Elementary Education Online, 8(1), tp:1-9, 2009.
İlköğretim Online, 8(1), öü:1-9, 2009. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

ÖĞRETİM UYGULAMASI

Tamsayılarda Bölünebilme Kurallarının Öğretimi

Murat PEKER•

ÖZ. Bu öğretim uygulamasının yapılma amacı, öğrencilerin kural olarak öğrendikleri pozitif tamsayılarda bölünebilme kurallarının nereden geldiği hakkında düşünmelerini sağlamaktır. Öğrenme; sadece "Ne?" sorusuna cevap bulmak değil, "Niçin?, Nasıl?, … ise ne?" gibi soruları da sormak ve bunlara cevap bulmakla mümkündür. Bu çalışmada, bölünebilme kuralları hakkında "Niçin?" sorusuna cevap aranmıştır. Örnek olarak 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 24, 55 ile bölünebilme kurallarının nasıl ortaya çıktığı incelenmiştir. Bu kuralların niçin verilen şekilde olduğunun çalışmayı okuyanlar tarafından bilinmesi ile diğer pozitif tamsayılarla bölünebilme kurallarına kendilerinin ulaşması için merak uyandırması, diğer bir ifade ile çalışmayı okuyanların "… ise ne?" sorusuna kendilerinin cevap aramaları beklenmektedir.

Giriş

"Bölünebilme" kavramı bir tamsayının verilen herhangi bir tam sayıya tam bölünebilmesini ifade etmektedir (Altun, 2008). Bir tam sayı diğer bir tam sayıyı tam olarak bölebiliyorsa, o sayının zıt işaretlisini de tam olarak böleceği açıktır (Delil, 2006). Bu nedenle tam sayılarda bölünebilmeden bahsedildiğinde, genelde bir pozitif tam sayının bir pozitif tam sayıyı tam bölmesi dikkate alınacaktır.

A,B,C ve K doğal sayılar olmak üzere, A sayısının B ile bölümünde bölüm C ve kalan K ise $A = B \cdot C + K$ şeklinde yazılır ($K < B$). Burada $K = 0$ olması durumunda $A = B \cdot C$ olup A sayısı B sayısına tam bölünür, ya da "B sayısı A sayısını tam böler" denir.

Pek çok öğrencinin bir sayının 6 ile tam bölünebilmesi için hem 2 hem de 3 ile tam bölünmesi gerektiğini, bir sayının 9 ile tam bölünebilmesi için basamak değerleri toplamının 9'un katı olması gerektiğini ezbere bildikleri, ancak niçin böyle olduğu hakkında fikirlerinin olmadığı belirtilmektedir (Altun, 2002/2008). Bunun için verilen sayının yazıldığı sistemdeki çözümlenmesinden yararlanarak bölünebilme kuralları elde edilebilir (Altun, 2002/2008; Delil, 2006; Baki, 2008).

Bu çalışmada, öğrencilerin bölünebilme kuralları hakkında ispat yeteneklerini geliştirmeleri için bazı kuralların elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Bu doğrultuda, 9. sınıflarda 4 ders saati süresince doğal sayılarda bölünebilme kurallarının öğretimi, aşağıdaki kazanım dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Öğrenme Alanı : Cebir
Bölüm : Sayılar
Alt öğrenme alanı: Doğal Sayılar
Kazanım 1 : 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ve 6, 15, 18 vb. ile bölünebilme kurallarını belirler.

Bu çalışmada, bölünebilme kuralları hakkında daha fazla düşünme becerilerinin geliştirilmesi için ayrıca 7, 10, 12, 13, 14, 16, 24, 55 ile bölünebilme de incelenmiştir.

2 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 10 çarpanı olmasından dolayı 2'nin tam katıdır, dolayısıyla 2 ile tam bölünür. Bu sayının 2 ile tam bölünmesi birler basamağındaki rakama bağlıdır. Yani; birler basamağındaki rakam 2'nin tam katı ise bu sayı 2 ile tam bölünür, 1'ler basamağındaki rakam 2'nin tam katı değil ise bu sayı 2 ile tam bölünmez. Örneğin;

• Yrd. Doç. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü,
e-mail: peker@aku.edu.tr

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= \underbrace{2 \cdot (5000 \cdot A + 500 \cdot B + 50 \cdot C + 5 \cdot D)}_{\text{2 ile tam bölünür}} + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 2 ile tam bölünmesi E'nin 2'nin tam katı olup - olmamasına bağlıdır. Diğer bir ifade ile $ABCDE$ sayısının 2 ile bölümünden kalan, E'nin 2 ile bölümünden kalandır.

3 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerleri 3'ün katının 1 fazlası ile o rakamın çarpımına eşittir. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= (9999+1) \cdot A + (999+1) \cdot B + (99+1) \cdot C + (9+1) \cdot D + E$$
$$= 9999 \cdot A + A + 999 \cdot B + B + 99 \cdot C + C + 9 \cdot D + D + E$$
$$= \underbrace{3 \cdot (3333 \cdot A + 333 \cdot B + 33 \cdot C + 3 \cdot D)}_{\text{3 ile tam bölünür}} + A + B + C + D + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 3 ile tam bölünmesi $A+B+C+D+E$'nin 3'ün tam katı olup olmamasına bağlıdır. $A+B+C+D+E = 3 \cdot k \quad (k \in Z)$ ise $ABCDE$ sayısı 3 ile tam bölünür. Aksi takdirde $A+B+C+D+E$ toplamının 3 ile bölümünden kalan $ABCDE$ sayısının 3 ile bölümünden kalandır.

4 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde yüzler ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 100 çarpanı olmasından dolayı 4'ün tam katıdır, dolayısıyla 4 ile tam bölünür. Bu sayının 4 ile tam bölünmesi birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu sayıya bağlıdır. Yani, birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı 4'ün tam katı ise bu sayı 4 ile tam bölünür, birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı 4'ün tam katı değil ise bu sayı 4 ile tam bölünmez. Diğer bir ifade ile birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu sayının 4 ile bölümünden kalan başlangıçta verilen sayının 4 ile bölümünden kalanı verir. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= \underbrace{4 \cdot (2500 \cdot A + 250 \cdot B + 25 \cdot C)}_{\text{4 ile tam bölünür}} + 10 \cdot D + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 4 ile tam bölünmesi $10 \cdot D + E$'nin, diğer bir ifade ile DE iki basamaklı sayısının 4'ün tam katı olup olmamasına bağlıdır. $ABCDE$ sayısının 4 ile bölümünden kalan, DE iki basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalandır.

4 ile tam bölünebilme için çıkarılabilecek diğer kural aşağıdaki gibi olabilir.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E \text{ olup,}$$
$$= \underbrace{4 \cdot (2500 \cdot A + 250 \cdot B + 25 \cdot C + 2 \cdot D)}_{\text{4 ile tam bölünür}} + 2 \cdot D + E \text{ yazılabilir.}$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 4 ile tam bölünmesi $2 \cdot D + E$'nin 4'ün tam katı olup olmamasına bağlıdır. Yani verilen herhangi bir pozitif tam sayının onlar basamağındaki rakamın 2 katı ile birler basamağındaki rakamın toplamı 4'ün tam katı ise bu sayı 4 ile tam bölünür, aksi halde bölünemez. Diğer bir ifade ile $2 \cdot D + E$'nin 4 ile bölümünden kalan $ABCDE$ sayısının 4 ile bölümünden kalanı verir.

5 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 10 çarpanı olmasından dolayı 5'in tam katıdır, dolayısıyla 5 ile tam bölünür. Bu sayının 5 ile tam bölünmesi birler basamağındaki rakama bağlıdır. Yani; birler basamağındaki rakam 5'in tam katı ise bu sayı 5 ile tam bölünür, birler basamağındaki rakam 5'in tam katı değil ise bu sayı 5 ile tam bölünmez. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= \underbrace{5 \cdot (2000 \cdot A + 200 \cdot B + 20 \cdot C + 2 \cdot D)}_{\text{5 ile tam bölünür}} + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 5 ile tam bölünmesi E'nin 5'in tam katı olup olmamasına bağlıdır. Diğer bir ifade ile verilen sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalan, o sayının 5 ile bölümünden kalanı verir.

6 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 2$, $K_2 < 3$); A sayısının 2 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1 ve aynı A sayısının 3 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 2 \cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 3 \cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 3 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 2 ile çarparsak;

$$3 \cdot A = 6 \cdot B_1 + 3 \cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$2 \cdot A = 6 \cdot B_2 + 2 \cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. Birinci eşitlikten ikinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$A = 6 \cdot (B_1 - B_2) + 3 \cdot K_1 - 2 \cdot K_2$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $4 \cdot K_2$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 6 \cdot (B_1 - B_2) + 3 \cdot K_1 - 2 \cdot K_2 - 4 \cdot K_2 + 4 \cdot K_2$ bulunur. O halde;

$A = 6 \cdot (B_1 - B_2 - K_2) + 3 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 2 ile bölümünden kalan K_1 ve 3 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 6 ile bölümünden kalan $3 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 6 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 2 hem de 3 ile tam bölünüyorsa 6 ile de tam bölünür.

7 ile Bölünebilme

Altı basamaklı bir $ABCDEF$ sayısını ele alalım ve bu sayıyı çözümleyelim.

$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$ olup düzenlenirse;

$$= 7 \cdot 14286 \cdot A - 2 \cdot A + 7 \cdot 1429 \cdot B - 3 \cdot B + 7 \cdot 143 \cdot C - C + 7 \cdot 14 \cdot D + 2 \cdot D + 7 \cdot E + 3 \cdot E + F$$
$$= \underbrace{7 \cdot (14286 \cdot A + 1429 \cdot B + 143 \cdot C + 14 \cdot D + E)}_{\text{7 ile tam bölünür}} + (-1) \cdot (2 \cdot A + 3 \cdot B + C) + (2 \cdot D + 3 \cdot E + F)$$

elde edilir. Bu durumda $ABCDEF$ sayısının 7 ile bölümünden kalan;

$K = (-1) \cdot (2 \cdot A + 3 \cdot B + 1 \cdot C) + (+1) \cdot (2 \cdot D + 3 \cdot E + 1 \cdot F)$ toplamının 7 ile bölümünden kalan olur. Bu sonucu genellemek istersek;

$A_n ... A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı bir sayının 7 ile bölümünden kalanı bulmak için sayı sağdan sola doğru 3'erli gruplandırılır. Daha sonra yukarıda bulunduğu gibi, gruplardaki rakamların sağdan sola sırayla 1 katı, 3 katı, 2 katı alınarak bulunacak olan sayı grupları yine sırayla sağdan sola (+1) ile ve (-1) ile çarpılarak elde edilen sonuçlar toplanır. Toplamın 7 ile bölümünden kalan, $A_n ... A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı sayının 7 ile bölümünden kalan olarak bulunur. Eğer elde edilen toplamın 7 ile bölümünden kalan 0 ise $A_n ... A_3 A_2 A_1$ sayısı 7 ile tam bölünür. (…231231231231231 kuralı olarak bilinir (+) (-))

8 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde binler ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 1000 çarpanı olmasından dolayı 8'in tam katıdır, dolayısıyla 8 ile tam bölünür. Bu sayının 8 ile tam bölünmesi birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların oluşturduğu üç basamaklı sayıya veya birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamlara bağlıdır. Yani; birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı 8'in tam katı ise bu sayı 8 ile tam bölünür, birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı 8'in tam katı değil ise bu sayı 8 ile tam bölünmez. Diğer bir ifade ile birler, onlar ve yüzler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayının 8 ile bölümünden kalan başlangıçta verilen sayının 8 ile bölümünden kalanı verir. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= \underbrace{8 \cdot (1250 \cdot A + 125 \cdot B)}_{8 \text{ ile tam bölünür}} + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 8 ile tam bölünmesi $100 \cdot C + 10 \cdot D + E$'nin, diğer bir ifade ile CDE üç basamaklı sayısının 8'in tam katı olup olmamasına bağlıdır. $ABCDE$ sayısının 8 ile bölümünden kalan, CDE üç basamaklı sayısının 8 ile bölümünden kalandır.

8 ile tam bölünebilme için çıkarılabilecek diğer bir kural aşağıdaki gibi olabilir.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E \text{ olup}$$
$$= \underbrace{8 \cdot (1250 \cdot A + 125 \cdot B + 12 \cdot C + D)}_{8 \text{ ile tam bölünür}} + 4 \cdot C + 2 \cdot D + E \text{ yazılabilir.}$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 8 ile tam bölünmesi $4 \cdot C + 2 \cdot D + E$'nin 8'in tam katı olup olmamasına bağlıdır. Yani verilen herhangi bir pozitif tam sayının yüzler basamağındaki rakamın 4 katı ile onlar basamağındaki rakamın 2 katı ve birler basamağındaki rakamın toplamı 8'in tam katı ise bu sayı 8 ile tam bölünür, aksi halde bölünemez. Yani, $4 \cdot C + 2 \cdot D + E$'nin 8 ile bölümünden kalan $ABCDE$ sayısının 8 ile bölümünden kalanı verir

9 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerleri 9'un katının 1 fazlası ile o rakamın çarpımına eşittir. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= (9999 + 1) \cdot A + (999 + 1) \cdot B + (99 + 1) \cdot C + (9 + 1) \cdot D + E$$
$$= 9999 \cdot A + A + 999 \cdot B + B + 99 \cdot C + C + 9 \cdot D + D + E$$
$$= \underbrace{9 \cdot (1111 \cdot A + 111 \cdot B + 11 \cdot C + D)}_{9 \text{ ile tam bölünür}} + A + B + C + D + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 9 ile tam bölünmesi $A + B + C + D + E$'nin 9'un tam katı olup olmamasına bağlıdır. $A + B + C + D + E = 9 \cdot k \quad (k \in IN)$ ise $ABCDE$ sayısı 9 ile tam bölünür. Aksi takdirde $A + B + C + D + E$ toplamının 9 ile bölümünden kalan $ABCDE$ sayısının 9 ile bölümünden kalandır.

10 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde onlar ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 10 çarpanı olmasından dolayı 10'un tam katıdır, dolayısıyla 10 ile tam bölünür. Bu sayının 10 ile tam bölünmesi birler basamağındaki rakama bağlıdır. Yani; birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile tam bölünür, birler basamağındaki rakam 0 değil ise bu sayı 10 ile tam bölünmez. Örneğin;

$ABCDE$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDE = 10000 \cdot A + 1000 \cdot B + 100 \cdot C + 10 \cdot D + E$$
$$= \underbrace{10 \cdot (1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D)}_{\text{10 ile tam bölünür}} + E$$

Bu durumda $ABCDE$ sayısının 10 ile tam bölünmesi E'nin 0 olup olmamasına bağlıdır. Diğer bir ifade ile $ABCDE$ sayısının 10 ile bölümünden kalan, E'nin 10 ile bölümünden kalandır.

11 ile Bölünebilme

Altı basamaklı bir $ABCDEF$ sayısını ele alalım ve bu sayıyı çözümleyelim.

$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$ olup düzenlenirse;

$$= 11 \cdot 9091 \cdot A - A + 11 \cdot 909 \cdot B + B + 11 \cdot 91 \cdot C - C + 11 \cdot 9 \cdot D + D + 11 \cdot E - E + F$$
$$= \underbrace{11 \cdot (9091 \cdot A + 909 \cdot B + 91 \cdot C + 9 \cdot D + E)}_{\text{11 ile tam bölünür}} - A + B - C + D - E + F$$ elde edilir.

Bu durumda $ABCDEF$ sayısının 11 ile bölümünden kalan;

$-A + B - C + D - E + F$ toplamının 11 ile bölümünden kalan olur. Bu sonucu genellemek istersek; $A_n \ldots A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı bir sayının 11 ile bölümünden kalanı bulmak için sayı sağdan sola doğru 1'er 1'er gruplandırılır. Gruplandırılan bu rakamlar sağdan sola sırayla (+1) ile ve (-1) ile çarpılarak elde edilen sonuçlar toplanır. Toplamın 11 ile bölümünden kalan $A_n \ldots A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı sayının 11 ile bölümünden kalan olarak bulunur. Eğer elde edilen toplamın 11 ile bölümünden kalan 0 ise $A_n \ldots A_3 A_2 A_1$ sayısı 11 ile tam bölünür. (… - + - + - + - + - +)

12 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 4$, $K_2 < 3$); A sayısının 4 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1 ve aynı A sayısının 3 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 4 \cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 3 \cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 3 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 4 ile çarparsak;

$$3 \cdot A = 12 \cdot B_1 + 3 \cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$4 \cdot A = 12 \cdot B_2 + 4 \cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. İkinci eşitlikten birinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$A = 12 \cdot (B_2 - B_1) + 4 \cdot K_2 - 3 \cdot K_1$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $9 \cdot K_1$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 12 \cdot (B_2 - B_1) + 4 \cdot K_2 - 3 \cdot K_1 - 9 \cdot K_1 + 9 \cdot K_1$ bulunur. O halde;

$A = 12 \cdot (B_2 - B_1 - K_1) + 9 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 4 ile bölümünden kalan K_1 ve 3 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 12 ile bölümünden kalan $9 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 12 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 4 hem de 3 ile tam bölünüyorsa 12 ile de tam bölünür.

13 ile Bölünebilme

Dokuz basamaklı bir $ABCDEFGHJ$ sayısını ele alalım ve bu sayıyı çözümleyelim.

$ABCDEFGHJ = 100000000 \cdot A + 10000000 \cdot B + 1000000 \cdot C + 100000 \cdot D + 10000 \cdot E + 1000 \cdot F + 100 \cdot G + 10 \cdot H + J$ olup düzenlenirse;

$$ABCDEFGHJ = 100000004 \cdot A - 4 \cdot A + 10000003 \cdot B - 3 \cdot B + 999999 \cdot C + C + 99996 \cdot D$$
$$+ 4 \cdot D + 9997 \cdot E + 3 \cdot E + 1001 \cdot F - F + 104 \cdot G - 4 \cdot G + 13 \cdot H - 3 \cdot H + J$$

yazılabilir. Buradan;

$$ABCDEFGHJ = \overbrace{13\cdot(7692308\cdot A+769231\cdot B+76923\cdot C+7692\cdot D+769\cdot E+77\cdot F+8\cdot G+H)}^{13 \text{ ile tam bölünür}}+(-4\cdot A-3\cdot B+C+4\cdot D+3\cdot E-F-4\cdot G-3\cdot H+J)$$ elde edilir.

Bu durumda $ABCDEFGHJ$ sayısının 13 ile bölümünden kalan;
$K=(-1)\cdot(4\cdot A+3\cdot B)+(C+4\cdot D+3\cdot E)+(-1)(1\cdot F+4\cdot G+3\cdot H)+J$ toplamının 13 ile bölümünden kalan olur. Bu sonucu genellemek istersek;
$A_n ... A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı bir sayının 13 ile bölümünden kalanı bulmak için sayı 1'ler basamağı dışında sağdan sola doğru 3'erli gruplandırılır. Daha sonra yukarıda bulunduğu gibi, birler basamağındaki rakamın dışında bulunan gruplardaki rakamların sağdan sola sırayla 3 katı, 4 katı, 1 katı alınarak bulunacak olan sayı grupları yine sırayla sağdan sola (-1) ile ve (+1) ile çarpılır. Elde edilen sonuçlar ve 1'ler basamağındaki rakam toplanır. Toplamın 13 ile bölümünden kalan $A_n ... A_3 A_2 A_1$ şeklindeki n basamaklı sayının 13 ile bölümünden kalan olarak bulunur. Eğer elde edilen toplamın 13 ile bölümünden kalan 0 ise $A_n ... A_3 A_2 A_1$ sayısı 13 ile tam bölünür. (…1431431431431431 kuralı olarak adlandırılabilir (+) (-))

14 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 7$, $K_2 < 2$); A sayısının 7 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1, aynı A sayısının 2 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 7\cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 2\cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 6 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 7 ile çarparsak;

$$6\cdot A = 42\cdot B_1 + 6\cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$7\cdot A = 14\cdot B_2 + 7\cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. İkinci eşitlikten birinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$$A = 14\cdot(B_2 - 3\cdot B_1) + 7\cdot K_2 - 6\cdot K_1$$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $8\cdot K_1$ değerini çıkarıp eklersek;

$$A = 14\cdot(B_2 - 3\cdot B_1) + 7\cdot K_2 - 6\cdot K_1 - 8\cdot K_1 + 8\cdot K_1$$ bulunur. O halde;

$$A = 14\cdot(B_2 - 3\cdot B_1 - K_1) + 7\cdot K_2 + 8\cdot K_1$$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 7 ile bölümünden kalan K_1 ve 2 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 14 ile bölümünden kalan $8\cdot K_1 + 7\cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 14 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 7 hem de 2 ile tam bölünüyorsa 14 ile de tam bölünür.

15 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 5$, $K_2 < 3$); A sayısının 5 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1, aynı A sayısının 3 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 5\cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 3\cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 6 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 5 ile çarparsak;

$$6\cdot A = 30\cdot B_1 + 6\cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$5\cdot A = 15\cdot B_2 + 5\cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. Birinci eşitlikten ikinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$$A = 15\cdot(2\cdot B_1 - B_2) + 6\cdot K_1 - 5\cdot K_2$$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $10\cdot K_2$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 15 \cdot (2 \cdot B_1 - B_2) + 6 \cdot K_1 - 5 \cdot K_2 - 10 \cdot K_2 + 10 \cdot K_2$ bulunur. O halde;

$A = 15 \cdot (2 \cdot B_1 - B_2 - K_2) + 6 \cdot K_1 + 10 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 5 ile bölümünden kalan K_1 ve 3 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 15 ile bölümünden kalan $6 \cdot K_1 + 10 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 15 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 5 hem de 3 ile tam bölünüyorsa 15 ile de tam bölünür.

16 ile Bölünebilme

Verilen bir pozitif tamsayının onluk sistemde çözümlenmesinde binler ve daha yüksek basamaklarındaki rakamların basamak değerlerinde 10000 çarpanı olmasından dolayı 16'nın tam katıdır, dolayısıyla 16 ile tam bölünür. Bu sayının 16 ile tam bölünmesi birler, onlar, yüzler ve binler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayıya bağlıdır. Yani, birler, onlar, yüzler ve binler basamağındaki rakamların oluşturduğu 4 basamaklı sayı 16'nın tam katı ise bu sayı 16 ile tam bölünür, birler, onlar, yüzler ve binler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı 16'nın tam katı değil ise bu sayı 16 ile tam bölünmez. Diğer bir ifade ile birler, onlar, yüzler ve binler basamağındaki rakamların oluşturduğu sayının 16 ile bölümünden kalan başlangıçta verilen sayının 16 ile bölümünden kalanı verir. Örneğin;

$ABCDEF$ beş basamaklı bir sayı olsun.

$$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$
$$= 16 \cdot \underbrace{(6250 \cdot A + 625 \cdot B)}_{16 \text{ ile tam bölünür}} + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$

Bu durumda $ABCDEF$ sayısının 16 ile tam bölünmesi $1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$'nin, diğer bir ifade ile $CDEF$ dört basamaklı sayısının 16'nın tam katı olup olmamasına bağlıdır. $ABCDEF$ sayısının 16 ile bölümünden kalan, $CDEF$ dört basamaklı sayısının 16 ile bölümünden kalandır.

16 ile tam bölünebilme için çıkarılabilecek diğer kural aşağıdaki gibi olabilir.

$$ABCDEF = 100000 \cdot A + 10000 \cdot B + 1000 \cdot C + 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$$
$$= 16 \cdot 6250 \cdot A + 16 \cdot 625 \cdot B + 16 \cdot 62 \cdot C + 8 \cdot C + 16 \cdot 6 \cdot D + 4 \cdot D + 10 \cdot E + F$$

şeklinde düzenlenirse;

$$ABCDEF = 16 \cdot \underbrace{(6250 \cdot A + 625 \cdot B + 62 \cdot C + 6 \cdot D)}_{16 \text{ ile tam bölünür}} + 8 \cdot C + 4 \cdot D + 10 \cdot E + F$$ yazılabilir.

Bu durumda $ABCDEF$ sayısının 16 ile tam bölünmesi $8 \cdot C + 4 \cdot D + 10 \cdot E + F$'nin 16'nın tam katı olup olmamasına bağlıdır. Yani verilen herhangi bir pozitif tam sayının binler basamağındaki rakamın 8 katı, yüzler basamağındaki rakamın 4 katı, onlar basamağındaki rakamın 10 katı ile birler basamağındaki rakamın toplamı 16'nın tam katı ise bu sayı 16 ile tam bölünür, aksi halde bölünemez. Diğer bir ifade ile $8 \cdot C + 4 \cdot D + 10 \cdot E + F$'nin 16 ile bölümünden kalan $ABCDEF$ sayısının 16 ile bölümünden kalanı verir.

18 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 2$, $K_2 < 9$); A sayısının 2 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1, aynı A sayısının 9 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$A = 2 \cdot B_1 + K_1$ ...(1)

$A = 9 \cdot B_2 + K_2$ ...(2)

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 9 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 8 ile çarparsak;

$9 \cdot A = 18 \cdot B_1 + 9 \cdot K_1$ ...(1)

$8 \cdot A = 72 \cdot B_2 + 8 \cdot K_2$ ...(2)

elde edilir. Birinci eşitlikten ikinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$A = 18 \cdot (B_1 - 4 \cdot B_2) + 9 \cdot K_1 - 8 \cdot K_2$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $10 \cdot K_2$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 18 \cdot (B_1 - 4 \cdot B_2) + 9 \cdot K_1 - 8 \cdot K_2 - 10 \cdot K_2 + 10 \cdot K_2$ bulunur. O halde;

$A = 18 \cdot (B_1 - 4 \cdot B_2 - K_2) + 9 \cdot K_1 + 10 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 2 ile bölümünden kalan K_1 ve 9 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 18 ile bölümünden kalan $9 \cdot K_1 + 10 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 18 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 2 hem de 9 ile tam bölünüyorsa 18 ile de tam bölünür.

24 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 8$, $K_2 < 3$); A sayısının 8 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1, aynı A sayısının 3 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 8 \cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 3 \cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 9 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 8 ile çarparsak;

$$9 \cdot A = 72 \cdot B_1 + 9 \cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$8 \cdot A = 24 \cdot B_2 + 8 \cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. Birinci eşitlikten ikinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$A = 24 \cdot (3 \cdot B_1 - B_2) + 9 \cdot K_1 - 8 \cdot K_2$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $16 \cdot K_2$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 24 \cdot (3 \cdot B_1 - B_2) + 9 \cdot K_1 - 8 \cdot K_2 - 16 \cdot K_2 + 16 \cdot K_2$ bulunur. O halde;

$A = 24 \cdot (3 \cdot B_1 - B_2 - K_2) + 9 \cdot K_1 + 16 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 8 ile bölümünden kalan K_1 ve 3 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 24 ile bölümünden kalan $9 \cdot K_1 + 16 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 24 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 8 hem de 3 ile tam bölünüyorsa 24 ile de tam bölünür.

55 ile Bölünebilme

A, B_1, K_1, B_2, K_2 doğal sayılar olmak üzere ($K_1 < 5$, $K_2 < 11$); A sayısının 5 ile bölümünde bölüm B_1 ve kalan K_1, aynı A sayısının 11 ile bölümünde bölüm B_2 ve kalan K_2 olsun. Bu durumda;

$$A = 5 \cdot B_1 + K_1 \quad ...(1)$$
$$A = 11 \cdot B_2 + K_2 \quad ...(2)$$

yazılabilir. Buradan, birinci eşitliğin her iki tarafını 11 ile, ikinci eşitliğin her iki tarafını da 10 ile çarparsak;

$$11 \cdot A = 55 \cdot B_1 + 11 \cdot K_1 \quad ...(1)$$
$$10 \cdot A = 110 \cdot B_2 + 10 \cdot K_2 \quad ...(2)$$

elde edilir. Birinci eşitlikten ikinci eşitliği taraf tarafa çıkarırsak;

$A = 55 \cdot (B_1 - 2 \cdot B_2) + 11 \cdot K_1 - 10 \cdot K_2$ bulunur. Buradan; ikinci tarafta $45 \cdot K_2$ değerini çıkarıp eklersek;

$A = 55 \cdot (B_1 - 2 \cdot B_2) + 11 \cdot K_1 - 10 \cdot K_2 - 45 \cdot K_2 + 45 \cdot K_2$ bulunur. O halde;

$A = 55 \cdot (B_1 - 2 \cdot B_2 - K_2) + 11 \cdot K_1 + 45 \cdot K_2$ olduğu görülür.

Bu durumda; A sayısının 5 ile bölümünden kalan K_1 ve 11 ile bölümünden kalan K_2 ise A sayısının 55 ile bölümünden kalan $11 \cdot K_1 + 45 \cdot K_2$ dir. $K_1 = 0$ ve $K_2 = 0$ olması durumunda A sayısı 55 ile tam bölünebilir. Diğer bir ifade ile A sayısı hem 5 hem de 11 ile tam bölünüyorsa 55 ile de tam bölünür.

Bu çalışmada herhangi bir tamsayının bazı pozitif tamsayılara bölümünden kalanın nasıl hesaplanabileceği, bununla ilgili uygulanan kuralların nasıl elde edildiği incelenmiştir. Bu şekilde bir tamsayının, aralarında asal iki çarpanı olan herhangi bir pozitif tamsayıya bölümünden elde edilen kalanın hesaplanabileceği düşünülmektedir. Pek çok örnek üzerinde bu kuralların uygulanabilirliği görülebilir. Ancak, burada sadece bölünebilme kurallarının nasıl elde edildiği üzerinde durulmuştur. Farklı bir çalışmada bölünebilme kurallarının etkinlikler yardımıyla öğretimi incelenebilir. Etkinlikler yardımıyla yapılacak olan öğretim uygulamalarının ilköğretim 6-8. Sınıflardaki öğrenciler için de yararlı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Altun, M. (2002). *İlköğretim ikinci kademede (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. İstanbul: Alfa Basım Yayın.

Altun, M. (2008). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için ortaöğretimde matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Delil, (2006). *Sayılar*. (Ed., Kaçar, A., Temel matematik I-II). Ankara: PegemA Yayıncılık.