Elementary Education Online, 9(1), 213-228, 2010.
İlköğretim Online, 9(1), 213-228, 2010. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

Teaching from Patterns to Functions in Algebraic Thinking Process

Tangül (UYGUR) KABAEL[1] Dilek TANIŞLI[2]

ABSTRACT. Function concept that mathematics educators has worked on importantly for years is still a source of difficulties for students. Because the functional relationship is a prerequisite notion for the function concept and the functional relationship should be gained from the outset, teaching of the function concept should be considered not in the high school mathematics, but in the early grades mathematics. In this study, the relationship between the pattern and function concepts and teaching strategies of them in the algebraic thinking process are investigated based on literature, and the results obtained from this investigation are given by supporting with the researchers' recommendations.
Key Words: Pattern, Function, Algebraic Thinking.

SUMMARY

Introduction: The relationship which is called functional relationship begins with the notion of patterns in early grades, develops gradually in algebraic thinking process, and gains the abstract manner with the function notion. We aimed to investigate the relationship between the patterns and functions notion and teaching these concepts in the developing process of algebraic thinking based on the literature in this study.

Patterns to the Function: Patterns can be found in tiling or in music in daily life. In mathematics, patterns are classified as recursive patterns and explicit patterns. If the previous step is used to find the former step, the pattern is recursive. For instance, because the next step can be obtained by adding four, the number sequence 2 6 10 14 18 … is a recursive pattern. If the number sequence is given as in the following, it is an explicit pattern, because each term of sequence is related with the step number.

Functional relationship is introduced with the concept of function in the abstract manner. For example, the number sequence given in above can be introduced as the below function:

$$f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(n) = 4n - 2$$

2	6	10	14	18	…
1. step	2. step	3. step	4. step	5. step	

The Relationship between the Pattern and Function Notions in the Developing Process of Algebraic thinking: The relationship between the qualities which is called functional relationship beginning with patterns in early grades is the heart of algebraic thinking. Besides the variable notion, a lot of algebraic notion like equality can be introduced in the pattern context. After functional relationship has been introduced in the context of pattern in early grades, the relationship notion develops gradually in developing process of algebraic process with different contexts like word problems, and gains an abstract concept that is called function.

Teaching Strategies from Patterns to Functions in Teaching Algebra Process: Because the functional relationship begins with the patterns and develops in abstract level with function notion, teaching strategies of pattern and function concepts should be in parallel manner. Mathematics educators suggests to use multiple representations and to emphasize the relation between these representations in the teaching process of the function and pattern concepts. To ensure students' transformations between these concepts, it is important to use similar examples and same representations in the teaching processes of the concepts.

Suggestions: We will add our teaching recommendations to the suggestions which are obtained from the teaching strategies mentioned in this study in two aspects. First aspect will be teaching pattern and function notions in a parallel manner to relate them in the algebraic thinking process. Suggestions for teaching the notions in a parallel manner can be summarize as in the following:

- Because students have already encountered the functional relation in daily life, we should guide students through realizing the functional relationship in daily life problems in early and later grades.
- To gain the functional relationship, suitable representations and the relations between them should be emphasized in the pattern examples from the early grades.
- Examples which are used to teach patterns in early grades and function in later grades and their representations should be chosen in a parallel manner to ensure the students' transformation.
- Even if the function notion is introduced as a special relation after relation concept has been given, it should be first introduced with the daily-life situations which can be interesting for students.
- Because the teaching activities which encourage the teaching approaches, mentioned in this study are very inadequate in the elementary and high school mathematics programs, they should be revised to these teaching approaches.

[1] Assist. Prof. Dr., Tangül (UYGUR) KABAEL, Anadolu University, Education Faculty, tuygur@anadolu.edu.tr
[2] Assist. Prof. Dr., Dilek TANIŞLI, Anadolu University, Education Faculty, dtanisli@anadolu.edu.tr

Cebirsel Düşünme Sürecinde Örüntüden Fonksiyona Öğretim

Tangül (UYGUR) KABAEL[3] Dilek TANIŞLI[4]

ÖZ. Matematik eğitimcilerinin uzun yıllardır önemle üzerinde çalıştıkları fonksiyon kavramı hala öğrenciler için bir güçlük kaynağı olmaktan çıkamamıştır. Fonksiyonel ilişki, fonksiyon kavramının başlıca önkoşul bilgisi olduğundan ve bu ilişkinin okulöncesi dönemden itibaren kazandırılması gerektiğinden, fonksiyon kavramının öğretiminin başlangıcı ortaöğretimde değil erken öğretim dönemlerinde düşünülmelidir. Fonksiyonel ilişki bilgisi erken dönemde örüntü kavramı bağlamında sayılar ya da geometrik şekiller arası ilişki ile başlar ve değişkenler arası ilişki ile devam eder. Bu çalışmada, cebirsel düşünme sürecinde örüntü ve fonksiyon kavramlarının ilişkisi ve bu kavramların öğretim stratejileri literatür tabanlı incelenmiş ve bu inceleme sonunda elde edilen sonuçlar araştırmacıların önerileri ile de desteklenerek verilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Örüntü, Fonksiyon, Cebirsel Düşünme.

GİRİŞ

Çeşitli biçimlerde tanımlanabilen matematik; sayı, geometrik şekil gibi matematiksel nesneler arasındaki ilişkiyi inceleyen bir alandır. Matematik, eğitim sürecinin erken basamaklarında somut nesneler arasındaki ilişkileri ve ilerleyen basamaklarda değişken kavramının kazanılması ile genel anlamda matematiksel nesneler arasındaki ilişkiyi inceler. Erken basamaklarda örüntü kavramı ile kazandırılan ilişki bilgisi, değişken kavramının da kazanımından sonra fonksiyon konusu ile soyut kimlik bulur.

Örüntüden Fonksiyona

Pek çok matematikçi "örüntü nedir?" sorusuna yanıt aramıştır. Orton (1999) örüntü kelimesini tanımlamanın kolay olmadığını ve bu kelimenin şekil, renk, hatta seslerin özel ve açık olmayan bir düzeni için kullanılabileceğini belirtir. Billstein, Libeskind ve Lott (2004)'da örüntülerin her yerde; duvar kâğıtlarında, fayans döşemelerinde, televizyon programlarında ve hatta polis araştırmalarında yer aldığını belirtmişlerdir. Vogel (2005) ise örüntülerin yaşantımızdaki yerine farklı bir bakış açısı getirmiştir. Vogel'e göre örüntü kullanımı yaşamımızın pek çok yönünü tanımlar. Örneğin, çizimlerde, resimlerde ya da bir müzik parçasında örüntü keşfi, bireye deneyimlerinden ders çıkarma becerisi sağlar. Günlük yaşantımızda çeşitli biçimlerde karşımıza çıkan örüntüler, matematiksel açıdan sayı ya da geometrik şekillerin bir ilişkisidir. Orton (1999)'a göre örüntüler matematikte simetri ya da tekrarlama ile açıkça belirli bir düzene sahip olmayı gerektirir. Zazkis ve Liljedahl (2006) ise matematiğin sözlük tanımında sembol, şekil, genelleme, soyutlama gibi pek çok ifadenin kullanıldığını, oysa matematik ve matematiksel etkinliklerin temelini yakalamak için matematiğin, örüntülerin bir bilimi olarak tanımlanabileceğini ve matematikçilerin bir ressam ya da şair gibi birer örüntü üreticisi olduklarını belirtirler.

Örüntülerde sayı ya da matematiksel şekiller arasındaki ilişkiler genel olarak yinelemeli (recursive) ve belirgin (explicit) olmak üzere iki başlık altında ele alınır. Bir önceki adımdan bir sonraki adımın elde edilmesi yani sonraki adımın bulunabilmesi için, önceki adımın kullanılması yinelemeli ilişki olarak tanımlanır (Ley, 2005; Van De Walle, 2004; Orton ve Orton, 1999; Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998; 1999).

Örneğin;

[3]Yrd. Doç. Dr., Tangül (UYGUR) KABAEL, Anadolu University, Education Faculty, tuygur@anadolu.edu.tr
[4] Yrd. Doç.. Dr., Dilek TANIŞLI, Anadolu University, Education Faculty, dtanisli@anadolu.edu.tr

2 6 10 14 18 …

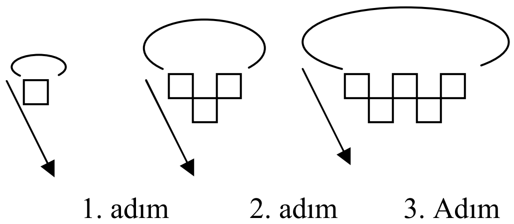
şeklinde verilen sayı dizisinde, önceki adımda yer alan sayıya 4 eklenerek bir sonraki adım elde edilmektedir. Bu sayı dizisi,

2	6	10 …	14	18
1. adım	2. adım	3. adım	4. adım	5. adım

şeklinde verildiğinde ise adım sayısı ve o adımda yer alan terimlerin sayısının belirlenmesi belirgin ilişkidir. Belirgin ilişki, genel kuralı oluşturmada ve dolayısıyla örüntünün herhangi bir terimini (n. terimi) bulmada yardım edicidir (Ley, 2005). Yukarıdaki sayı örüntüsü için genel kural, aşağıdaki biçimde hesaplanarak 4n-2 olarak elde edilebilir.

1. adım	2	=	2+4.0
2. adım	2+4	=	2+4.1
3. adım	2+4+4	=	2+4.2
4. adım	2+4+4+4	=	2+4.3
………	………		………
n. adım	$2\underbrace{+4 \ldots +4}_{n-1\, tane}$	=	2+4.(n-1)=4n-2

Bir şekil örüntüsü üzerinde yinelemeli ve belirgin ilişkiyi görebilmek için de Şekil'1 deki örüntü örneğini inceleyelim.



Şekil 1. Şekil örüntüsünde genel kural arama

Şekil örüntüsünü adım sayısını göz önüne almaksızın düşündüğümüzde, yinelemeli bir ilişki elde edilir ve bu yinelemeli ilişkide terimler, ardışık şekillerin yapısı dikkate alınarak önceki adımda yer alan kare sayısına şeklin yapısal özelliğine göre iki kare eklenerek bulunur. Şekil örüntüsü adım sayıları ile birlikte dikkate alındığında ise belirgin bir ilişki elde edilir ve bu belirgin ilişkide alt ve üst sırada yer alan kare sayıları, adım sayısı ile ilişkilendirilerek karelerin toplam sayısına yani genel kurala ulaşılır. Örneğin 2. adımda üst sırada iki (adım sayısı kadar) tane, alt sırada ise bir (adım sayısının bir eksiği) tane kare bulunmaktadır. Böylece şekil örüntüsünün n. adımı için üst sırada n tane kare ve alt sırada (n-1) tane kare bulunacağından genel kural [n+(n-1)]=2n-1 şeklinde ifade edilebilir (Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999). Örüntülerde nesneler ya da sayılar arasında yinelemeli ve belirgin ilişki arama dışında bazen örüntüdeki sayılar ya da nesnelerin özelliklerine odaklanılabilir. Örneğin;

3 8 13 18 23

şeklinde verilen sayı örüntüsünde terimlerin tek, çift, tek, çift şeklinde devam ettiğinin ifade edilmesi, bu ilişkiye ilişkin bir örnektir.

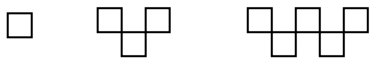
Matematik öğretimi sürecinde belirgin ilişki, erken basamaklarda örüntü kavramı kapsamında değişken kullanmaksızın yakın adıma kadar incelenir ve daha sonraki basamaklarda değişken kullanılarak genel terimi buldurma şeklinde sürdürülür. Belirgin ilişki, adım sayısı ile örüntünün o adımındaki teriminin ilişkilendirmesi bağlamında bir bağımlı (girdi) ve bir bağımsız (çıktı) değişken arasındaki ilişki olarak düşünüldüğünde fonksiyonel bir ilişkidir. Kazanımına örüntü kavramı ile ilköğretimin ilk basamaklarında başlanılan bu ilişki, öğrencilerde soyut düşünme becerisinin geliştiği orta öğretime gelindiğinde fonksiyon kavramı ile kimlik bulur.

Fonksiyon kavramı matematik tarihinde çeşitli biçimlerde tanımlanarak gelişmiş ve bu gelişimin sonunda 1960'lardan sonra Drichlet-Bourbaki tanımı ile ders kitapları ve öğretim programlarında yerini almıştır. Drichlet-Bourbaki tanımına göre fonksiyon; boştan farklı iki küme arasında, her elemanı yalnızca bir elemana götüren bir eşlemedir. Eşleme yapılan kümelerden başlangıç kümesi tanım kümesi ve eşlemenin son bulduğu küme ise görüntü kümesi olarak adlandırılır. Özel olarak tanım kümesi pozitif tamsayılar ve görüntü kümesi gerçel sayılar olan fonksiyonlar ise "dizi" olarak isimlendirilir. Örneğin, aşağıda verilen sayı dizisi;

2	6	10	14	18	…
1. adım	2. adım	3. adım	4. adım	5. adım	

$$f:\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(n) = 4n - 2$$

şeklinde verilen f fonksiyonu ile ve benzer biçimde Şekil'2 de verilen şekil örüntüsü ise,



Şekil 2. Şekil örüntüsü

$$g:\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(n) = 2n - 1$$

biçimindeki g fonksiyonu ile verilebilir.

Cebirsel Düşünmenin Gelişimi Sürecinde Örüntü ve Fonksiyon İlişkisi

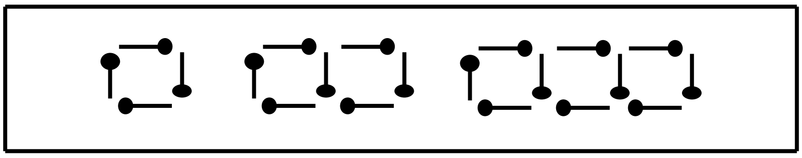
Matematik öğretiminde cebirsel düşünmenin gelişimi, nicelikler ve nicelikler arası ilişkiler üzerine kurulmuştur. Erken öğrenme basamaklarında kelimeler ile temsil edilerek öğretimine başlanılan nicelik ve nicelikler arası ilişki bilgisi, ilerleyen basamaklarda değişken kavramının kazanımıyla cebirsel düşünme sürecinin her basamağında yer alır. Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng ve Schmittau (2005)'nun Kieran (2004)'dan aktardığına göre cebirsel düşünmenin gelişim sürecinde aşağıdaki odaklanmalar gerçekleştirilmelidir:

1. Yalnızca sayısal hesaplamaya değil ilişkilere odaklanma
2. Yalnızca işlemlerin kendisi ve sonuca ulaşıp ulaşmamaya değil, işlemlerin tersine odaklanma
3. Yalnızca çözümünden ziyade problemin hem temsiline hem de çözümüne odaklanma
4. Yalnızca sayılardan ziyade hem sayılara hem de kelimelere odaklanma
5. Eşitlik işaretinin anlamına tekrar odaklanma

Cebirsel düşünmenin özü olan ve Kieran'ın da cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde ilk odaklanma olarak aldığı nicelikler arası ilişki arama, fonksiyonel düşünme olarak isimlendirilir. Blanton ve Kaput (2004)'a göre ise cebirsel muhakemenin aldığı formlardan birisi fonksiyonel düşünmedir. Smith (2003) fonksiyonel düşünmeyi, iki ya da daha fazla değişen nicelik arasındaki ilişkiye odaklanma olan temsilsel düşünme olarak betimler (Akt. Blanton ve Kaput, 2004). Cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde nicelikler arası ilişkinin soyut anlam kazandığı fonksiyon kavramının öğrenilmesi, fonksiyonel ilişkinin kazanımı ile mümkün olur. Vollrath (1986) fonksiyon kavramının öğrenilmesi ve problemlerin çözümünde başarıyla kullanılması için aşağıda verilen iki zihinsel becerinin gerekli olduğunu savunur.

(i) Değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkisini arayabilme, belirleyebilme, üretebilme
(ii) Bağımlılık ilişkisi ile ilgili varsayımları üretebilme, test edebilme ve gerekirse tekrar gözden geçirme

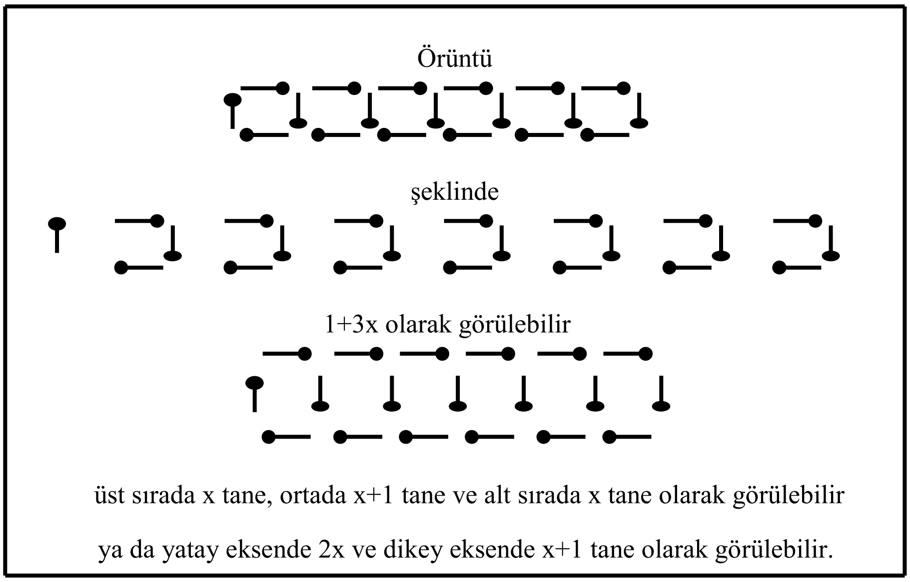
Vollrath'ın da vurguladığı gibi fonksiyon kavramının kazanımı için değişken ve değişkenler arası ilişki bilgisi esastır ve bu esaslılık fonksiyon kavramına ilişkin pek çok öğrenci güçlüğünün altında değişken kavramına ilişkin yanılgıların yatması ile de ortaya çıkar. Değişken kavramı ise sanıldığının aksine sembol temsili yani soyutlama bilgisi ile değil, örüntülerin öğretimi ile başlar. English ve Warren (1999) geleneksel olarak değişken kavramının denklemler konusu ile tanıtılması yaklaşımını sorgulamışlar ve değişken kavramının erken kazanımı için öğrencilerin şekil ve sayı örüntülerini araştırabilecekleri, formüle edebilecekleri ve genelleyebilecekleri somut etkinlikler önermişlerdir. Şekil'3 te verilen şekil örüntüsünü bu tip etkinliklere bir örnek olarak göstermektedirler.



Şekil 3. Kibrit çöpü örüntüsü

Bu şekil örüntüsünde öğrenciler kibrit çöplerinden bir kare oluşturarak başlarlar. Daha sonra oluşturulan kareye kibrit çöpleri ile şekildeki gibi bir kare daha eklerler. Bu ekleme için 3 tane daha kibrit çöpüne gereksinim vardır ve toplam kibrit çöpü sayısı 7 olur. Üçüncü bir kare için 3 tane daha fazla kibrit çöpü gerekir ve toplam kibrit çöpü sayısı 10'a ulaşır. Öğrenciler oluşturdukları bu şekillerde gördükleri farklı örüntüleri karşılaştırdıktan ve tartıştıktan sonra bu örüntülerin genel kurallarını bulmaya ve bu kuralları kendi cümleleri ile ifade etmeye yönlendirilirler. Bu aşamadaki diğer etkinlikler, verilen bir örüntü için birden fazla kural bulmaya, bu kuralları karşılaştırmaya ve verilen bir kural için şekil örüntüsü oluşturmaya ilişkindir. English ve Warren, erken basamaklarda somut ya da sözel ifadelerle temsil edilen değişkenler arası ilişki bilgisi öğretiminin, değişken kavramı tanıtıldıktan sonra aynı örüntülerin değişkenler ile formüle edilmesi şeklinde sürdürülebileceğini vurgulamaktadırlar. Örneğin yukarıda tartışılan şekil örüntüsünün genel formülü, değişken kavramının kazanımından sonra adım sayısı x gibi bir sembolle gösterilmek üzere 4+3(x-1) şeklinde elde edilir. Bu cebirsel formülde 4; birinci kutudaki kibrit çöplerinin sayısını ve 3(x-1) ise; kalan (x-1) kutu için gerekli olan kibrit çöpleri sayısını temsil etmektedir. Ayrıca x yine adım sayısını göstermek üzere bu şekil örüntüsünün genel kuralı 3x+1 şeklinde direk olarak da verilebilir. Bu kez genel kurala ulaşmadaki temel düşünce; her adımda eklenen yeni kutu için 3 tane kibrit çöpüne gereksinim olduğudur. Buna göre x adımda 3x tane çöp ve son kutunun diğer tarafını kapatmak için de bir tane daha çöp ekleneceğinden sonuç 3x+1 olur. Aynı şekil örüntüsünde yine x adım sayısını temsil etmek üzere, üst sırada x tane, ortada x+1 tane ve alt sırada x tane çöp olduğu ya da yatay eksende 2x ve dikey eksende x+1 tane kibrit çöpü olduğu göz önüne alınarak genel kural 2x+x+1 şeklinde de ifade edilebilir. Genel kuralın farklı biçimlerde elde edilişi Şekil'4 te verilmektedir. Burada olduğu gibi erken basamaklarda bir örüntüye ilişkin elde edilen farklı formüllerin karşılaştırılması etkinliği, değişken kavramının kazanımından sonra eşitlik bilgisinin de bir öğretim etkinliği konumuna gelir. English ve Warren'ın eşitlik bilgisi öğretimine yönelik bu örüntü yaklaşımı, Kieran'ın cebirsel düşünmenin gelişim sürecinde eşitlik işaretinin anlamına odaklanma düşüncesi ile örtüşür.

İlköğretimde örüntüler ile başlayan ve ortaöğretimde fonksiyon kavramıyla devam eden fonksiyonel düşünmenin, cebirsel muhakemenin kalbi olduğu düşüncesi matematik eğitimi literatüründe ortak bir savunu halini almıştır (Carraher ve Martinez, 2007; Mason, 1996, Akt. Mor, Noss, Hoyles, Kahn ve Simpson, 2006; Warren ve Cooper, 2005; Blanton ve Kaput, 2004; Driscoll ve Moyer, 2001; Usiskin, 1997). Örüntüleri, fonksiyonel ilişkiyi ve fonksiyonları anlama, NCTM standartlarında da cebirsel muhakemenin kritik yönlerinden biri olarak ele alınır (Sheffield ve Cruikshank 2005; NCTM, 2000). Bu bağlamda, cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinin her aşamasında yer alan fonksiyonel düşünme becerisinin kazanımı için, farklı kavramlar bağlamında ilişkilendirmeyi destekleyici öğretim etkinlikleri göz önünde bulundurulmalıdır. Örneğin sayı ya da geometrik şekiller arası fonksiyonel ilişki becerisinin kazanımını sağlayan örüntüler konusuna ilişkin öğretim etkinliklerinde kullanılan örnek ve temsiller, ilerleyen basamaklarda değişken, eşitlik ya da eşitsizlik kavramlarının ve sonrasında soyut öğrenme düzeyine gelindiğinde fonksiyon kavramının kazanımında kullanılacak örnek ve temsillere temel oluşturabilecek şekilde düzenlenmelidir.



Şekil 4. Kibrit çöpü örüntüsünün genel kuralının farklı elde ediliş biçimleri

Cebir Öğretimi Sürecinde Örüntüden Fonksiyona Örnek Öğretim Etkinlikleri

Son yıllarda matematik öğretimine yönelik geliştirilen kaynaklar, cebirsel muhakemenin kazanımı sürecinin erken basamaklarında ezberlemeye yönlendiren basit algoritmik problemlerden ziyade, öğrencilerin cebirsel becerilerini geliştirecek bulmaca tarzı problemlerin kullanımını desteklemektedir. Sheffield ve Cruikshank (2005) sözel problemlerde yapılabilecek küçük değişimlerin bile nicelikler arası ilişki yani bağımlılık ilişkisinin kazanımını sağlayan cebirsel muhakeme gücünü desteklediğini vurgulamaktadırlar. Bu savunularına örnek olarak;

> "Ayşe 8 tane sakızı 3 TL ye, 5 tane şekeri ise 2 TL ye alabiliyor. Ayşe, 24 tane sakız ve 10 tane şekeri kaç TL ye alır?"

⬇

şeklinde verilen bir problemin

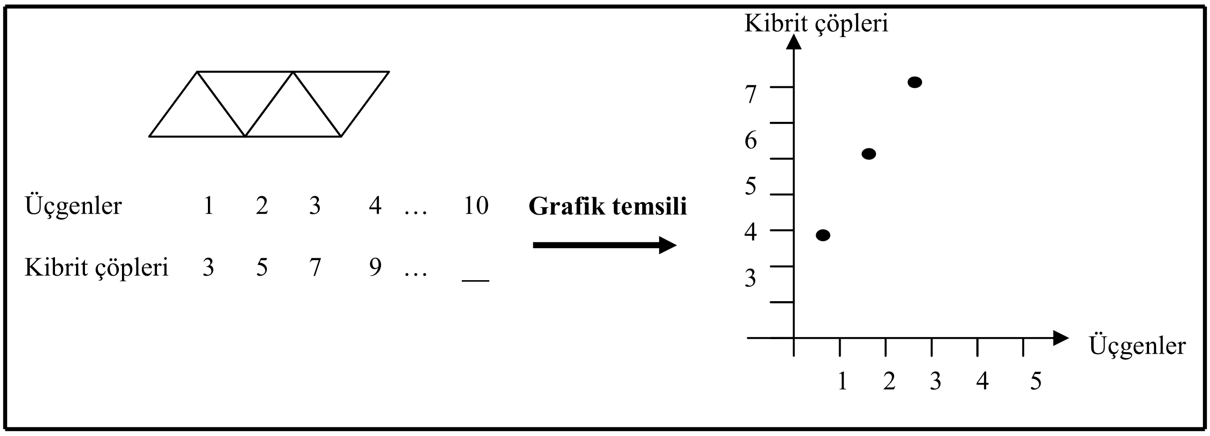
> "Birsu'nun çantasında toplam 15 tane kırmızı ve sarı şeker bulunmaktadır. Kırmızı şekerlerin sayısı, sarı şekerlerin sayısının iki katıdır. Buna göre Birsu'nun çantasında kaç tane kırmızı, kaç tane sarı şeker bulunur?"

şeklinde bir problem ile değiştirilerek, cebirsel muhakeme gelişiminin amaçlanabileceğini ifade etmektedirler. Bir öğrenci ikinci problemi, kırmızı şekerlerin sayısı x, sarı şekerlerin sayısı y ile gösterilmek üzere x+y=15 ve 2y=x eşitlikleri ile temsil edebilir. Buna karşın, başlangıçta öğrenci problemin çözümüne tahmin ve kontrol stratejisi ile de yaklaşabilir. Yapılabilecek değişiklikle ilk problem;

> "Sena'nın 15 parça şekeri vardır. Bu şekerlerin bazıları kırmızı, bazıları sarıdır. Toplam şeker sayısı 15 olacak biçimde kaç tane farklı kırmızı ve sarı şeker kombinasyonu vardır? Bir kişiyi mümkün tüm kombinasyonları bulmuş olduğunuza nasıl ikna edersiniz?"

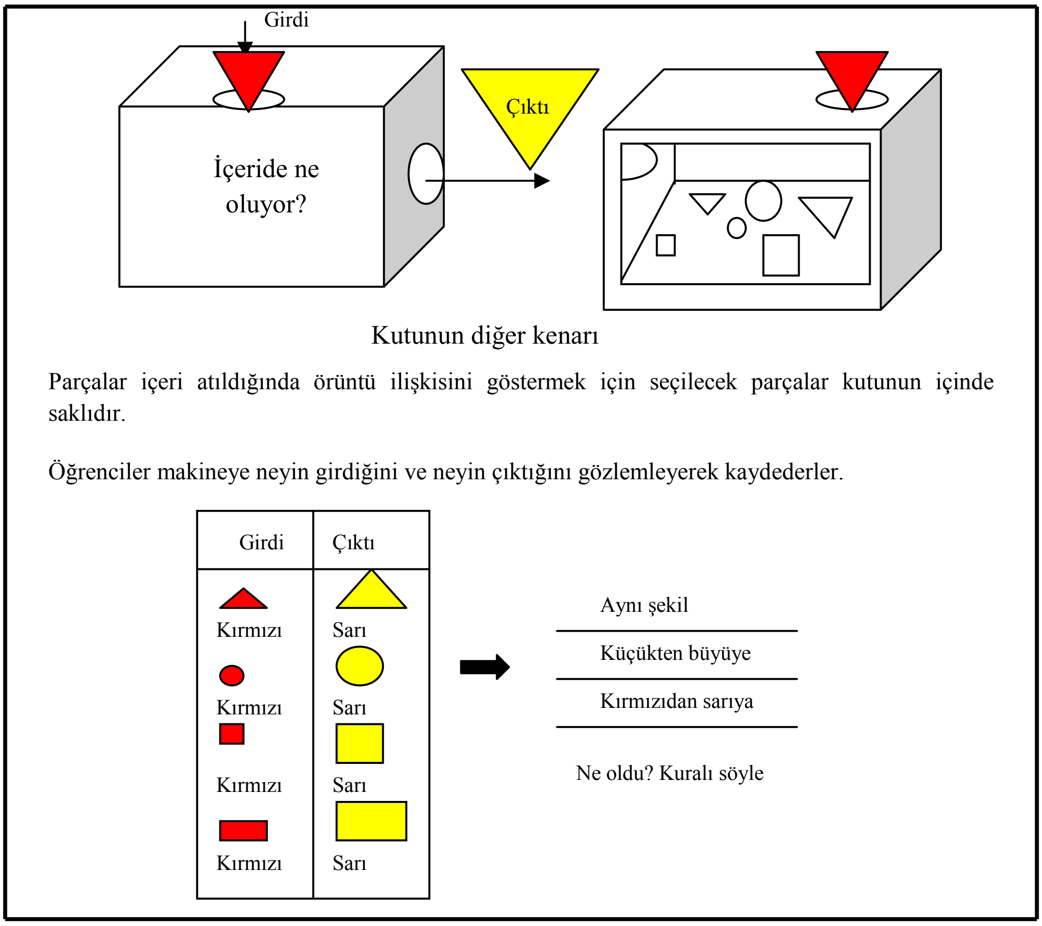
şeklinde bir probleme dönüştürüldüğünde ise, öğrenciler daha derin örüntü ve ilişki kavramaya yönlendirilmiş olur. Sheffield ve Cruikshank aynı zamanda öğrencilerin, oluşturulan problem durumlarını tanımlamak için çeşitli model ve temsillerle sembol ve değişken kullanımına yönlendirilmeleri gerektiğini vurgulamaktadırlar. Sheffield ve Cruikshank öğrencilerin, ilişki ve denklemleri temsil etmek için matematiksel sembolleri yazmada deneyim kazanmasından sonra, onları fonksiyon tanımına yönlendirici problemler sunulması gerektiğini belirtirler.

Cathcart, Pothier, Vance ve Bezuk (2003) ise, cebirin örüntü çalışması olarak tanımlanabileceğini ve öğrencilerin cebirsel düşünmelerine yardımcı olabilmek için öğretmenin, öğrencileri bir örüntüyü analiz edebilmeleri, benzer örüntü olduğunda tanımaları ve örüntüyü genellemeleri yönünde cesaretlendirmesi gerektiğini vurgularlar. Cathcart ve diğerlerine göre, öğrencilerin örüntü deneyimleri tekrarlayan örüntüler ile başlamalı ve büyüyen örüntüler ile devam etmelidir. İlk olarak öğrenci örüntünün nasıl devam edeceğini görmeye başlamadan önce pek çok farklı büyüyen örüntü ile karşılaşmaya gereksinim duyar. Öğrenci örüntünün kuralını sözel ifade edebilmeye başladıktan sonra sembolik gösterime geçebilir. Cathcart ve diğerleri, ilköğretimin son basamaklarında örüntünün t-tablosu, sembolik gösterim ve grafik temsillerinin her birinin öğrencilerin daha karmaşık cebirsel ilişkileri görmeleri için birer bileşen olduğunu savunurlar. Cathcart ve diğerlerine göre, büyüyen örüntülerin öğretimi erken öğrenme basamaklarında başlamalı, dizi çalışmaları ile genişlemeli ve yüksek basamaklarda fonksiyonlarla ilişkilendirilmelidir. Cathcart ve diğerleri bir örüntüyü t-tablosuna kaydetme ve büyüyen bir örüntünün kuralını bulma becerilerini kazanan bir öğrencinin, örüntünün grafik temsilini oluşturmaya hazır olduğunu belirtirler ve kibrit çöplerinden oluşturulmuş Şekil'5 deki örneği verirler.



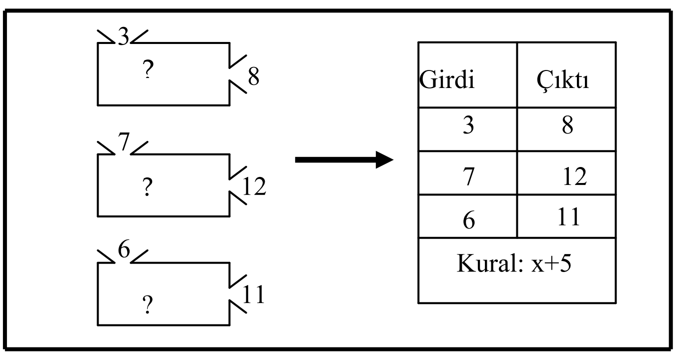
Şekil 5. Örüntünün grafik temsilini oluşturma

Cathcart ve diğerleri çoğu matematik eğitimcisi gibi, fonksiyon kavramının okulöncesinden itibaren örüntü kavramı kapsamında aynı zamanda "fonksiyon makinesi" yolu ile de tanıtılması taraftarıdırlar. Bu bağlamda okulöncesi dönemde uygulanabilecek bir etkinlik örneği olarak aşağıdaki fonksiyon makinesi etkinliğini verirler. Bu makinede girdi olarak kullanılacak kırmızı renkte, geometrik şekillerdeki kartonların daha büyük boy ve sarı renkte olanları kutunun içersine saklanmış durumdadır. Öğretmen kutuya atılan geometrik şekildeki kartonun aynı şekilli ancak, büyük boyunu çıktı olarak kutudan çeker ve öğrenciler ile şekilde görüldüğü gibi t-tablosunu oluşturur. Bu yolla öğrencilerin ilişkiyi görmelerine çalışır. Makinenin tablo temsili ile ilişkilendirilmesi için ise t-tablosuna şekillerin kendileri yerleştirilmektedir.



Şekil 6. Karton fonksiyon makinesi

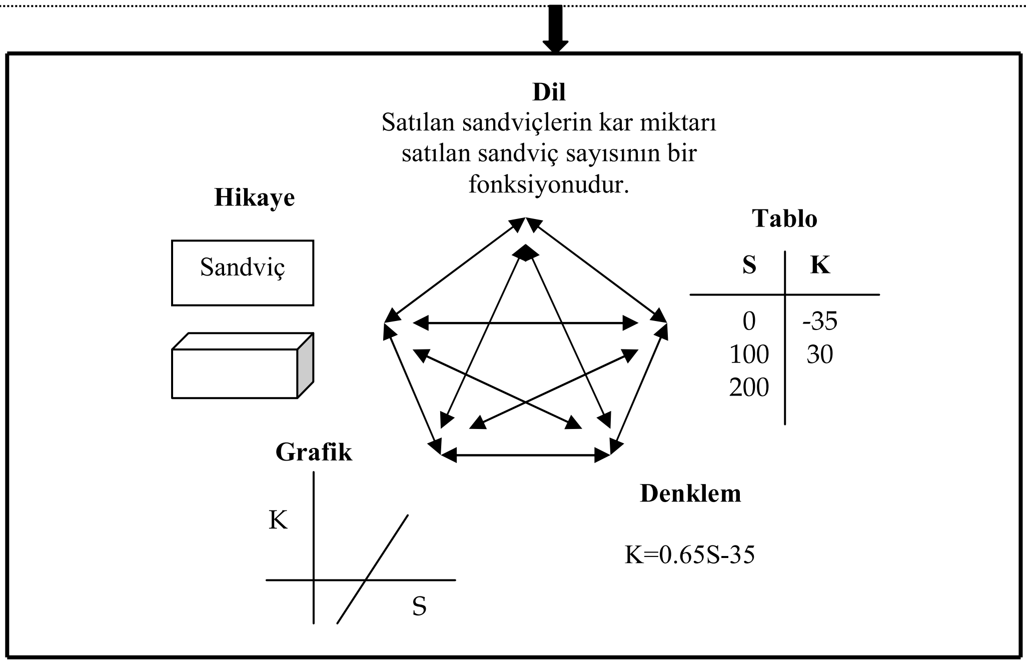
Hatfield, Edwards, Bitter ve Morrow (2004)'un Willoughby (1997) ve Sulzer (1998)'den aktardığına göre dördüncü sınıf öğrencileri "5 ekle" ifadesi yerine "x+5" gösterimini kullanabilirler. Hatfield ve diğerleri aynı zamanda Sulzer'in, dördüncü sınıfta fonksiyon makinesini tüm yıl sınıfta tutmanın, matematiksel düşünmenin gelişimini sağladığını vurgulaması üzerinde dururlar. Hatfield ve diğerleri bu savunuyu göz önünde bulundurarak, ilköğretim dördüncü sınıf öğrencileri için fonksiyon makinesi kullanımını aşağıdaki biçimde önermektedirler.



Şekil 7. "Kuralım ne?" fonksiyon makinesi

Van De Walle (2004) ise, büyüyen örüntüler ile başlayan fonksiyon kavramı öğretiminde, çoklu temsiller ve aralarındaki ilişkiler üzerinde durur. Van De Walle, öğrencilere anlamlı ve ilginç gelecek bir hikâyede değişim ilişkisine odaklanma ile başlaması gereken fonksiyon çalışmasında, öğrencilerin gerçek hayat fonksiyonel ilişkilerini kelime, grafik, denklem ya da tablo kullanarak ifade edebilmelerinin önemli olduğunu belirtir. Van De Walle'ye göre fonksiyon ilişkisi içeren uygun bir hikâye ile fonksiyon kavramının öğretimine başlanıldıktan sonra, bu hikâyenin çeşitli temsilleri ve bu temsiller arasındaki ilişki vurgulanmalıdır. Van De Walle'nin verdiği bir örnek hikâye aşağıda isim ve birimlerin değişimi ile sunulmaktadır ve Şekil 8 de ise hikayenin temsilleri ve aralarındaki ilişkiler vurgulanmaktadır (s.440). Şekil 8'de sandviç sayısı için S, kar miktarı için K sembolleri kullanılmaktadır.

"Birsu, kolej ödemelerine yardımcı olmak için okulda sandviç satmaktadır. Kullandığı bölüm için okula günlük 35 TL. ödemektedir. Bir sandviçi de 1,25 TL. den satmaktadır. Bir sandviçin maliyeti ise 60 kuruştur. Dolayısı ile bir sandviçten kazancı 65 kuruştur.



Şekil 8. Temsiller arası geçiş

Ortaöğretimde fonksiyon kavramının öğretimi göz önüne alındığında ise pek çok matematik eğitimcisi fonksiyon kavramına ilişkin bu denli çok ve çeşitli öğrenci güçlük ve yanılgılarının ortaya çıkmasının nedenini, kavramın ortaöğretimde veriliş şekli olarak ele alırlar. Willoughby (1999) öğrenci güçlüklerinin fazla olmasının nedenini, kavramın ani ve soyut bir yolla tanıtılması olarak belirtmektedir. Bunun yanında Willoughby, konunun uygun somut bir yolla verilmesi ve daha sonra zaman içerisinde soyutlaştırılması durumunda, erken yaşlardaki bir öğrenci tarafından bile anlaşılabileceğini savunur. Davidenko (1999) ise ortaöğretim ya da kolej düzeyinde fonksiyon kavramının öğretimine tanımının verilmesi ile başlanılarak arkasından tanım kümesindeki her elemanın yalnızca bir görüntüsünün olduğunun vurgulandığını ifade eder ve fonksiyon kavramının günlük yaşam örnekleri ile tanıtılması gerektiğini savunur. Kendisi, kullandığı bir günlük yaşam örneği olarak da benzin fiyatları örneğini verir. Sınıf tartışmasından sonra benzin çeşitlerine ve benzin istasyonlarına göre fiyatları içeren bir tablo yapılmasına karar verilir. Daha sonra öğretmen benzin çeşitini ve benzin istasyonunu sabitlemeyi ve fiyatlardaki zamana (günlük) bağlı değişime bakmayı önerir. Bu çalışmadan sonra öğrenciler farkında olmadan çok iyi bildikleri pek çok günlük yaşam durumlarında dahi birçok değişkenle ilişkide olduklarını anlarlar. Davidenko bu informal yolla değişken, fonksiyon, tanım ve değer kümesi kavramlarını tanıtmış olduğunu belirtmektedir. Davidenko takip eden etkinlikler olarak da öğrenciler ile gazetelerden çeşitli tablo ve grafikleri fonksiyon kavramı bağlamında inceler.

TARTIŞMA VE ÖNERİLER

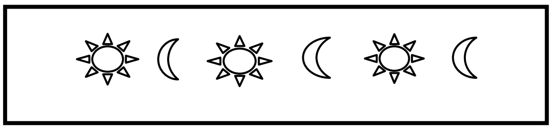
Matematik eğitimindeki yeri tartışılmaz olan fonksiyon kavramına matematik eğitimcileri tarafından gereken önem verilmiş ve kavrama ilişkin gerek öğrenme teorileri açısından, gerekse öğrenci güçlük ve yanılgıları ve öğretme stratejileri açısından pek çok çalışma literatüre katılmıştır. Buna karşın öğrencilerde neredeyse kaçınılmaz hale gelen güçlük ve yanılgılar ortadan kaldırılamamıştır. Burada sorgulanması gereken şey; üzerinde bu denli çalışılan bir konunun öğrenilme sürecinde neden öğrencilerin hala bu kadar çok güçlük ve yanılgılara sahip olduğudur.

Fonksiyon kavramının öğretimine iki yönden yaklaşılabilir. Bunlardan biri girdi-çıktı süreci yaklaşımı, diğeri ise özel bir bağıntı olması yaklaşımıdır. Kavramın tanıtılması aşamasında bu yaklaşımlardan hangisi kullanılırsa kullanılsın, kavramın öğretiminde çoklu temsil kullanımı matematik eğitimi literatüründe ortak görüş halini almıştır. Ayrıca soyut düşünme düzeyinin henüz başında verilen fonksiyon kavramının öğretiminin öğrenciler için ilgi çekici günlük yaşam hikayeleri ile ilişkilendirilmesi gerekliliği savunulmaktadır. Tüm bu yaklaşımların yanı sıra, kavramın tanımının kazanımı konusunda ortaya çıkan yanılgılar ve öğrencilerin sahip olduğu kavram görüntüleri göz ardı edilmemesi gereken iki noktadır. Kavramın tanıtılması sırasında kullanılan prototipler, öğrencilerde yanılgıya yol açan kavram görüntülerine neden olmaktadır (Clement, 2001; Breidenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992; Tall ve Vinner, 1991; Bakar ve Tall 1991; Confrey ve Smith, 1991). Ayrıca Drichlet-Bourbaki tanımının ardından bazı temsillerin özellikle de cebirsel temsilin yoğunlukta kullanılması, fonksiyonu bir denklem olarak görme gibi sıkça karşılaşılan yanılgılara neden olmaktadır (Montiel, Vidakovich ve Kabael, 2008; Bakar ve Tall 1991; Vinner ve Dreyfus 1989). Buradaki sorun; yapılan araştırmalar, ortaya çıkan öğrenci yanılgıları göz önünde bulundurularak matematik dersi öğretim programlarında öğretim yaklaşımlarının uygun biçimde harmanlanmamış olmasından kaynaklanmış olabilir. Diğer taraftan iki yaklaşımdan yalnızca biri öğretim stratejisi olarak alınmamalıdır. Çünkü matematik eğitimi literatürü öğrencilerin çoğunun fonksiyon kavramının öğrenilmesi sürecinde, kuralı verilen bir fonksiyon için bir x değerinin görüntüsünü bulmadan öteye gidemediğini, fonksiyonu bir girdiyi belirli bir kurala göre yalnızca bir çıktıya eşleyen bir matematiksel nesne olarak göremediklerini kaydetmiştir (Dubinsky ve Harel, 1992). Bu konuda değerlendirilmesi gereken bir diğer açı ise fonksiyon kavramı ile soyut kimlik kazanan fonksiyonel düşüncenin ortaöğretimde fonksiyon kavramı ile değil, ilköğretim hatta okulöncesi öğretimde önce somut materyaller arası ilişki ile başlayarak sırası ile sonrasında sayılar arası ve değişkenler arası ilişki ile devam ettiğidir. Yaşamın her yerinde olan fonksiyonel ilişki, okul öncesi dönemde düzeye uygun materyaller kullanılarak tanıtılan örüntüler bağlamında başlar ve yine ilköğretimde örüntü kapsamında önce geometrik şekiller ve sayılar sonra değişkenler arası ilişki olarak devam eder. Matematik eğitimi literatüründe örüntü kavramının öğretimi, özellikle belirgin örüntüdeki fonksiyonel ilişkiyi vurgulayan ve çoklu temsilleri içeren etkinlikler ile verilir. Yani erken basamaklarda matematik öğretimi üzerine yapılan çalışmalarda, hangi yüksek düzey matematiksel kavramlara temel oluşturduğu göz önüne alınarak öğretim etkinliklerinin düzenlendiği açıktır. Buna en güzel örneklerden biri okulöncesi öğretimde ve ilköğretimde verilen örüntü öğretimi etkinlikleridir. Örüntülerin temel oluşturduğu fonksiyon kavramında da pek çok çalışmanın yapılmış olduğu görülmektedir. Üzerinde daha fazla çalışmayı gerektiren nokta ise, fonksiyonlar konusunun çeşitli öğrenme teorileriyle belirlenen öğrenilme basamaklarının ve öğrenci yanılgılarının, erken öğrenme basamaklarında ilişkili olduğu kavramlar ile birlikte değerlendirmesi olabilir.

Örüntü ve fonksiyon kavramlarına ilişkin literatür tabanlı yapılan bu çalışmada, bahsedilen öğretim stratejilerine göre ortaya çıkan önerilere, araştırmacıların önerileri de eklenerek yer verilecektir. Önerilere iki açıdan değinilecektir. Bunlardan birincisi, örüntü ve fonksiyon kavramlarının öğretimini ilişkili bir biçimde gerçekleştirmeyi sağlayacak öneri ve örneklerden oluşmaktadır. İkincisi ise bu konulara ilişkin Türkiye'de ilköğretim ve ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında yapılabilecek gerekli düzenlemeler üzerinedir.

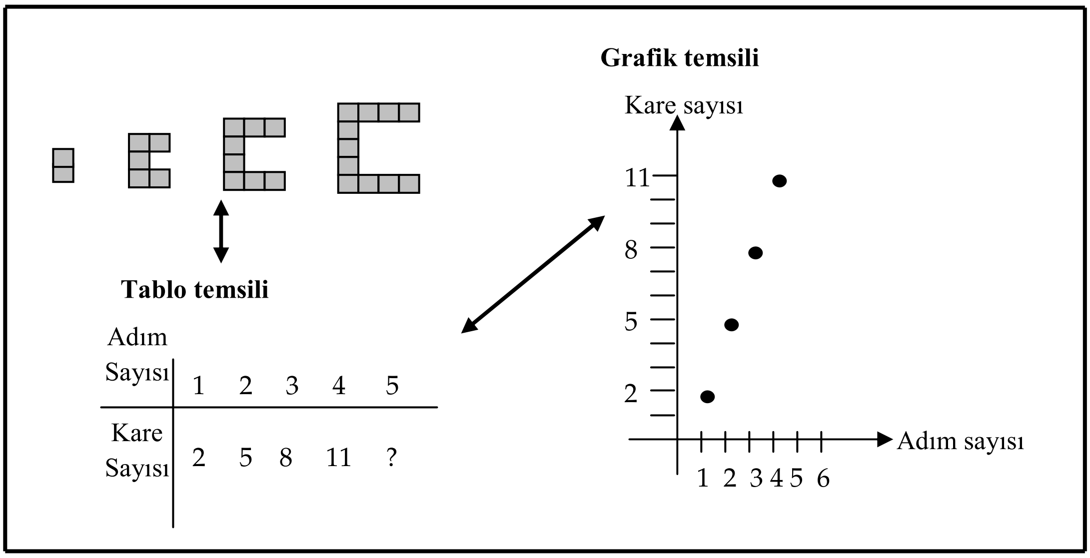
Örüntü ve fonksiyon kavramlarının öğretimini ilişkili bir biçimde gerçekleştirmeyi sağlayacak öneri ve örnekler şu şekilde özetlenebilir:

- Yaşamın her yerinde iç içe olduğumuz fonksiyonel ilişkinin okulöncesi öğretimde yer alan etkinlikleri belirlenmeli ve ilişkiyi öğrencilerin algılamasını sağlayacak düzeye uygun günlük yaşam hikayeleri ve öğretim materyalleri kullanılmalıdır. Örneğin;



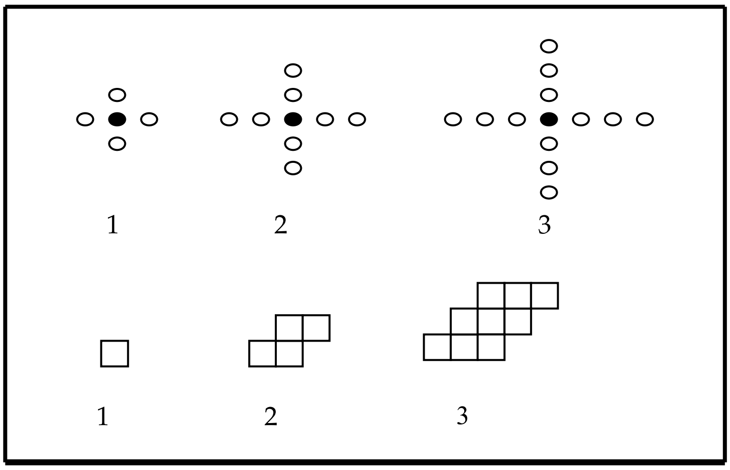
Şekil 9. Okulöncesi etkinliği örneği

- İlköğretimin erken basamaklarından itibaren örüntü kavramına ilişkin öğretim etkinlikleri düzenlenirken yine fonksiyonel ilişkiyi kavratma amacı göz önünde bulundurulmalı ve etkinliklerde düzeye uygun bir biçimde temsil kullanımı ve temsillerin ilişkilendirilmesi ihmal edilmemelidir. Bunun için mutlaka aynı örüntünün farklı temsil biçimleri üzerinde durulmalıdır ve özellikle fonksiyonel ilişkiyi vurgulayan tablo ve grafik temsilleri ve aralarındaki ilişkiler vurgulanmalıdır.



Şekil 10. Aynı örüntünün farklı temsil biçimleri

- Fonksiyon ve örüntü kavramlarının öğretiminde kullanılan günlük yaşam durumu örneklerinin, kullanılan temsil biçimlerinin ve etkinliklerin olabildiğince paralellik göstermesi, öğrencinin kodladığı bilgiyi geri çağırarak kavramlar arası ilişkiyi kurabilmesi açısından önemlidir. Paralellik, verilen örnekler açısından ele alınırsa fonksiyon kavramının öğretiminde kullanımı alışılmış hale gelen fonksiyon örneklerinin, örüntü kavramı öğretiminde birer örüntünün kuralı olarak ortaya çıkacak biçimde ilişkilendirilmesi gerekir. Örneğin $y=4x+1$ şeklinde doğrusal bir fonksiyon ya da $y=x^2$ şeklinde kuadratik fonksiyon örneklerine temel oluşturması açısından erken öğretim basamaklarında Şekil 11 de verilen örüntü örnekleri kullanılabilir. Şekil 11 de n; adım sayısını göstermek üzere genel kuralları sırası ile $f(n)=4n+1$ ve $g(n)=n^2$ cebirsel eşitlikleri ile verilen örüntülerin geometrik temsilleri görülmektedir.



Şekil 11. Geometrik temsiller

Şekil 11'de geometrik temsilleri görülen örüntülerin, sayı dizisi şeklindeki temsilleri Şekil'12 de verilmektedir.

5 9 13 17 21   1 4 9 16 25

Şekil 12. Sayı dizisi temsili

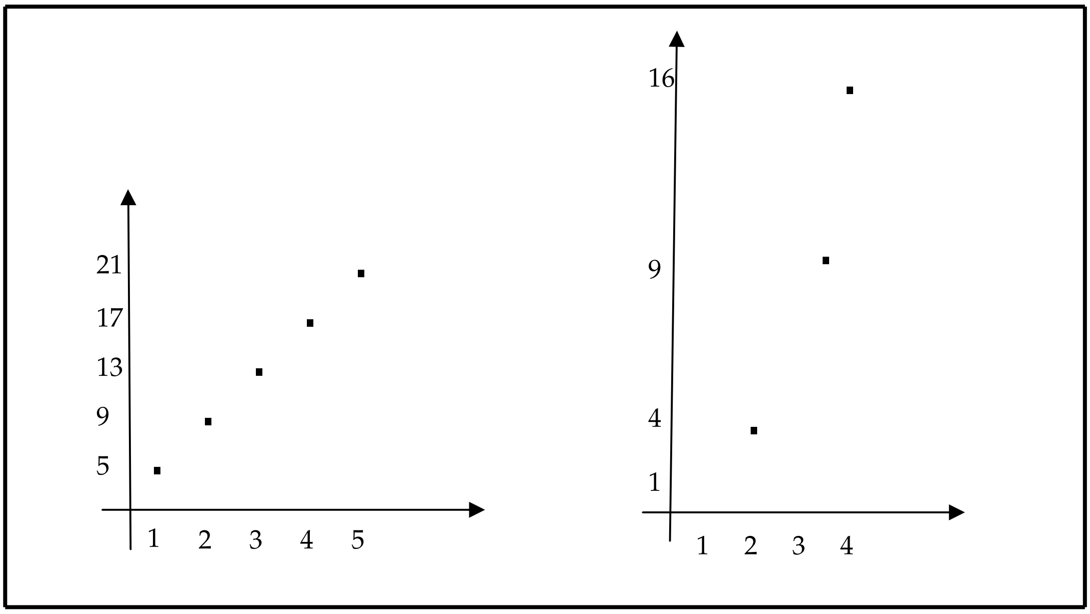
Bu örüntülerin tablo temsilleri de sırası ile Şekil'13 de görüldüğü gibidir. Tablo temsilleri erken basamaklarda f(n) ve g(n) şeklindeki sembolik gösterimleri olmaksızın kullanılabilir.

n	1	2	3	4	5
f(n)	5	9	13	17	21

n	1	2	3	4	5
g(n)	1	4	9	16	25

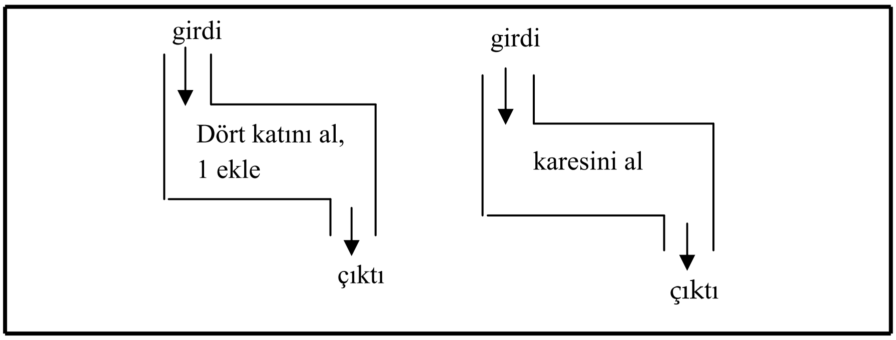
Şekil 13. Tablo temsilleri

Örüntülerin grafik temsilleri de tablo temsilinde olduğu gibi erken basamaklarda Şekil'14 te görüldüğü gibi verilebilir.

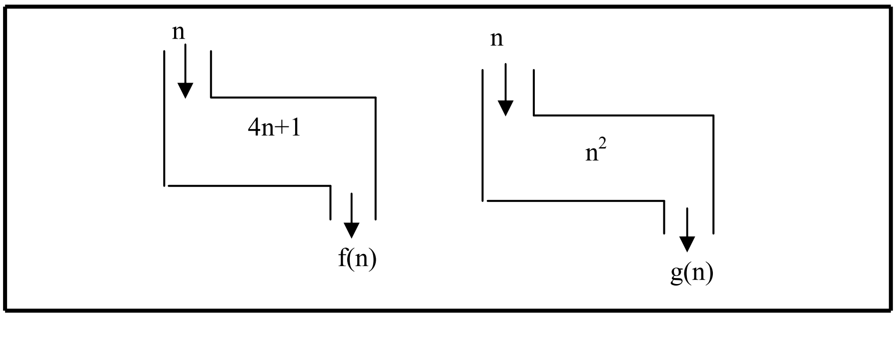


Şekil 14. Grafik temsilleri

Örüntüler erken basamaklarda Şekil 15' de görüldüğü gibi, öğrenciler değişken kavramı ile tanıştıktan sonra ise Şekil 16'da verildiği biçimde fonksiyon makinesi ile temsil edilebilirler.



Şekil 15. Erken basamaklarda fonksiyon makinesi



Şekil 16. Fonksiyon makinesi

Cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde erken basamaklarda örüntülerin yukarıda verildiği biçimde çeşitli temsillerini kullanan bir öğrenci bu örüntüler ile, fonksiyon kavramında ve bir fonksiyonun benzer temsilleri şeklinde karşılaştığında, gerekli bilgi transferini kolaylıkla gerçekleştirebilecektir. Bu yaklaşım fonksiyon kavramına ve çoklu temsillerine ilişkin güçlük ve yanılgıları aza indirebilir.

- Fonksiyon kavramının tanıtılması bağıntı kavramından sonra ve özel bir bağıntı olarak yapılsa bile soyut öğrenme düzeyine henüz geçmiş öğrenciler için bu tanıtımın günlük yaşam hikayeleri ile tanıtımı sağlanabilir. Fonksiyon kavramındaki soyut bilginin bağıntı hatta kartezyen çarpım kavramları ile başladığı göz önünde bulundurulursa, hikayeleştirmeye kartezyen çarpım kavramından başlanılmalıdır. Örneğin, ortaöğretimde öğrenciler üniversite giriş sınavlarına odaklanmış durumda olduklarından bir örnek olarak bu konu alınabilir. A kümesi üç öğrenciden oluşan bir küme olsun. Çeşitli üniversitelerin bazı bölümlerinin kümesini ise B ile adlandıralım. Bu durumda,

A={Nuran, Levent, Birsu}

B= {Anadolu Ü. Matematik Öğretmenliği, O.D.T.Ü Makine Mühendisliği, Hacettepe Ü. Tıp, Uludağ Ü. Edebiyat, Ankara Ü. Tarih, İstanbul Ü. Resim, Marmara Ü. Kimya}

şeklinde olabilir. Burada kolaylık olması için aşağıdaki kısaltmaları kullanalım.

Anadolu Ü. Matematik Öğretmenliği	: A.Ü.M.Ö
ODTÜ Makine Mühendisliği	: O.M.M
Hacettepe Ü. Tıp	: H.Ü.T.
Uludağ Ü. Edebiyat	: U.Ü.E
Ankara Ü. Tarih	: A.Ü.T
İstanbul Ü. Resim	: İ.Ü.R
Marmara Ü. Kimya	: M.Ü.K

Öğrencilerin tercih yapmaları konusunda herhangi bir kısıtlama getirilmeyeceğinden aşağıdaki ikili kümesi yani A Kartezyen çarpım B kümesi elde edilir.

A×B={(Nuran, A.Ü.M.Ö), (Nuran, O.M.M), (Nuran, H.Ü.T), (Nuran, U.Ü.E), (Nuran, A.Ü.T), (Nuran, İ.Ü.R), (Nuran, M.Ü.K), (Levent, A.Ü.M.Ö), (Levent, O.M.M), (Levent, H.Ü.T), (Levent, U.Ü.E), (Levent, A.Ü.T), (Levent, İ.Ü.R), (Levent, M.Ü.K), (Birsu,A.Ü.M.Ö), (Birsu, O.M.M), (Birsu, H.Ü.T), (Birsu, U.Ü.E), (Birsu, A.Ü.T), (Birsu, İ.Ü.R), (Birsu, M.Ü.K)}

Öğrencilerin tercihlerine ilişkin ikililerden oluşan A×B kümesinin alt kümesi, aşağıda görüldüğü gibi olsun.

{(Nuran, O.M.M), (Nuran, H.Ü.T), (Nuran, M.Ü.K), (Levent, U.Ü.E), (Levent, A.Ü.T), (Levent, İ.Ü.R), (Birsu, A.Ü.M.Ö), (Birsu, O.M.M), (Birsu, H.Ü.T), (Birsu, A.Ü.T), (Birsu, M.Ü.K)}

A×B kümesinin yukarıdaki örnekte olduğu gibi çeşitli alt kümeleri alınarak "bağıntı" şeklinde isimlendirilir. Üniversiteye giriş sınav sonuçları açıklandığında her öğrenci en fazla bir tercihine yerleştirilecektir. Öğrenci ve tercihinden oluşan ikililerin kümesi olan bağıntı yazılarak, A×B nin diğer alt kümeleri yani diğer bağıntılar ile farkı ya da ortak özellikleri sorgulanabilir. Bu yolla öğrenciler fonksiyon olma koşulunu sağlayan bağıntıların ve ortak özelliklerinin belirlenmesi yolu ile fonksiyon kavramı bilgisine yönlendirilebilirler. Bundan sonraki aşamada öğrencilerin, böyle bir örneği sembol kullanılarak verilecek örnekler ile ilişkilendirmesi kolay olabilir. Bu yaklaşımla Kartezyen çarpım, bağıntı ve fonksiyon kavramları ortaöğretimde soyut düşünme düzeyinin henüz başında olan öğrenciler için birer güçlük olmaktan çıkar ve öğrencilerin özellikle fonksiyon kavramının Drichlet-Bourbaki tanımını kavramaları kolaylaşır. Günlük yaşam örnekleri yaklaşımı aynı zamanda fonksiyon makinesi yardımı ile fonksiyonun bir süreç olduğunu kavratma aşamasında da önce günlük yaşamdan fonksiyon örneği oluşturabilecek makinelerin tanıtılması şeklinde de kullanılmalıdır.

Örüntü ve fonksiyon kavramlarının öğretimine Türkiye'deki İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programları açısından bakıldığında ise, pek çok yeniden düzenlemeye gereksinim olduğu ortaya çıkmaktadır. Türkiye'de örüntüler konusu, ilk kez bir çok ülkenin öğretim programları ve NCTM'nin de çalışmaları dikkate alınarak yenilenen ve 2005 yılında uygulamaya konulan İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programına dahil edilmiştir. Ancak, İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde örüntü kavramının öğretiminde kullanılan yaklaşımlar konusunda dünya literatüründe son yıllarda yapılan gelişmelere hiç yer verilmemiş olduğu, öğretim etkinliklerinde, cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde örüntüler konusunun değişken, eşitlik ve daha ilerleyen basamaklarda fonksiyon kavramına temel oluşturduğunun göz önünde bulundurulmadığı görülmektedir. Kavramların öğretiminde çoklu temsil ortamlarının kullanımının matematik eğitimi literatüründe uzun yıllardır destekleniyor olmasına karşın, programda bulunan örüntü konusunun öğretim etkinliklerinde, temsil kullanımının dahi yetersiz olduğu gözlenmektedir. Örneğin örüntünün tablo ile temsiline yalnızca 6. sınıf etkinliğinde yer verilmiştir. Ayrıca kullanılan tabloların fonksiyon tablosu (t-tablosu) biçiminde olmadığı ve fonksiyon makinesinin ise hiç kullanılmadığı görülmektedir. Türkiye'de fonksiyon kavramının öğretimine ortaöğretim 9. sınıfta bağıntı kavramının verilmesinden sonra, özel bir bağıntı şeklinde tanıtılarak başlanılır. Ancak, Türkiye'de 2005-2006 öğretim yılında yenilenen ortaöğretim programında, son yirmi yılda matematik eğitimcilerinin ortak savunusu haline gelmiş çoklu temsillerin ve özellikle aralarındaki ilişkilerin vurgulanmasına yönelik kazanımların ve öğretim etkinliklerinin oldukça yetersiz olduğu göze çarpmaktadır. Programda fonksiyonların yalnızca Venn şeması ve grafik temsillerine ve bir öğretim etkinliğinde fonksiyon makinesi ve tablo temsillerine rastlanmaktadır.

Sonuç olarak, İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Dersi Programlarında örüntü ve fonksiyon kavramlarına ilişkin kazanım ve öğretim etkinliklerinin yukarıda belirttiğimiz yaklaşımlar doğrultusunda yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Ayrıca, bu yaklaşımların matematik öğretmenleri tarafından uygulanabilmesi için matematik öğretmenlerine yönelik bir hizmet içi eğitim programına gereksinim vardır.

KAYNAKÇA

Bakar, M. & Tall, D. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs, *Proceedings of PME 15*, Assisi, 1, 104–111.

Billstein, R., Libeskind S. & Lott J. W. (2004). A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers. (8th Ed.) New York: Addison- Wesley.

Blanton, M. L. & Kaput, J. (*2004*). "Elementary grades students' capacity for functional thinking." In M. J. Hoines ve A. Fuglestad (Ed.), *Proceeding of The 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 135-142. Bergen Norway: International Group For The Psychology of Mathematics Education.

Breidenbach, D., Dubinsky, E.,Hawks, J.,& Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1992), 247-285.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A. Moyer, J. C. Ng, S. F. & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross- cultural comparative. *ZDM*. 37 (1), 5-15.

Carraher, D. W. & Martinez, M. V. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*. 40 (3), 1-22.

Cathcart, W. G., Pothier, V. M., Vance, T. H. & Bezuk, N. S. (2003). Learning mathematics in elementary and middle schools. (3th Ed.) River, N.J: Merrill/Prentice Hall.

Clement, L. (2001). What do students really know about functions? *The Mathematics Teacher, 94* (9), 745.

Confrey, F. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 57-63, Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Davidenko, S. (1999). Building the concept of function from students' everyday activities. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grade K-12* (140-145). National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.

Driskol, M. & Moyer, J. (2001). Using students' work as a lens on algebraic thinking. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 6 (5), 283-287.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function, In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25* (pp.85-106). Mathematical association of America, Washington.

English & Warren (1999). Introducing the variable through pattern exploration. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grade K-12* (140-145). National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies.* 24(3), 315-331.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (67-83). London and New York: Cassell.

Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G., & Morrow, J. (2004). Mathematics methods for elementary and middle school teachers. (5th Ed.) USA: Wiley&Sons.

Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. Masters Abstract International, 44 (02), 124. (UMI No: AAT MR07303).

Montiel,M., Vidakovic,D. & Kabael,T.(2008) Relationship between students' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1(2), 2008.

Mor, Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. ve Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. *International Journal for Technology in Mathematics Education.* 13(2), 65-78.

(NCTM). (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. http://www.nctm.org/standards.htm adresinden 14.09.2005 tarihinde alınmıştır.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (104-120). London and New York: Cassell.

Samsan, M. C., Linchevski, L. & Olivier, A. (1999). "The influence of different representations on children's generalisation thinking processes." *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education. Harare, Zimbabwe.* 406-415.

Sheffield, L. J. & Cruikshank, D. E. (2005). Teaching and learning mathematics. Pre-kindergarten though middle school. (5th Ed.) New York : J. Wiley.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151– 169.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grade K-4. *Teaching Children Mathematics*, 3, 346-356.

Van De Walle, J. A. (2004). Elementary and middle school mathematics. **(**5th Ed.) Boston: Allyn and Bacon.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vogel, R. (2005). Pattern- a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM*. 37 (5), 445-449.

Vollrath, H. J. (1986). "Search strategies as indicators of functional thinking." *Educational Studies in Mathematics.* 17, 387-400.

Zaskis, R. & Liljedahil, P. (2006). "On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway." In R. Zaskis & S. R. Campbell (Ed.), *Number theory in mathematics education* (99-114). London: Lawrence Erlbaum Assocıates, Publishers.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6 (2), 150-162.

Willoughby, S. S. (1999). Function from kindergarten through sixth grade. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grade K-12* (140-145). National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.