Marxgil Muvazeneli - Büyüme Hakkında

Doç. Dr. S. Divitçioğlu

Klâsik büyüme teorisi ile Harrod - Domar'ın post - Keynesgil modeli arasındaki benzerlik Kaldor tarafından [1] belirtilmişti. Her iki teoriye göre kârın tümü tasarruf edilir ve bütün ücretler yoğaltılırsa, kâr haddi ekonominin büyüme haddine eşittir.

von Neumann'ın genel denge modelinde [2] de aynı şeyi görüyoruz. Modele göre ekonominin bütün kesimleri aynı büyüme haddi ile artmaktadır ve bu had kâr haddine eşittir.

von Neumann'ın muvazeneli - büyüme teoremi ancak tek maximal büyüme haddinin varlığını isbat edebilmekte idi. Ekonominin muhakkak bu hadde yöneleceği ise Somuelson, Solow ve Dorfman tarafından «*Turnpike* Teoremi» [3] adı altında gösterilmiştir.

Aşağıda yapılan analiz sayılan bu şöhretli teorem ve teorilere yeni bir şey katmamaktadır. Analiz orijinal olmak iddiasından çok; i) modern büyüme teorisini marxgil [4] bir açıdan incelediğinden ve ii) sermaye - emek haddi ile büyüme haddi arasındaki sabit bir oranı gösterdiğinden, dolayı önemli olabilir :

Rumuzlar :

P = Toplam ürün
K = Sermaye
L = Emek
k = Sermaye-çıktı oranı

---

1) N. Kaldor, «Capital Accumulation and Economic Growth» *The Theory of Capital,* Editör; F. D. Lutz, Macmillan, London 1963.

2) von Neumann, «A Model of General Economic Equilibrium, «*Review of Economic Studies.* Vol. XIII, 1945.

3) Dorfman, Samuelson, Solow, *Linear Programming and Economic Analysis,* McGraw Hill, New York, 1958.

4) K. Marx, *Le Capital,* Alfred Costes, Paris, (4a IX - 116, 4b III - 206, 4c IX - 145).

g = Büyüme haddi
α = P'ye göre marjinal tasarruf eğsinimi
q = Sermayenin organik birleşimi (sermaye - emek haddi)
I = Yatırımlar
S = Artık - kıymet (kâr)
β = S'e göre marjinal tasarruf eğsinimi
ρ = Artık - kıymet (sömürülme) haddi
r = Faiz haddi
η = Kâr haddi.

Tanımlar :

Sermaye - çıktı haddi,

$$k = \frac{K}{P} \qquad k > 1 \qquad \text{(a)}$$

Harrod - Domar büyüme denklemi,

$$g = \frac{\alpha}{k} \qquad 0 < g < 1 \qquad \text{(b)}$$

Sermayenin organik birleşimi,

$$q = \frac{K}{L} \qquad \text{(c)}$$

Artık - kıymet haddi,

$$\rho = \frac{S}{L} \qquad \rho \geq 1 \qquad \text{(d)}$$

Kâr haddi,

$$\eta = \frac{S}{K+L} \qquad 0 < \eta < 1 \qquad \text{(e)}$$

Model :

1 — Cobb - Douglas üretim fonksiyonunu yazalım,

$$P = b\,K^{1-m}\,L^{m} \qquad (1.1)$$

Bu fonksiyonun her iki tarafını K ile bölüp, tanım a ve b'den faydalanalım.

$$g = \alpha\,b\,K^{-m}\,L^{m}$$

$\alpha b = \lambda$ bir sabite olduğundan,

$$g = \lambda q^{-m} \qquad (1.2)$$

Bu denklem temel (marxgil) büyüme denklemidir. Denkleme göre sermayenin organik birleşimi (sermaye - emek oranı) arttıkça, büyüme haddi azalır.

2 — Öte yandan, diyelim ki yatırımlar ayni zamanda artık - kıymetin de bir fonksiyonudur.

$$I = \beta S \qquad \beta > \alpha$$

Bu fonksiyonel bağıntıya dayanarak şu marxgil özdeşlik yazılabilir.

$$g = \beta \frac{\rho}{q} \qquad (2.1)$$

(2.1) denklemi tıpkı (1.2) denklemi gibi bir büyüme denklemidir. İlki sermayenin büyüme haddini, ikincisi millî ürünün büyüme haddini göstermektedir. Muvazeneli - büyüme içereğinde her iki büyüme haddi birbirine eşit olduğundan,

$$\rho = \gamma q^{1-m} \qquad (2.2)$$

Burada $\left(\gamma = \frac{\lambda}{\beta}\right)$ bir sabitedir.

Denkleme göre artık - kıymet (sömürülme) haddi sermayenin organik birleşiminin artan bir fonksiyonudur [5]. Yahut başka bir deyişle sermaye - emek oranı iki faktörün pozitif verimliliği ile artarken, artık - kıymet - emek oranı da yükselmektedir [6].

---

5) H. D. Dickinson, «The Falling Rate of Profit and Marxian Economics» *Review of Economic Studies*, Vol. XXIV, 1957, (5a).

6) Artık - kıymet haddinin sermaye ve emeğin bir fonksiyonu oluşu şöyle gösterilebilir : J. Robinson'un işaret ettiği gibi «sermaye verimlidir demekle, sermaye emeği verimli kılmak için gereklidir, demenin bir farkı» yoksa (J. Robinson, *An Essay on Marxian Economics, London* Mcmillan, 1952, s. 18) :

$S = \phi (K, L)$

Eğer ϕ ilk dereceden homogen ise fonksiyonun her iki tarafının L ile bölünmesi sonucu değiştirmez.

$\rho = \varphi (q)$

Öyle ise, artık - kıymet haddi sermayenin organik birleşiminin bir fonksiyonudur.

$$\frac{d\rho}{dq} = \gamma\,(1-m)\,q^{-m} \qquad (2.3)$$

Fonksiyonun ikinci türevi ise,

$$\frac{d^2\rho}{dq^2} < 0$$

Öyle ise, sermayenin organik birleşimi arttıkça, artık - kıymet haddi ancak azalan bir oranda artmaktadır.

3 — Marx'a göre kâr haddi «iki temel etken tarafından belirlenmektedir : artık - kıymet haddi ve sermayenin organik birleşimi» [7]. Teorinin ham şekli ile, artık - kıymet haddi arttıkça kâr haddi artar, sermayenin organik birleşimi arttıkça, kâr haddi azalır. Bu ifadeyi şöyle denklemleştirelim [8] :

$$\eta = \frac{\rho}{q+1} \qquad (3.1)$$

Diyelim ki,

$$Q = q+1$$

Sermayenin organik birleşimi büyüdükçe kâr haddinin nasıl gelişeceğini gösterebilmek için (3.1) in Q'ye göre kısmî türevini alalım.

$$\frac{\delta\eta}{\delta Q} = \frac{1}{Q^2}\left(Q\frac{\delta\rho}{\delta Q} - \rho\right) \qquad (3.2)$$ [9]

---

7) K. Marx *ibid,* cilt IX, s. 116.

8) H. D. Dickinson *ibid,* S. Divitçioğlu, *İktisadî Büyüme : Marx'ın Görüşleri ve Harrod'la Karşılaştırma,* İstanbul, 1959, s. 67. I. Adelman, *Theories of Economic Growth and Development,* Stanford University Press, 1961, s. 82.

9) (3.2) deki $\left(Q\frac{\delta\rho}{\delta Q} - \rho\right)$ teriminin positif olduğunu gösterelim :

$$\frac{\delta\rho}{\delta q} = \frac{\delta\rho}{\delta Q}$$

olduğundan (2.3)'ü (3.2) de yerine korsak,

$$\frac{\delta\eta}{\delta Q} = \frac{1}{Q^2}\left[Q\,\gamma\,(1-m)\,q^{-m} - \rho\right]$$

Ayrıca,

Dip - not 9'da isbat edildiği gibi,

$$\frac{\delta \eta}{\delta Q} > 0$$

Ayrıca (3.2) inin Q ya göre ikinci türevini alalım.

$$\frac{\delta^2 \eta}{\delta Q^2} = \frac{\delta^2 \rho}{\delta Q^2} - 2 \frac{\delta \eta}{\delta Q} \tag{3.3}$$

Bilindiği gibi $\frac{\delta^2 \rho}{\delta Q^2} < 0$ olduğundan,

$$\frac{\delta^2 \eta}{\delta Q^2} < 0$$

Öyle ise, sermayenin organik birleşimi arttıkça kâr haddi azalan bir oranda artar. Eğer, bir önceki dip - nota göre, $\frac{m}{Q} = \frac{1}{Q^2}$ olursa, eğrinin eğimi bir maximuma yaklaşır.

$$\frac{\delta \eta}{\delta Q} = \text{Max}$$

4 — Kâr haddini marxgil büyüme sistemine yerleştirmek için (2.1) deki artık - kıymet haddini (3.1) de yerine koyalım.

$$g = \beta \eta \left(\frac{q+1}{q}\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{1-m}{K} = \frac{m}{L}$$

orantısına göre soldaki terimi basitleştirirsek (bize kısmî türevin işareti gerektiğinden bunu yapabiliriz).

$$\frac{1}{Q^2} (m\,Q - 1)$$

yahut,

$$\frac{m}{Q} - \frac{1}{Q^2}$$

elde edilir. Q^2 oldukça büyük bir pozitif pay olduğundan,

$$\frac{m}{Q} > \frac{1}{Q^2}$$

Öyle ise,

$$\frac{\delta \eta}{\delta Q} > 0$$

bulunur.

Denklemin her iki tarafını q ile çarpalım,

$$q\,g = \beta\,\eta\,Q \qquad (4.2)$$

Bunun tam diferansiyelini alırsak,

$$q\,dg + g\,dq = \beta\eta\,dQ + \beta Q\,d\eta$$

$$\frac{d\,q}{d\,Q} = 1$$

olduğundan,

$$\frac{d\,g}{d\,Q} = \frac{\beta\,Q\,\frac{d\,\eta}{d\,Q} + \beta\eta - g}{q} \qquad (4.3)$$

Pay pozitif olduğundan,

$$\frac{d\,g}{d\,Q} > 0$$

ve ayrıca

$$\frac{d^2\,g}{d\,q^2} < 0$$

bulunur.

Denklem (1.2) ile (4.1) aynı şeyi göstermektedir. Her ikisinde de sermayenin organik birleşimi arttıkça ekonominin büyüme haddi azalan bir oranda artar. (1.2) den farklı olarak (4.1) denklemi bu durumun sebeplerini ortaya koymaktadır. Sermayenin organik birleşimi haddindeki değişmeler *via* artık - kıymet haddi, kâr haddine tesir etmektedir. Kâr hadlerindeki değişmeler ise büyümeyi etkilemektedir. Büyüme haddi kâr haddine uyarak azalan bir oranda artmaktadır. Bundan dolayı eğrinin eğiminin bir maximuma varması beklenebilir.

$$\frac{d\,g}{d\,Q} = \text{Max.}$$

Şimdi (4.3) türevinin payına bir göz etelım. Eğer ekonomide kâr haddinin maximisationu gerçekleşmişse pay şu şekli alır.

$$\beta\eta - g$$

Öyle ise, sermayenin organik birleşime göre büyüme haddinin maximisation'u ancak,

$$g = \beta\eta \qquad (4.4.1)$$

halinde ortaya çıkabilir. Fakat Marx - von Neumann - Leotief [10] sisteminde olduğu gibi «dışsal nihaî yoğaltım» sıfır ise, yani yoğaltım malları da emek üretmek için bir girdi olarak kabul ediliyorsa, marjinal yoğaltım eğrisinimi sıfıra eşit olacağından,

$$\beta = 1$$

ve

$$g = \eta \qquad (4.4.2)$$

bulunur.

Öyle ise, $g = \beta\eta$ veya $g = \eta$ şartları gerçekleştiği vakit ekonomide *tek maximal* sermayenin organik birleşimi (sermaye - emek oranı) ve *tek maximal* kâr haddi ile sağlanan *tek maximal* bir büyüme haddi vardır. Bu tek maximal büyüme haddi ise kâr haddine eşittir. Tek maximal hadleri birer yıldızla gösterelim.

$$g = g^*$$
$$q = q^*$$
$$\eta = \eta^*$$

Büyüme haddi, kâr haddi ve sermaye - emek [11] haddinin bu denli tek maximal hadlere erişmesi ile ekonomi muvazeneli olarak büyümektedir. Bu muvazeneli - büyüme von Neumann'ın devamlı maximal büyüme yolu ile aynıdır. Uzun sürede ekonomi kendi sermayesinin organik birleşimini yani, sermaye stoku ve emek gücünün oranını öyle bir şekilde ayarlar ki, bunun büyüme haddi ile oranı belirli bir *ışın* üzerinde olur (sabit olur). Bu ışın von Neumann ışınına yaklaşık olarak benzemektedir.

Yapılan matematik gösteri ile ekonomide bir Marx - Neumann ışınının *varlığı* isbat edilmekte idi. Şimdi de ekonominin muhakkak bu ışına yöneleceğini (*Turnpike* Teoremi) gösterelim.

Hemen söyleyelim ki *yeterlik* şartı yapılan analizin içindedir. Bir yandan marxgil modele göre «kapitalist bir ekonomide üretimin amacı artık - kıymettir» [12]. Yani kapitalist daima çoğalan bir ar-

---

10) W. W. Leontief, *The Structure of American Economy : 1919 - 1937*, Oxford University Press, New York, 1951.

11) R. Solow, «A Contribution to The Theory of Economic Growth» *Quarterly Journal of Economics, 1956*. H. Uzawa, «On a Two - Sector Model of Economic Growth», *Review of Economic Studies*, 1961.

12) K. Marx, *ibid*, cilt III, s. 206.

tık - kıymet elde etmek için üretim fonksiyonunu $S = \phi (K, L)$ düzenler. Öte yandan,

«...... kâr gayesi ve rekabet yoluyla malların minimum bir maliyet ile üretilmesini sağlayan sabit sermayenin kullanıldığı bir ekonomi, kapitalist üretim tarzına hastır...... Kapitalist üretim tarzı.. ekonomiyi sabit sermaye kullanmaya zorlar»[13] :

Böylece ekonomide sermayenin organik birleşimi gittikçe yükselecektir. İfade edilen iki hususu özetlersek :

$$\rho = \varphi (q) \quad \frac{d\rho}{dq} = 0, \quad \frac{d^2 \rho}{d q^2} < 0$$

Yani, kapitalistlerin tek amacı çoğalan artık - kıymet (kâr) elde etmek olduğundan, kapitalist üretim süreci içinde sermayenin organik bileşimi, yahut sermaye - emek oranı gittikçe artmak eğilimindedir. Bu ikili olğunun bir sonucu olarak ekonominin büyüme haddi *via* kâr haddi *via* artık - kıymet haddi azalarak artmakla ve bir maximuma doğru yönelmektedir.

Teorem : Artık - kıymet haddi ile sermaye - emek oranı arasındaki fonksiyonel bağıntıdan dolayı, sermaye - emek haddi ile büyüme haddi arasındaki oran bir sabiteye doğru yaklaşır. Yukardaki isbat, muvazenel - büyümenin istikrarı için hem *gereklilik,* hem de *yeterlilik* şartlarını gösterir.

5 — Tek maximal büyüme haddi hakkında söyliyeceklerimiz bu kadar. Şimdi de faiz haddi ile büyüme haddi arasındaki ilişkiyi inceliyelim. Eğer Cobb - Douglas üretim fonksiyonunun K ya göre türevini alırsak,

$$\frac{\delta P}{\delta K} = b (1 - m) q^{-m} \qquad (5.1)$$

Bu kısmî türev sermayenin marjinal verimini göstermektedir. Dikkat edilirse sermayenin marjinal verimi ile artık - kıymet haddinin sermayenin organik birleşimine göre değişmesi arasında sıkı bir benzerlik vardır. Bundan dolayı :

$$\frac{\delta \rho}{\delta q} = \frac{\alpha \delta P}{\beta \delta K}$$

13) K. Marx, *ibid,* cilt IX, s. 145.

Tabiatıyla denge şartları gerçekleştiği vakit sermayenin marjinal verimi faiz haddine eşit olduğundan,

$$\frac{\delta \rho}{\delta q} = r \frac{\alpha}{\beta} \tag{5.2}$$

Eğer (5.2) yi (3.2) deki yerine korsak,

$$\frac{\delta \eta}{\delta Q} = \frac{1}{Q^2}\left(Q r \frac{\alpha}{\beta} - \rho\right)$$

ya da,

$$\frac{\delta \eta}{\delta Q} = \frac{1}{Q}\left(r \frac{\alpha}{\beta} - \eta\right)$$

Öyle ise, kâr haddinin sermayenin organik birleşimine göre maximisation'un aynı zamanda,

$$\eta = r \frac{\alpha}{\beta}$$

eşitliğine bağlıdır. Marx - von Neuman - Leontief sisteminde $\alpha = \beta = 1$ sayılacağından,

$$\eta = r$$

Tabiatıyla muvazeneli - büyüme içereğinde olduğumuzdan,

$$g^* = \eta^* = r^*$$

Bu son durum von Neumann'ın varmış olduğu sonuçtur. Muvazeneli - büyümede tek maximal büyüme haddi, faiz haddine eşittir.

KATKI

Kâr haddi ile büyüme haddinin eşanlı maximisation'unu Langrange çarpanı (μ) ile gösterelim.

Max kılınacak fonksiyon,

$$g = f(q, \eta)$$

Şu tahditlere bağlıdır.

$$\eta = h(q)$$

Yeni fonksiyonu yazalım :

$$z = f(q, \eta) + \mu h(q)$$

Fonksiyonun kısmî türevlerini alt şeklinde gösterelim :

$$Z_q = f_q + \mu h_q = 0$$

$$Z_\eta = f_\eta + \mu = 0$$

Öyle ise,

$$f_q - h_q f_\eta = 0$$

Eğer,

$$h_q = 0$$

ise,

$$f_q = 0$$

olur.