Dr. M. Emin Altan

Şans problemi olarak spor-toto'yu seçmiş oluyorum. Spor-toto göz önüne alınan futbol maçlarının doğru neticesini tahmin etme oyunudur. Bu oyunda takımlar arasında yapılan her futbol maçı bir satıra yazılmıştır. Oyuna iştirâk edenler her satıra yazılı maçın karşısına tahmin ettiği neticeyi yazacaktır. Tabiatiyle bu tahmin birinci takımın galip, mağlup ve berabere kalmasına göre üç halden birisini seçmektir.

Böyle bir oyunda hatıra şu sualler gelebilir: Bu şekilde tahminleri yapılan n maçlı spor-toto fişlerinde birbirinden farklı kaç sütun vardır? Bu sütunların bir tanesi bütün oyunların neticesine uygun olduğuna göre; bir eksik doğru tahminli, iki eksik doğru tahminli,... kaç sütun vardır?

Bu yazıda bu soruların cevaplarından faydalanarak bazı aritmetik integralin hesaplanması açıklanacak ve sonra yurdumuzda oynanan 13 satırlı spor-toto için yukardaki soruların cevapları verilecektir.

1. Tarif.— Eğer bir fonksiyon, değişkenin yalnız tam ve pozitif sayıları için tarif edilmişse, fonksiyona *aritmetik fonksiyon* denir.

Örnek: $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$f(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)\,n$

fonksiyonları birer aritmetik fonksiyondur.

$f(n)$ aritmetik ise

$$\sum_{1}^{n} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \mathrm{F}(n)$$

toplamı ile tarif edilen fonksiyon da aritmetik fonksiyon olup $f(n)$ in 1 den n e kadar *aritmetik integrali* denir.

2. Bu yazıda aşağıdaki şekilde verilen aritmetik fonksiyonların 1 den n ye kadar aritmetik integralini bulmak için bir şans probleminden (spor-toto) faydalanma şekli izah edilecektir.

Fonksiyonlar :

(1) $f_1(n) = n$

(2) $f_2(n) = n\,(n+1)$

(3) $f_3(n) = n\,(n+1)\,(n+2)$

(4) $f_4(n) = n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

3. *n satırlı spor-toto fişleri.*— n tane futbol maçı mevcut olsun; her maçın neticesini tahmin ederek (bu tahmin birinci takımın galip, mağlup ve berabere kalmasını ifade etmek üzre üç türlüdür) n satıra yazalım.

Bu şekilde tanzim edilen fişler için aşağıdaki suallere cevap arıyalım :

a) $(n-1)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T^1_n sayısı nedir ?

b) $(n-2)$ » » » » » T^2_n » »

c) $(n-3)$ » » » » » T^3_n » »

⋮ ⋮

Yazının konusu olan aritmetik integralleri hesap etmek için yukardaki sualleri iki farklı metodla cevaplandıracağız ve sonra bu cevapları eşitliyeceğiz.

4. Cevaplar. a) $(n-1)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T^1_n sayısının hesabı. *1 inci çözüm:* n satırdan $n-1$ doğru olanlarını almak, n eleman içinde her satıra bir yanlış koymaktır. Böylece n elemanın 1 erli kombinasyonunu teşkil etmiş oluyoruz. Her satıra iki farklı yanlış tahmin konulacağından çözüm sayısı $2 \cdot K^1_n = 2n$ dir(*).

2 inci çözüm. Her satırda doğru tahmin yerine 2 yanlış tahmin yazarsak, n satırı doğru olan bir sütundan $n-1$ satırı doğru ve birbirinden farklı $2n$ tane sütun elde edilir. O halde $T^1_n = 2n$ dir.

(*) n elemanın p şerli kombinasyonu olan K^p_n bazı kere $\binom{n}{p}$ şeklinde de gösterilir ve değeri $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$ dir.

b) $(n-2)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T_n^2 sayısının hesabı, *1 inci çözüm*: Her iki satırında yanlış tahmin bulunan sütun sayısı n elemanın 2 şerli kombinasyon sayısı olan K_n^2 dir. Her yanlış 2 türlü olacağından, iki satırda yanlış 2^2 türlü olup bütün yanlış tahminli sütunların sayısı $T_n^2 = 2^2 K_n^2 = 4\frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1)$ dir.

2 inci çözüm: Fişlerin tertibini şu şekilde yapalım: Birinci satırı yanlış tahminde alalım ve bu satırı sabit tutarak sırasiyle değer satırlara yanlış tahminler yazarsak bu şekilde tanzim edilen sütunların sayısı $2\,T_{n-1}^1$ dir. Sonra ikinci satırı yanlış olarak sabit tutsak ve diğer satırları sırasiyle yanlış yazsak, böylece elde edilen sütunların sayısı da $2\,T_{n-2}^1$ olur. Bu şekilde son satıra kadar devam edersek şu eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} T_n^2 &= 2\,T_{n-1}^1 + 2\,T_{n-2}^1 + \cdots + 2\,T_1^1 \\ &= 2(T_{n-1}^1 + T_{n-2}^1 + \cdots + T_1^1) \end{aligned}$$

burada T_i^1 ler yerine (a) daki değerleri yazılırsa

$$\begin{aligned} T_n^2 &= 2[2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2\cdot 2 + 2\cdot 1] \\ &= 4[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] \end{aligned}$$

T_n^2 yerine 1 inci çözümdeki değeri alınırsa

$$(1) \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

bulunur. Bu da $f_1(n) = n$ aritmetik fonksiyonunun 1 den $n-1$ e kadar integralidir. Yâni

$$\sum_1^{n-1} f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

yazılır. 1 den n e kadar integral için $n-1$ yerine n alınır böylece

$$(1') \qquad \sum_1^{n} f_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

elde edilir.

c) $(n-3)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T^3_n sayısının hesabı. *1 inci çözüm:* a) ve b) de olduğu gibi yanlışların kombinasyonu ile $T^3_n = 2^3 K^3_n = 8 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ bulunur.

2 inci çözüm: (a ve b) de yapılan fiş tanzimine benzer yol takip ederiz. Bu halde yalnız önce birinci ve 2 inci satırları yanlış olarak alır diğer satırlara sırasiyle yanlış tahminler yazarsak böylece elde edilen sütunların toplamı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$T^3_n = 2\,T^2_{n-1} + 2\,T^2_{n-2} + \cdots + 2\,T^2_{n-(n-2)}$$

T^2_i ler yerine (b) deki değerler alınırsa

$$\begin{aligned} T^3_n &= 2\,[2(n-1)(n-2) + 2(n-2)(n-3) + \cdots + 2 \cdot 2 \cdot 1] \\ &= 4\,[(n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \cdots + 2 \cdot 1] \end{aligned}$$

bulunur. T^3_n yerine 1 inci çözümdeki değeri alınırsa

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

bulunur. Bu $f_2(n) = n(n+1)$ aritmetik fonksiyonunun 1 den $(n-2)$ ye kadar aritmetik integralidir. 1 den n ye kadar aritmetik integral için bulunan eşitlikte $(n-2)$ nin yerine n almalı, böylece

$$\sum_1^n f_2(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

elde edilir.

d) $(n-4)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T^4_n sayısının hesabı. *1 inci çözüm:* $T^4_n = 2^4 K^4_n = 16 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

2 inci çözüm:

$$T^4_n = 2\,T^3_{n-1} + 2\,T^3_{n-2} + \cdots + 2\,T^3_{n-(n-3)}$$

T^3_i ler yerine (c) deki değerleri yazılırsa

$$T_n^4 = 2\left[\frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{3} + \frac{4(n-2)(n-3)(n-4)}{3} + \cdots + \frac{4(3\cdot 2\cdot 1)}{3}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\left[1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)\right].$$

T_n^4 yerine 1 inci çözümdeki değeri alınırsa

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

bulunur. Bu $f_3(n) = n(n+1)(n+2)$ nin 1 den $(n-3)$ e kadar aritmetik integralidir. 1 den n ye kadar aritmetik integrali ise bulunan eşitlikte $(n-3)$ ün yerine n almalı; böylece

$$\sum_1^n f_3(n) = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

elde edilir.

e) $(n-5)$ tane doğru tahmini gösteren sütunların T_n^5 sayısının hesabı. *1 inci çözüm* : $T_n^5 = 2^5 K_n^5 = 32 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

2 inci çözüm :

$$T_n^5 = 2\,T_{n-1}^4 + 2\,T_{n-2}^4 + \cdots + 2\,T_{n-(n-4)}^4$$

T_i^4 ler yerine (*d*) deki değerleri yazılırsa

$$T_n^5 = 2\left[\frac{2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3} + \frac{2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{2(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}{3}\right]$$

bulunur. T_n^5 in 1 inci çözümdeki değeri alınırsa

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$$
$$= \frac{n(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n}{5}$$

bulunur. Buradan da

$$\sum_{n=1}^{n} f_4(n) = 1\cdot2\cdot3\cdot4 + 2\cdot3\cdot4\cdot5 + \cdots + (n+1)(n+2)(n+3) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilebilir.

Kaç türlü spor-toto sütunu doldurulabilir?

Bu sualin cevabı bütün eksik tahminli sütunlar ile bir tane olan tam tahminli sütunun toplamıdır. Yâni aşağıdaki toplamı hesap etmek lâzımdır:

$$T^0_n + T^1_n + T^2_n + \cdots + T^i_n + \cdots + T^n_n = \sum_{i=0}^{n} T^i_n$$

Burada T^i_n sembolünde üst indisler eksik tahmin sayısını alt indisde satır (maç) sayısını gösteriyor; T^0_n da hiç eksik tahmin olmıyan, tam tahmini gösteren sütun sayısıdır. Bunlar için (*a*), (*b*),... hallerinde bulduğumuz değerleri alırsak

$$T^0_n = 2^0 K^0_n = 1$$

$$T^1_n = 2^1 K^1_n$$

$$T^2_n = 2^2 K^2_n$$

$$\vdots$$

$$T^n_n = 2^n K^n_n$$

O halde

$$\sum_{i=0}^{n} T^i_n = 1 + 2K^1_n + 2^2 K^2_n + \cdots + 2^n K^n_n = (1+2)^n = 3^n$$

bulunur.

$n=13$ için adedî değerler:

12 si doğru olan sütun sayısı $T^1_{13} = 2\ K^1_{13} = 2\cdot13 = 26$

11 i » » » $T^2_{13} = 2^2 K^2_{13} = 2^2\cdot\frac{13\cdot12}{1\cdot2} = 312$

10 ı » » » $T^3_{13} = 2^3 K^3_{13} = 2^3\frac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3} = 2288$

En nihayet birbirinden farklı bütün sütunların sayısı :

$$\sum_{i=0}^{13} T^{i}_{13} = 3^{13} = 1594323.$$

BİBLİYOĞRAFYA

1) *Hamit DİLGAN* : «Yüksek Matematik» I İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı 444, İstanbul 1961.

2) *Karl WELNITZ* : «Klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung» Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig 1962.

3) *Clement V. DURREL* : «Advanced Algebra» I. G. Bell and Sons, Ltd. London 1949.