

AKÜ FEMÜBİD 19 (2019) 031303 (605-614)

AKU J. Sci. Eng. 19 (2019) 031303 (605-614)

DOI: 10.35414/akufemubid.583357

Araştırma Makalesi / Research Article

Minkowski Uzayında Sabit Eğrilikli İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri için Bazı Karakterizasyonlar

Melek ERDOĞDU^{1*}, Ayşe YAVUZ²¹ Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Konya² Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Konya.*Sorumlu yazar e-posta: merdogdu@erbakan.edu.tr ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9610-6229>
ayasar@erbakan.edu.tr ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0469-3786>

Geliş Tarihi: 27.06.2019;

Kabul Tarihi: 16.10.2019

Öz

Anahtar kelimeler

Minkowski Uzayı;
İnvolut-Evolüt Eğrileri;
W Eğrisi;
Burulmuş Eğri;
Frenet Eğrileri

Bu çalışmada, Minkowski uzayında sabit eğrilikli İnvolut – Evolüt eğri çiftlerine ait pozisyon vektörlerinin karakterizasyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlara bağlı olarak elde edilmiştir. Eğri çiftleri Frenet vektör alanlarının Minkowski uzayında sahip olduğu karakterlere göre ayrı ayrı ele alınmıştır. Aynı zamanda bu eğri çiftleri ile ilgili bazı sonuçlar ortaya çıkarılmıştır. Elde edilen bulgular görselleştirilmiş örnekler ile desteklenmiştir.

Some Characterizations for Involute-Evolute Curve Couples with Constant Curvatures in Minkowski Space

Abstract

Keywords

Minkowski Space;
Involute – Evolute
Curves;
W-Curve;
Twisted Curve;
Frenet Curves

In this study, the characterization of position vectors belonging to Involute - Evolute curve pairs with constant curvature in Minkowski space are obtained depending on differentiable functions. The curve couples are investigated according to the characteristics of Frenet vector fields in Minkowski space, separately. At the same time, some conclusions about these pairs of curves were obtained. The findings were supported with visualized samples.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Eğriler kavramı diferansiyel geometriye ait uygulaması çok olan önemli konulardan birisidir. Literatürde Öklid ve Öklid dışı geometrilere eğriler konusunu ele alan birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Bu kapsamda eğriler özel eğriler olarak da ele alınmış ve eğrinin Frenet vektörlerine göre incelenerek eğri çiftleri tanımları elde edilmiştir. Bu eğri çiftlerinden birisi de İnvolut-Evolüt eğrileridir. İnvolut eğri kavramı optik üzerine yapılan çalışmalar sonucunda ortaya atılmıştır. İnvolut-Evolüt eğri

çiftleri her noktasında teğet vektörleri dik olan eğriler olarak tanımlanmaktadır Hacısalihoğlu (1983). Aynı zamanda eğrinin eğrilik ve torsiyonu eğrinin biçimi, hangi tür bir eğri olduğunu belirlemek için önemli bir yer tutmaktadır. Bunlar arasında burulmuş eğri ve W-eğrisi de bulunmaktadır. Burulmuş eğri eğrilik ve burulma fonksiyonları sıfırdan farklı olan eğriler, W-eğrisi ise eğrilik ve burulma fonksiyonları sabit olan eğrilerdir. Chen (2001), çalışmasında, m_0 , m_1 , m_2 diferansiyellenebilir fonksiyonları ile her α burulmuş

eğrisinin aşağıdaki şekilde ifade edilebileceğini söylemiştir.

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (1)$$

Bununla birlikte Chen ve ark. (2006), çalışmalarında Öklidiyen uzayında W -eğrilerinin karakterizasyonlarını ele almıştır.

Involüt evolüt eğri çifti ile ilgili literatürde önemli çalışmalar mevcuttur. Bilici ve Çalışkan (2009, 2018), Minkowski 3-uzayında binormali timelike ve spacelike olan spacelike eğrilerin involütleri üzerine çalışmışlardır. Aynı zamanda Bilici ve Çalışkan (2011), Minkowski 3-uzayında timelike eğrilerin involütlerini inceleyen çalışmalarında timelike ve spacelike eğriler arasındaki uzaklığın sabit olduğunu da ortaya koymuşlardır. Bilici, Çalışkan ve Aydemir (2002), Bilici (2011) çalışmalarında involüt evolüt eğri çifti ile ilgili ilginç sonuçlar elde etmişlerdir. Bir diğer önemli çalışma olan Bilici ve Çalışkan (2019), spacelike binormal ile verilen bir spacelike eğrinin involütlerinin küresel göstergelerini ele almışlardır. Öte yandan, dual uzayda involüt eğrilerinin karakterizasyonuna ise (Şenyurt vd., 2015) çalışmasında detaylı olarak yer verilmiştir. Tüm bu çalışmalardan farklı olarak, ortak asimtotik involüte sahip yüzey ailelerini inceleyen çalışma da mevcuttur (Bayram, Bilici; 2016).

(Erdoğan, Yavuz; 2019) ve (Yavuz, Erdoğan; 2019) çalışmalarında Minkowski uzayında W -eğrisinin pozisyon vektörünün karakterizasyonunu farklı durumlar altında ele alarak incelemiş ve $m_0(s)$, $m_1(s)$, $m_2(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Aynı zamanda Öztürk ve Erdoğan, çalışmalarında Öklid uzayında sabit oranlı involüt – Evolüt eğri çiftlerini incelemiş ve bu eğrilerin T – sabit eğriler ve N – sabit eğriler olması için sonuçlar elde etmişlerdir (Öztürk, Erdoğan; 2018).

Büyükkütük, Öztürk (2015-1) çalışmalarında üç boyutlu Öklid uzayında sabit oran eğrilerini Bishop çatısı ile incelemiştir. Ardından dört boyutlu Öklid uzayında sabit oran eğrilerini paralel çatı yardımı ile ele almışlardır (Büyükkütük, Öztürk; 2015-2). Bükcü, Karacan (2007-1,2), çalışmalarında timelike ve spacelike eğrilerin İnvolut – Evolüt eğri çiftlerini

incelemiş ve Frenet elemanları arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır. Öztürk ve diğerleri, (2013) çalışmasında pseudo null eğrilerinin İnvolut eğrisinin olmadığını ispatlamışlardır.

Bu çalışmanın amacı, Minkowski uzayında sabit eğrilikli İnvolut – Evolüt eğri çiftlerine ait pozisyon vektörlerinin karakterizasyonlarını diferansiyellenebilir fonksiyonlara bağlı olarak elde etmektir. Bu kapsamda, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisine ait eğrilik ve burulma fonksiyonları sıfırdan farklı olan burulmuş eğri, eğrilik ve burulma fonksiyonları sabit olan W eğrisi ele alınmıştır. α eğrisinin bir involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisinin \tilde{m}_0 , \tilde{m}_1 ve \tilde{m}_2 diferansiyellenebilir fonksiyonlarına bağlı olarak eğrilik ve burulma değerlerinin farklı durumlarına göre elde edilmiştir. Elde edilen bulgular tartışma ve sonuç kısmında örnekler ile de desteklenmektedir.

2. Materyal ve Metod

Tanım 2.1. Her $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (2)$$

şeklinde tanımlanan çarpım ile birlikte \mathbb{R}^3 uzayına Minkowski uzayı denir ve \mathbb{R}_1^3 ile gösterilir (Walrave, 1995).

Tanım 2.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü timelike (spacelike) vektör ise α eğrisine timelike (spacelike) eğri denir. $\forall t \in I$ için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = -1$ ($\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 1$) ise α' ya birim hızlı timelike (spacelike) eğri denir (Walrave, 1995).

Tanım 2.3 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\forall t \in I$ için $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$ ise α eğrisine null eğri adı verilir.

Teorem 2.1 Birim hızlı null olmayan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa(s) & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa(s) & 0 & -\varepsilon_3 \tau(s) \\ 0 & \varepsilon_2 \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1 = \langle T(s), T(s) \rangle_L$, $\varepsilon_2 = \langle N(s), N(s) \rangle_L$, $\varepsilon_3 = \langle B(s), B(s) \rangle_L$ olmak üzere $\kappa(s)$ eğrilik ve $\tau(s)$

burulma fonksiyonudur. (Walrave, 1995; Inoguchi, 1998).

Tanım 2.4. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi için κ ve τ birer sabit fonksiyon ise α eğrisine W - eğrisi adı verilir (Gürpınar vd 2014).

Tanım 2.5. Birim hızlı null olmayan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi ile $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\tilde{\alpha}(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle \tilde{T}(s), T(s) \rangle = 0 \quad (3)$$

ise $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü denir (Do Cormo 1976; Bükücü, Karacan, 2007).

Teorem 2.2. $\tilde{\alpha}$ eğrisi; birim hızlı null olmayan $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin bir involütü ise λ sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s) \quad (4)$$

dir (Bukcu, Karacan, 2007)

Teorem 2.3. $\tilde{\alpha}$ eğrisi; birim hızlı timelike $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ olduğuna göre

$$\tilde{T}(s) = N(s), \quad (5)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} T(s) - \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} B(s), \quad (6)$$

$$\tilde{B}(s) = \frac{-\tau(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} T(s) - \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} B(s) \quad (7)$$

dir $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}}{|(-s + \lambda)\kappa(s)|}, \quad (8)$$

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{(-s + \lambda)\kappa(s)(\kappa(s)^2 - \tau(s)^2)} \quad (9)$$

(Karacan ve Bükücü, 2007).

Teorem 2.4. $\tilde{\alpha}$ eğrisi; birim hızlı spacelike asli normal vektör alanına sahip spacelike $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ olduğuna göre

$$\tilde{T}(s) = N(s), \quad (10)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 - \kappa(s)^2}} T(s) - \frac{\tau(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 - \kappa(s)^2}} B(s), \quad (11)$$

$$\tilde{B}(s) = \frac{\tau(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 - \kappa(s)^2}} T(s) - \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 - \kappa(s)^2}} B(s) \quad (12)$$

dir $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\sqrt{\tau(s)^2 - \kappa(s)^2}}{|(-s + \lambda)\kappa(s)|}, \quad (13)$$

$$\tilde{\tau}(s) = \tilde{\tau}(s) = \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{(-s + \lambda)\kappa(s)(\tau(s)^2 - \kappa(s)^2)} \quad (14)$$

(Bilici ve Çalışkan, 2009).

Teorem 2.5. $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike asli normal vektör alanına sahip spacelike $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ ise

$$\tilde{T}(s) = N(s), \quad (15)$$

$$\tilde{N}(s) = \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}} T(s) - \frac{\tau(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}} B(s), \quad (16)$$

$$\tilde{B}(s) = -\frac{\tau(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}} T(s) - \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}} B(s) \quad (17)$$

dir $\tilde{\alpha}$ eğrisinin eğrilik ve burulması $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}}{|(-s + \lambda)\kappa(s)|}, \quad (18)$$

$$\tilde{\tau}(s) = \frac{\kappa(s)\tau'(s) - \kappa'(s)\tau(s)}{(-s + \lambda)\kappa(s)(\tau(s)^2 + \kappa(s)^2)} \quad (19)$$

(Karacan ve Bükücü, 2007).

3. Bulgular

Chen, 2001'deki çalışmasında, m_0, m_1, m_2 birer diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere her α burulmuş (gergin) eğrisinin

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (20)$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir. $\tilde{\alpha}$ eğrisi birim hızlı α eğrisinin involütü olsun aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s) \quad (21)$$

Aynı zamanda $\tilde{m}_0(s), \tilde{m}_1(s), \tilde{m}_2(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları yardımıyla

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{m}_0(s)\tilde{T}(s) + \tilde{m}_1(s)\tilde{N}(s) + \tilde{m}_2(s)\tilde{B}(s) \quad (22)$$

olarak yazılabilir.

Bu bölümde birim hızlı null olmayan sabit eğrilikli eğrilerin İnvölüt-Evolüt eğrileri Frenet vektör alanlarının karakterine göre incelenmiştir.

3.1. Timelike Eğriler için Sabit Oranlı İnvölüt-Evolüt Eğri Çiftlerinin Bazı Karakterizasyonları

Bu bölümde sabit eğrilikli timelike eğriler için İnvölüt- Evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonları incelenmiştir. Önermelerin içerdiği diferansiyel denklemlerin çözümde ortaya çıkan öz değer ve özvektör probleminin bir sonucu olarak $\kappa^2 - \tau^2 > 0$ ve $\kappa^2 - \tau^2 < 0$ şeklinde iki ayrı durum mevcuttur. Bu durumlar dikkate alınarak elde edilen teoremler ifade edilmiştir.

Önerme 3.1.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike burulmuş eğrisi verilsin.

i) $b^2 = \kappa^2 - \tau^2 > 0$ olmak üzere α bir W - eğrisi ise pozisyon vektörü,

$$m_0(s) = c_0\tau + c_1\kappa\cosh bs + c_2\kappa\sinh bs - \frac{\tau^2}{b^2}s, \quad (23)$$

$$m_1(s) = -c_2b\cosh bs - c_1b\sinh bs + \frac{\kappa}{b^2}, \quad (24)$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cosh bs + c_2\tau\sinh bs - \frac{\kappa\tau}{b^2}s, \quad (25)$$

ii) $-a^2 = \kappa^2 - \tau^2 < 0$ olmak üzere α bir W - eğrisi ise pozisyon vektörü,

$$m_0(s) = c_0\tau + \kappa c_1\cos as + \kappa c_2\sin as + \frac{\tau^2}{a^2}s, \quad (26)$$

$$m_1(s) = c_1a\sin as - c_2a\cos as - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (27)$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos as + c_2\tau\sin as + \frac{\kappa\tau}{a^2}s. \quad (28)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir. Burada c_i ($0 \leq i \leq 2$) reel sabitlerdir(Erdoğan, Yavuz; 2019).

Teorem 3.1.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike burulmuş eğrisi verilsin, öyle ki

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (29)$$

şeklinde ifade edilsin ve $\kappa(s)^2 - \tau(s)^2 \neq 0$ olsun. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{m}_0(s)\tilde{T}(s) + \tilde{m}_1(s)\tilde{N}(s) + \tilde{m}_2(s)\tilde{B}(s) \quad (30)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\tilde{m}_0(s) = m_1(s), \quad (31)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{a}[\kappa(s)(-m_0(s) + s - \lambda) + \tau(s)m_2(s)], \quad (32)$$

$$\tilde{m}_2(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) - \kappa(s)m_2(s)], \quad (33)$$

şeklinde olup $\tilde{\alpha}(s) = a(s) + (-s + \lambda)T(s)$ ve $a = \sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}$ dir.

İspat. $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü ise (22) eşitliği sağlanır. Teorem 2.3. de verilen eşitlikleri denklem (30)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) = T(s) & \left(\frac{-\kappa(s)\tilde{m}_1(s) - \tau(s)\tilde{m}_2(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} \right) + N(s)\tilde{m}_0(s) \\ & + B(s) \left(\frac{-\tau(s)\tilde{m}_1(s) - \kappa(s)\tilde{m}_2(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

olduğu görülür. Öte yandan (29) eşitliği denklem (21)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s) = (m_0(s) - s + \lambda)T(s) + m_1(s)N(s) \\ + m_2(s)B(s) \end{aligned} \quad (35)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (34) ile (35) ifadeleri birbirine eşitlenip, düzenlenirse

$$\frac{-\kappa(s)\tilde{m}_1(s) - \tau(s)\tilde{m}_2(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} = m_0(s) - s + \lambda, \quad (36)$$

$$\tilde{m}_0(s) = m_1(s), \quad (37)$$

$$\frac{-\tau(s)\tilde{m}_1(s) - \kappa(s)\tilde{m}_2(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}} = m_2(s) \quad (38)$$

bulunur. Sonuç olarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\tilde{m}_0(s) = m_1(s), \quad (39)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{a}[\kappa(s)(-m_0(s) + s - \lambda) + \tau(s)m_2(s)], \quad (40)$$

$$\tilde{m}_2(s) = \frac{1}{a}[\tau(s)(m_0(s) - s + \lambda) - \kappa(s)m_2(s)] \quad (41)$$

ve ispat biter. Burada $a = \sqrt{\kappa(s)^2 - \tau(s)^2}$ dir.

Teorem 3.1.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike burulmuş W -eğrisi verilsin, öyle ki $\kappa^2 - \tau^2 > 0$ olsun. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{m}_0(s)\tilde{T}(s) + \tilde{m}_1(s)\tilde{N}(s) + \tilde{m}_2(s)\tilde{B}(s) \quad (42)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\tilde{m}_0(s) = -c_2 b \cosh(bs) - c_1 b \sinh(bs) + \frac{\kappa}{b^2}, \quad (43)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{b}(s\kappa - \kappa\lambda - b^2 c_1 \cosh(bs) - b^2 c_2 \sinh(bs)) \quad (44)$$

$$\tilde{m}_2(s) = \frac{1}{b}(c_0 b^2 - \lambda\tau) \quad (45)$$

şeklinde olup $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dir.

İspat. Önerme 3.1.1' i) de verilen m_0, m_1 ve m_2 fonksiyonları Teorem 3.1.1 de ifade edilen (31),(32) ve (33)' de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat elde edilir.

Teorem 3.1.3. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike burulmuş W -eğrisi verilsin, öyle ki $\kappa^2 - \tau^2 < 0$ olsun. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{m}_0(s)\tilde{T}(s) + \tilde{m}_1(s)\tilde{N}(s) + \tilde{m}_2(s)\tilde{B}(s)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\tilde{m}_0(s) = c_1 a \sin(as) - c_2 a \cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (46)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{a}(s\kappa - \kappa\lambda - a^2 c_1 \cos(as) - a^2 c_2 \sin(as)), \quad (47)$$

$$\tilde{m}_2(s) = \frac{1}{a}(-a^2 c_0 + \lambda\tau) \quad (48)$$

şeklinde olup $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + (-s + \lambda)T(s)$ dir.

İspat. Önerme 3.1.1' ii) de verilen m_0, m_1 ve m_2 fonksiyonları Teorem 3.1.1 de ifade edilen (31),(32) ve (33)' de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat elde edilir.

3.2. Spacelike Eğriler için Sabit Oranlı İnvölüt-Evolüt Eğri Çiftlerinin Bazı Karakterizasyonları

Bu bölümde sabit eğrilikli spacelike İnvölüt- Evolüt eğri çiftlerinin karakterizasyonları elde edilmiş ve bu

kapsamda iki ayrı alt bölüm oluşturulmuştur. Birinci alt bölümde spacelike normale sahip spacelike eğriler için sabit eğrilikli İnvölüt- Evolüt eğri çiftleri ve ikinci alt bölümde ise timelike normale sahip spacelike eğriler için sabit eğrilikli İnvölüt- Evolüt eğri çiftleri farklı durumlara göre incelenmiştir.

3.2.1. Spacelike Normale Sahip Spacelike Eğriler için Sabit Oranlı İnvölüt- Evolüt Eğri Çiftlerinin Bazı Karakterizasyonları

Önceki bölümde olduğu gibi önermelerin içerdiği diferansiyel denklemlerin çözümde ortaya çıkan öz değer ve özvektör probleminden dolayı eğrilik ve burulma sabit değerlerine göre şekillenen alt durumlar mevcuttur. Bu durumlar dikkate alınarak elde edilen teoremler ifade edilmiştir.

Bu alt bölümde spacelike $\alpha(s)$ eğrisine ait teğet vektörü olan $T(s)$ spacelike, $N(s)$ spacelike ve eğrinin binormali olan $B(s)$ timelike vektör olarak ele alınmıştır. Bu durumda $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri olan $\tilde{T}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s)$ için aşağıdaki üç durum mevcuttur.

- i) $\tilde{T}(s)$ spacelike, $\tilde{N}(s)$ timelike ve $\tilde{B}(s)$ spacelike
- ii) $\tilde{T}(s)$ spacelike ise $\tilde{N}(s)$ spacelike $\tilde{B}(s)$ timelike
- iii) $\tilde{T}(s)$ spacelike ise $\tilde{N}(s)$ null ve $\tilde{B}(s)$ null vektörlerdir.

Önerme 3.2.1.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike asli normal vektör alanına sahip spacelike burulmuş eğrisi verilsin. α bir W - eğrisi ise pozisyon vektörü aşağıdaki diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir.

i) $\kappa^2 - \tau^2 = f^2 > 0$ olmak üzere,

$$m_0(s) = -\tau c_0 + c_2 \kappa \sinh(fs) + c_1 \kappa \sinh(fs) + \frac{\tau^2}{f^2} s, \quad (49)$$

$$m_1(s) = -c_1 f \sinh(fs) + c_2 f \cosh(fs) + \frac{\kappa}{f^2}, \quad (50)$$

$$m_2(s) = \kappa c_0 + c_1 \tau \cosh(fs) - c_2 \tau \sinh(fs) - \frac{\kappa \tau}{f^2} s, \quad (51)$$

ii) $\tau^2 - \kappa^2 = -g^2 < 0$ olmak üzere

$$m_0(s) = -c_0\tau - c_1\kappa\cos(gs) + c_2\kappa\sin(gs) - \frac{\tau^2}{g^2}s, \quad (52)$$

$$m_1(s) = c_1g\sin(gs) + c_2g\cos(gs) - \frac{\kappa}{g^2}, \quad (53)$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(gs) - c_2\tau\sin(gs) + \frac{\kappa\tau}{g^2}s \quad (54)$$

iii) $\tau^2 - \kappa^2 = 0$ için iki ayrı durum sözkonusudur.

a) $\kappa = \tau$ ise

$$m_0(s) = -c_0\left(\frac{\kappa^2}{2}s^2 - 1\right) + c_1\kappa s - c_2\frac{\kappa^2}{2}s^2 - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + s, \quad (55)$$

$$m_1(s) = -c_0\kappa s + c_1 - c_2\kappa s - \frac{\kappa}{2}s^2, \quad (56)$$

$$m_2(s) = \frac{1}{2}c_0\kappa^2s^2 - c_1\kappa s + c_2\left(\frac{\kappa^2}{2}s^2 + 1\right) + \frac{\kappa^2}{6}s^3 \quad (57)$$

b) $\kappa = -\tau$ ise

$$m_0(s) = -c_0\left(\frac{\kappa^2}{2}s^2 - 1\right) + c_1\kappa s + c_2\frac{\kappa^2}{2}s^2 - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + s, \quad (58)$$

$$m_1(s) = -c_0\kappa s + c_1 + c_2\kappa s - \frac{\kappa}{2}s^2, \quad (59)$$

$$m_2(s) = -c_0\frac{\kappa^2}{2}s^2 + c_1\kappa s + c_2\left(\frac{1}{2}s^2\kappa^2 + 1\right) - \frac{\kappa^2}{6}s^3 \quad (60)$$

Burada c_i ($0 \leq i \leq 2$) reel sabitlerdir. (Erdoğan, Yavuz; 2019)

Yukarıda ki eşitlikte bulunan $\widetilde{m}_0(s)$, $\widetilde{m}_1(s)$ ve $\widetilde{m}_2(s)$ fonksiyonları bir önceki önermede ifade edildiği gibi $\kappa^2 - \tau^2$ ifadesinin aldığı değere göre aşağıdaki teoremlerde ayrı ayrı ele alınmıştır.

Teorem 3.2.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike burulmuş eğrisi verilsin, öyle ki $\kappa^2 - \tau^2 = f^2 > 0$ olmak üzere, α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\widetilde{m}_0(s) = -c_1f\sinh(fs) + c_2f\cosh(fs) + \frac{\kappa}{f^2} \quad (61)$$

$$\widetilde{m}_1(s) = \frac{1}{f}(s\kappa - \kappa\lambda + \tau^2c_1\cosh(fs) + \kappa^2c_1\sinh(fs) + c_2\sinh(fs)f^2) \quad (62)$$

$$\widetilde{m}_2(s) = \frac{1}{f^3}(s\tau f^2 - f^4c_0 + f^2\tau(s - \lambda) + (f^2\kappa\tau c_1)(\cosh fs + \sinh fs)) \quad (63)$$

c_i ($0 \leq i \leq 2$) reel sabitler olmak üzere diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir.

İspat. Önerme 3.2.1.1. de elde edilen $m_0(s)$, $m_1(s)$, $m_2(s)$ değerleri kullanılarak, gerekli işlemler sonucunda diğer ispatlara benzer olarak ele edilebilir.

Teorem 3.2.1.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike burulmuş eğri olsun. $\tau^2 - \kappa^2 = -g^2 < 0$ ise α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\widetilde{m}_0(s) = c_1g\sin(gs) + c_2g\cos(gs) - \frac{\kappa}{g^2} \quad (64)$$

$$\widetilde{m}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}}(s\kappa - \kappa\lambda) + (-c_1\cos(gs) + c_2\sin(gs))g^2 \quad (65)$$

$$\widetilde{m}_2(s) = -\frac{\tau}{\tau^2 - \kappa^2}(s\tau^2 + g^2\tau c_0 + g^2\kappa c_1\cos(gs) - g^2\kappa c_2\sin(gs)) \quad (66)$$

c_i ($0 \leq i \leq 2$) reel sabitler olmak üzere diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir.

3.2.2. Timelike Normale Sahip Spacelike Eğriler için Sabit Oranlı İnvölüt- Evolüt Eğri Çiftlerinin Bazı Karakterizasyonları

Bu alt bölümde timelike asli normal vektör alanına sahip spacelike eğriler için sabit eğrilikli İnvölüt-Evolüt eğri çiftleri ele alınmıştır. Spacelike $\alpha(s)$ eğrisine ait teğet vektörü olan $T(s)$ spacelike, $N(s)$ timelike ve eğrinin binormali olan $B(s)$ spacelike vektör olarak ele alınmıştır. Bu durumda $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri " $\tilde{T}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{B}(s)$ " için $\tilde{T}(s)$ timelike, $\tilde{N}(s)$ spacelike ve $\tilde{B}(s)$ spacelike vektörlerdir.

Önerme 3.2.2.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike asli normal vektör alanına sahip spacelike burulmuş eğrisi verilsin. α bir W - eğrisi ise pozisyon vektörü $\sqrt{\tau^2 + \kappa^2} = a$ olmak üzere aşağıdaki diferansiyellenebilir fonksiyonları ile elde edilir:

$$m_0(s) = -c_0\tau + c_1\kappa\cosh(as) + c_2\kappa\sinh(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s, \quad (67)$$

$$m_1(s) = -c_1a\sinh(as) - c_2a\cosh(as) + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (68)$$

$$m_2(s) = \kappa c_0 + c_1\tau\cosh(as) + c_2\tau\sinh(as) - \frac{\kappa\tau}{a^2}s \quad (69)$$

(Erdoğan, Yavuz; 2019).

Teorem 3.2.2.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike burulmuş eğri olsun. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisi

$$\tilde{m}_0(s) = -c_1a\sinh(as) - c_2a\cosh(as) + \frac{\kappa}{a^2} \quad (70)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{a}(\kappa\lambda - s\kappa + a^2c_1\cosh(as) + a^2c_2\sinh(as)) \quad (71)$$

$$\tilde{m}_2(s) = \frac{1}{a^3}(s\tau a^2 - a^4c_0 - a^2s\tau + a^2\lambda\tau) \quad (72)$$

Burada $\sqrt{\tau^2 + \kappa^2} = a$ dır.

4. Örnekler

Bu kısımda elde edilen sonuçlar örneklerle tartışılmış ve bazı sonuçlar ortaya konulmuştur.

Örnek 4.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı spacelike asli normal vektör alanına sahip spacelike eğrisi

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}\sinh s, \frac{1}{2}\cosh s, \frac{\sqrt{5}}{2}s\right) \quad (73)$$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet vektör alanları

$$T(s) = \left(\frac{1}{2}\cosh s, \frac{1}{2}\sinh s, \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad (74)$$

$$N(s) = (\sinh s, \cosh s, 0), \quad (75)$$

$$B(s) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cosh s, \frac{\sqrt{5}}{2}\sinh s, \frac{1}{2}\right) \quad (76)$$

olarak bulunur. Ayrıca α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{1}{2}, \quad (77)$$

$$\tau(s) = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (78)$$

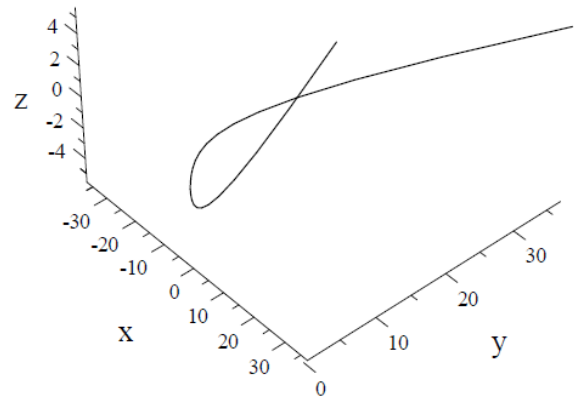
olduğundan α bir W eğrisidir. Burada $\tau^2 - \kappa^2 = 1 > 0$ durumu söz konusudur. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisini Teorem 3.2.1.1 yardımı ile

$$\tilde{m}_0(s) = c_2\cosh s - c_1\sinh s + \frac{1}{2}, \quad (79)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{4}c_1\cosh s + \frac{1}{4}(c_1 - c_2)\sinh s \quad (80)$$

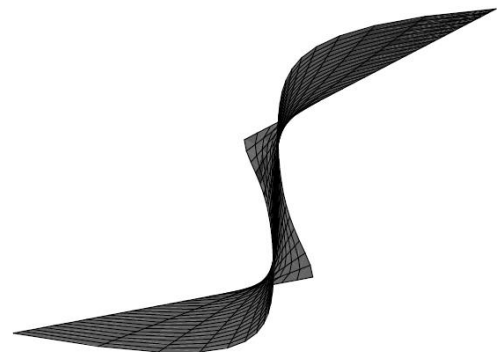
$$\tilde{m}_2(s) = \sqrt{5}s - c_0 - \frac{1}{2}\sqrt{5}\lambda + \frac{1}{4}\sqrt{5}c_1(\cosh s + \sinh s) \quad (81)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilebilir. Burada $\tilde{\alpha}$ eğrisi; α eğrisi bir W- eğrisi olduğundan düzlemseldir. α eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1. α spacelike W- eğrisi

Ayrıca düzlemsel $\tilde{\alpha}$ involütü eğrilerin değişen λ değerleri ile meydana gelen involüt eğriler ailesinin grafiği ise aşağıda verildiği gibidir.



Şekil 4.2. $\tilde{\alpha}$ involütü eğriler ailesinin grafiği

Örnek 4.2. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ birim hızlı timelike eğrisi

$$\alpha(s) = (\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, s) \quad (82)$$

olarak verilsin. Bu eğrinin Frenet vektör alanları

$$T(s) = (\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s, 1), \quad (83)$$

$$N(s) = (\sinh s, \cosh s, 0), \quad (84)$$

$$B(s) = (\cosh s, \sinh s, \sqrt{2}) \quad (85)$$

olarak bulunur. Ayrıca α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla

$$\kappa(s) = \sqrt{2}, \quad (86)$$

$$\tau(s) = -1 \quad (87)$$

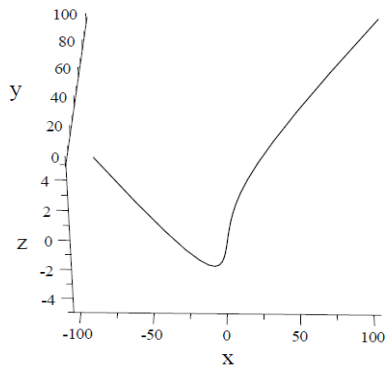
olduğundan α bir W eğrisidir. Burada $\kappa^2 - \tau^2 = 1 > 0$ durumu söz konusudur. α eğrisinin involütü olan $\tilde{\alpha}$ eğrisini Teorem 3.1.2' yi kullanarak

$$\tilde{m}_0(s) = -c_2 \cosh s - c_1 \sinh s + \sqrt{2}, \quad (88)$$

$$\tilde{m}_1(s) = \sqrt{2}s - \sqrt{2}\lambda - c_1 \cosh s - c_2 \sinh s, \quad (89)$$

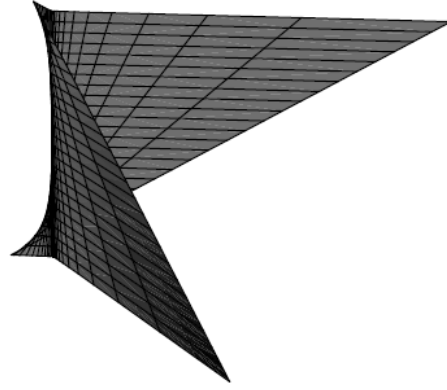
$$\tilde{m}_2(s) = c_0 + \lambda \quad (90)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilebilir. Burada $\tilde{\alpha}$ eğrisi; α eğrisi bir W- eğrisi olduğundan düzlemseldir. α eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3. α timelike W- eğrisi

Ayrıca düzlemsel $\tilde{\alpha}$ involütü eğrilerin değişen λ değerleri ile meydana gelen involüt eğriler ailesinin grafiği ise aşağıda verildiği gibidir.



Şekil 4.4. $\tilde{\alpha}$ involüt eğriler ailesinin grafiği

5. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, eğlilik ve burulma fonksiyonu sabit olan birim hızlı spacelike ve timelike eğrilerinin involüt eğri çifti için karakterizasyonlar elde edilmiştir. $\tilde{\alpha}$ involüt eğrisinin karakterizasyonu için, pozisyon vektörünün, Frenet vektör alanlarının lineer birleşimi olarak ifade edilmesinden faydalanılmıştır. Bu ifade ediliste ortaya çıkan \tilde{m}_0 , \tilde{m}_1 ve \tilde{m}_2 diferansiyellenebilir fonksiyonları yalnızca κ ve τ değerlerine bağlı olarak ortaya konulmuştur. α birim hızlı burulmuş W-eğrisi için, $\kappa^2 - \tau^2 > 0$ ve $\kappa^2 - \tau^2 < 0$ iki durumda çalışmamızda değerlendirmelerde bulunulmuştur. Ancak $\kappa^2 - \tau^2 = 0$ olma durumunda ise involüt eğrisi tanımlı olmadığından incelemeye gerek duyulmamıştır. Aynı zamanda $\tilde{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin evolüt eğrisi olduğu için elde edilen sonuçlar evolüt eğri çiftleri için de benzer şekilde yorumlanabilir.

Kaynaklar

Bayram, E., Bilici, M., 2016. Surface Family with a Common Involute Asymptotic Curve. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **13**, 1-9.

Bilici, M., Çalışkan, M., Aydemir, İ., 2002. The Natural Lift Curves and the Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Pair of Evolute-Involute Curves. *International Journal of Applied Mathematics*, **11**, 415-420.

Bilici, M., 2011. Natural Lift Curves and the Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Involute of a Timelike Curve in Minkowski 3-

- Space. *International Journal of the Physical Sciences*, **6**, 4706-4711.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2009. On the Involutes of the Space-like Curve with a Time-like Binormal in Minkowski 3-Space. *International Mathematical Forum*, **4**, 1497–1509.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2011. Some New Notes on the Involutes of the Timelike Curves in Minkowski 3-Space. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **6**, 2019-2030.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2018 . A New Perspective on the Involutes of the Spacelike Curve with A Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. *International Mathematical Forum*, **4**, 1497-1509.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2019. Some New Results on the Curvatures of the Spherical Indicatrices of the Involutes of a Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space. *MathLAB Journal*, **2**, 110-119.
- Bükcü, B., Karacan, M. K., 2007. On The Involute and Evolute Curves of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space. *Demonstratio Mathematica*, **3**, 722-732.
- Bükcü, B., Karacan, M. K., 2007. On The Involute and Evolute Curves of Spacelike Curve with a Spacelike Binormal In Minkowski 3-Space. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **5**, 221 – 232.
- Büyükkütük, S., Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space \mathbb{E}^3 . *General Mathematical Notes*, **28**, 81-91.
- Büyükkütük, S. and Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean 4 Space \mathbb{E}^4 , *New Trends in Mathematical Sciences*, **4**, 171-178.
- Chen, B. Y., 2001. Constant Ratio Hypersurfaces. *Soochow Journal of Mathematics*, **27**, 353-362.
- Chen, B.Y., Kim, D.S., Kim, Y.H., 2006. New characterizations of W-curves. *Publicationes Mathematicae-Debrece*, **69**, 457–472.
- Çalışkan, M., Bilici, M., 2002. Some Characterizations for the Pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean space E^3 . *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, **21**, 289-294.
- Do Cormo, M. P., 1976, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice – Hall, New Jersey, 1-511.
- Erdoğan, M., Yavuz, A., 2019. Characterization of Timelike Curves with Constant Curvature Functions. *Arabian Journal of Mathematics*, In progress.
- Gürpınar, S., Arslan, K., Öztürk, G. 2014. A Characterization of Constant-Ratio Curves in Euclidean 3-Space \mathbb{R}^3 . *arXiv:1410.5577v1 [math.DG]*, 1-10.
- Hacısalihoglu, H. H., 1983. *Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*, No.2, Malatya, 1-895.
- Öztürk, U., Koc Öztürk, E.B., Ilarslan, K., 2013. On the Involute-Evolute of the Pseudonull Curve in Minkowski 3-Space. *Journal of Applied Mathematics*. **651495**, 1-6.
- Öztürk, S., Erdoğan, M., 2018. Sabit Oranlı İnvölüt-Evolüt Eğri Çiftleri. *Afyon Kocatepe University Journal of Sciences and Engineering*, **18**, 861-867.
- Sabuncuoğlu, A., 2014, *Diferansiyel Geometri*, Nobel, Ankara, Türkiye, 1-514.
- Şenyurt, S., Bilici, M., Çalışkan, M., 2015. Some Characterization for the Involute Curves in Dual Space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, **1**, 113-125.
- Walrave, J., 1995. *Curves and Surfaces in Minkowski Space*. Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven.
- Yavuz, A., Erdoğan, M., 2019. Characterization of Spacelike Curves with Constant Curvature

Functions. *Journal of Geometry and Physics*, In progress.