Gülten, D. Ç. & Gülten, İ. (2004). Binom Açılımı Öğretimine Farklı Bir Yaklaşım, , *İlköğretim-Online, 3*(2), 60-66, [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr

Binom Açılımı Öğretimine Farklı Bir Yaklaşım

Dilek Çağırgan GÜLTEN
İst. Üniv. Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi
İlköğretim Böl. Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
dcemre@e-kolay.net

İsmail GÜLTEN
Matematik Öğretmeni
Şişli Lisesi, İstanbul
gultenis@e-kolay.net

ÖZ: Cebir öğretiminde önemli bir yeri ve pek çok uygulama alanı olan 'Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı' ilköğretim 8.sınıf matematik programının konusudur. Genellikle ders kitaplarında Pascal Üçgeni, bir tek özelliğiyle verilmekte ve bu üçgenin yardımıyla binom açılımı tanımı yapılmaktadır. Ancak, bu geleneksel yoldan sunuluşta ifade ve kavramlar çoğu zaman öğrenci için sade bir ezbermiş gibi olmaktan öteye gidememektedir. Bu çalışmada 'Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı' konusunun öğretimi, bir hikaye anlatılarak verilmiş ve öğrencilerin bu konuyu ezberci bir yaklaşımla değil, somut düşünmeyle öğrenmeleri hedeflenmiştir. Bu amaçla deneysel çalışma yapılmış ve bu konuyu hikaye ile öğrenen öğrencilerin klasik anlatımla öğrenenlere göre daha başarılı oldukları, konuyu daha iyi hatırladıkları tespit edilmiştir.
Anahtar sözcükler: Pascal Üçgeni, Binom Açılımı

A Different Approach To Teaching Binomial Expansion

ABSTRACT: Pascal Triangle and Binomial Expansion which have so many applications and an important place in teaching Algebra are the subjects of the mathematics program in the eighth grade of primary education. Generally, Pascal Triangle are given only one special feature in the textbooks and by the help of this triangle, the Binomial Expansion is defined. But, in this traditional presentation, expressions and concepts generally cannot be learned enough by the students and treated like a simple memorization. In this study, teaching of Pascal Triangle and Binomial Expansion given through telling a story with a scenario method. The purpose, students should learn this subject not with memorizing approach but with the concrete thinking.
Keywords: Pascal Triangle, Binomial Expansion

Giriş

'Pascal (Paskal) Üçgeni ve Binom Açılımı', ilköğretim 8.sınıf matematik programının 'Harfli İfadeler ve Denklemler' ünitesinin konusudur. Bu ünitenin ilk konusu olarak 'Harfli İfadeler ve Harfli İfadelerle Yapılan İşlemler' verilmektedir. Öğrencilerin, harfli ifadelerle işlem yapma sürecinde bir soyutlama içinde bulunduğu aşikardır. Harfler öğrenciye ne ifade etmektedir; acaba bu durum öğrenci için sadece soyut bir durum mudur? Harfleri kullanarak işlemi doğru yapabilmek için uğraş vermekte olan öğrenciye harfleri somutlaştırarak vermek mümkün değil midir? Öğrenci harfleri, sadece bir harf olarak değil de bir senaryonun öğeleri olarak (cins ya da özel ismin baş harfleri ya da bir olayın vb.) düşünse durum daha somut olmayacak mıdır?

Genel olarak, soyut kavramların kazanılması zordur. Matematiğin, öğrencilere zor gelmesinin sebebi belki burada yatmaktadır. Ancak matematik kavramlar, öğretim sırasında somutlaştırılarak ve somut araçlar kullanılarak bu zorluk giderilebilir; en azından azaltılabilir (Baykul, 2002, s.33).

Yapısı gereği, matematiğin günlük yaşam problemlerinin bir gereksinimi olarak var olduğu düşünülürse soyut değil, somut olarak gözönüne alınan incelemelerin daha etkili ve verimli olduğu bir gerçektir. O halde 'harfli ifadeler ve denklemler' ünitesi işlenirken, öğrencilere harfleri farklı algılamalarına olanak verecek örnekler verebilmek gerekir. 8. sınıf matematik dersi ünite planlarında 2. ünite için Kaşıkçı (Kaşıkçı, I), öğrencilerin harfli ifadelerle ilgili 'niçin, nasıl, kolay bir yol var mı?' sorularına karşılık olarak geometrik şekiller; hayvan, çiçek ve değişik figürler kullanmakla harfli ifadelerin kavratılabilmesine ilişkin 'en iyi nasıl öğreniriz?' sorusuna bir yaklaşım getirmiştir.

Ünitenin ikinci konusu, hedefi 'Binom Açılımını Kavrayabilme' (İOMP, 2002) olan 'Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı' olup, öğrencinin burada da harfli ifadelerde olduğu gibi soyutlamayla karşı karşıya kaldığı açıktır. Genellikle ders kitaplarında örneğin, Polatoğlu, Çamlı ve Çalıkoğlu (2002) yazdıkları 8.sınıf matematik kitabında Pascal üçgenini bir tek özelliğiyle vermektedir. Bu üçgenin her satırındaki sayıların $(a \pm b)$'nin tam kuvvetlerinin açılımındaki terimlerin katsayılarını vereceği ifade edilerek Binom Açılımı tanımı yapılmaktadır. Böylelikle öğrenci çoğu zaman ezbercilikle karşı karşıya kalmaktadır. Oysa ki öğrenci matematik dersini ezberci değil, eğlenceli öğrenmek istemektedir. 1996-1997 yılında yapılan bir ankette (Saka, II) öğrencilere matematik dersini nasıl öğrenmek istedikleri sorulduğunda verdikleri cevaplar şaşırtıcı değildir: Eğlenceli hale getirilmesi, bulmaca çözer gibi sıkılmadan öğretilmesi, basite indirgenmesi, öğretmenin dersi zevkli hale getirmesi, en kolay ve en anlaşılır yollardan öğrenmek istemesi. Bu cevaplar, matematik öğretiminde soyuttan somuta ilkesiyle hareket etmek gerektiğinin bir göstergesidir.

Bu çalışmada 'Pascal Üçgeni ve Binom Açılımı' konusu öğretilirken öğrenciye $(a+b)^n$ ifadesinin açılımı bir hikaye anlatılarak verilecektir. Pascal Üçgenine karşılık gelen binom katsayılarının ise hem sözkonusu hikaye ile hem de Pascal Üçgeninin bazı özellikleri verilerek kavratılması ile ilgili etkinlikler verilecektir.

Binom Açılımı ve Pascal Üçgeni'nin Öğrenciye Geleneksel Tanıtımı

$(a+b)^n$ biçiminde ifade edilen *binom açılımı* ile $a,b \in R$, $n \in N$ olmak üzere iki terimli ifadelerin pozitif tamsayı olan kuvvetlerinin açılımı bulunur. Binom açılımının çarpanlara ayırma, alt küme sayılarını bulma ve olasılık hesaplarında geniş kullanım alanları vardır ve bundan dolayı cebir öğretiminde de önemlidir(Altun, 2002, s.162).

$(a+b)^n$ ifadesinin eşitinin bulunmasında, $(a+b)$ nin kendisi ile n defa çarpılacağı aşikardır. Bu durumu *n*=2, *n*=3, *n*=4 için örnek olarak vermek ve genelleme yapmak yerinde olacaktır.

Sunuş: $(a+b)^1 = a+b$ dir. $(a+b)^2$ yi bulmak için $(a+b)$ ile $(a+b)$ çarpılır. $(a+b)^3$ 'ü bulmak için $(a+b)$ ile $(a+b)$ ile $(a+b)$ çarpılır ya da $(a+b)^2$ nin sonucuyla $(a+b)$ çarpılır. $(a+b)^4$ 'ü bulmak için $(a+b)$ kendisiyle dört kere çarpılır ya da $(a+b)^3$'ün sonucuyla $(a+b)$ çarpılır.

Yukarıda yazılanlar bir tabloda gösterilirse (III):

$(a+b)^2 =$	$(a+b)^3 =$	$(a+b)^4 =$
$a+b$ $a+b$ - a^2+ab $ab+b^2$ - $a^2+2ab+b^2$	$a^2+2ab+b^2$ $a+b$ - $a^3+2a^2b+ab^2$ $a^2b+2ab^2+b^3$ - $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $a+b$ - $a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3$ $a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4$ - $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Buradan elde edilen sonuçlar:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3 \qquad (*)$$
$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4$$
$$(a+b)^5 = 1\cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\cdot b^5$$

Öğrenciye söylenecekler: Görüldüğü gibi bu işlemler pek de zor değildir. Ancak, devam edildiğinde her gerektiğinde *n* (*n*=1,2,...,*n*) için böyle bir işlemi yapmak zahmetlidir. Eğer tüm bu işlemler yerine, bir kural olsa $(a+b)^n$ eşitliğini hesaplama işi daha kolay olacaktır. İşte bu, '*Binom Açılımı*' adı verilen kural ile olacaktır.

Amaçlananın ne olduğu bu biçimde ifade edildikten sonra, $(a+b)^n$ nin açılımındaki her bir terimin (*a*,*b*, *ab*) başındaki katsayılar ile *pascal üçgeni* arasındaki ilişkiyi ve *pascal üçgeni* hakkında bazı önemli bilgileri vermek yerinde olacaktır.

$(a+b)^n$ açılımlarında karşılaşılan katsayılar yazılırsa:

n=0 için	1					
n=1 için	**1**	1				
n=2 için	*1*	**2**	1			
n=3 için	1	*3*	**3**	1		
n=4 için	1	4	*6*	**4**	1	
n=5 için	1	5	10	*10*	**5**	1

Gerçi bu katsayıların oluşturduğu üçgen Ömer Hayyam'ın (1100) orijinal çalışmalarında yer almakta ise de, adını Fransız matematikçi Blaise Pascal 'dan (1623-1662) alan *pascal üçgeni*nin (*)'daki katsayılardan oluştuğu görülecektir. Kenarlarda '1' olmak üzere her sayının üstündeki iki sayının toplamı olarak yazılmakla oluştuğu *pascal üçgeni*, bu eşkenar formdan farklı olarak (*)'dan da görülebileceği gibi dik üçgen formunda da gösterilmektedir. Bu üçgenin bazı özellikleri verilecek olursa: İkinci sıra (koyu renkli), doğal sayılar serisi; üçüncü sıra (italik rakamlı), üçgen sayılar (1,3,6,10,15,...) dan oluşmakta; her satırdaki sayıların toplamı, 'sıfır' dan başlamak üzere '2' nin üslerini vermektedir, 2^0, 2^1,2^2,2^3,2^4,... . Her sıranın, yine 'sıfır' dan başlamak üzere kendi derecesinden bir polinomun katsayılarını vereceği ifadesiyle *pascal üçgeni*nin binom açılımıyla ilişkisi netleşecektir (Örnek: $(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3$) (Büyükkeçeci, IV).

Ancak geleneksel yoldan sunulan bu ifade ve kavramlar, çoğu zaman öğrenci için sade bir ezbermiş gibi olmaktan öteye gidememektedir. Cebir öğretiminde önemli bir yeri ve pek çok uygulama alanı olan *binom açılımı* öğretilirken, iki terimli arasında ilişki kurulduğunda öğrenci bir olaya bakış açısı kazanacak ve zihninde canlandırarak ya da verilecek örnek olayı bir oyun (ya da senaryo) gibi algılayarak soyuttan somuta düşünmeye geçebilecektir.

İlk olarak hikaye tanıtılır ve hikayenin hedefinin ne olduğu verilmekle işe başlanabilir.

Hikayenin Kurgusu: Bir at ve bir boğa birlikte yürümektedir. Yürüyüşün başlangıcında atın sırtında *n* tane çuval var, bir süre (sürenin hiçbir önemi yok) taşıdıktan sonra yorulmakta ve bunu boğayla paylaşmakta; bu paylaşım her defasında atın boğaya bir tane çuval vermesiyle gerçeklenmektedir. Bu rutin olayda, atın sırtından bir çuval azalırken, boğanın sırtında bir çuval artmaktadır. En sonunda atın sırtındaki bütün çuvallar, boğanın sırtında olmaktadır. Yolun sonuna ulaştıklarında (hedefe) toplam kaç adım atmış oldukları bulunacaktır.

Hikayenin Verilişinin Birinci Aşaması: Bu hikaye $n=1, n=2, ..., n=n$ için at ve boğanın sırtındaki çuvalların durumu gözönüne alınarak kavratılmalı. Bu aşamada öğrenciye $n=1$ den başlayarak örnekler vermek yerinde olacaktır; kavradığı anlaşılana kadar yük sayılarını artırmak olanaklıdır.

Sunuş: Her yürümeye başladıklarında at (a), çuvalların tamamını yüklenmiş olarak işe başlamakta, boğa (b) da yanında yürümeye başlamakta, ama hiç yükü olmadığı için görünmemektedir (b^0=1 olarak görünüyor). Yürüyüşün son aşamasında da atın sırtında hiç yük yok (a^0=1). Şimdi, örnek verilirse:
Atın sırtında 1 tane çuval olsun ($n=1$): *a*, bir süre yürüyor ve çok yorulup çuvalı boğaya veriyor:*b*.

Atın sırtında 2 tane çuval olsun ($n = 2$): a^2, bir süre yürüdükten sonra yoruldu ve 1 çuvalı boğaya verdi: ab, yürümeye devam ettiler ve at yorulup kalan çuvalı boğaya verdi: b^2.
Atın sırtında 3 tane çuval olsun ($n = 3$): a^3, yoruldu birisini boğaya verdi: a^2b, bir süre yürüdükten sonra at yine yorulup çuvalın 1 tanesini daha boğaya verdi: ab^2, yürüyüşün sonuna geldiklerinde at çok yoruldu ve son kalan çuvalı da boğaya verdi: b^3.

...

Böylece devam edilirse,
Atın sırtında n tane çuval olsun ($n = n$): a^n, yoruldu birisini boğaya verdi: $a^{n-1}b$, bir süre yürüdükten sonra at yine yorulup boğaya 1 çuval daha verdi: $a^{n-2}b^2$,..., yürüdükleri yol boyunca atın sırtında 1 tane çuval, boğanın sırtında ise atın verdiği çuvallardan $n = 1$ tane oldu: ab^{n-1} ve sonunda tüm yükü boğa aldı: b^n.

Bu örnek olayı verirken, atın verdiği ve boğanın aldığı yüklerin toplamının aynı sayıyı koruduğu vurgulanmalıdır: At sırtındaki n tane çuvalı boğaya vermekte, ama bu yük sayısının toplamı hiçbir zaman değişmemektedir (üsler toplamı) ve at tüm çuvalları boğaya verdiğinde boğadaki çuval sayısı yine son aşamada n yi korumaktadır.

Henüz bir toplam verilmeden ('toplam attıkları adım sayısı nedir?' sorusuna cevap vermeden) sadece at ve boğanın gözönüne alınan bu durumları, sırası takip edilerek yazılırsa:

$n = 1$ tane yük var:	a	b				
$n = 2$ tane yük var:	a^2	ab	b^2			
$n = 3$ tane yük var:	a^3	a^2b	ab^2	b^3		
$n = 4$ tane yük var:	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^3	b^4	
...						
$n = n$ tane yük var:	a^n	$a^{n-1}b$	$a^{n-2}b^2$ ...	ab^{n-1}		b^n

Bu aşamadan sonra, artık şu soruyu sormak yerinde olur: At ve boğa, atın sırtındaki bütün çuvallar (n tane, n=1,2,...,n) boğanın sırtında olup yolun sonuna geldiklerinde toplam kaç adım atmış olacaklardır? Yalnız burada, dikkati çekmek gerekir ki toplama işlemini oluşturan terimlerin sayısı kadar adım atmamakta; attıkları toplam adım sayısı, sırttaki yükle değişim sayısını vermektedir.

Hikayenin Verilişinin İkinci Aşaması: At ve boğa çuvalları değişerek yürürken adım atmaktalar. Her yük değişiminden sonra adım sayıları, atın sırtından azalan yüke ve değişimin olduğu zamana kadar atılan adıma bağlı olarak bu değişimin başına yazılmaktadır. Atın sırtındaki bütün çuvallar boğanın sırtında olunca yolun sonuna varmış olmaktadırlar. Hedefe vardıklarında toplam adım sayısı, her değişimde öne yazılan adım sayıları toplanarak bulunur.

Sunuş:
ÖRNEK 1. At ve boğa adım atarak birlikte yürümeye başlıyorlar. At, sırtına 2 çuval yük alıyor (Her başlangıç için boğanın da yanında olduğu, ancak hiç yükü olmadığı için $b^0 = 1$ olarak alındığı kabuldür). Bir süre yürüdükten sonra at yoruluyor ve sırtındaki 1 çuvalı boğaya veriyor. *Şu ana kadar acaba kaç adım attılar?* Her defasında ilk olarak atın çuvalların hepsini sırtına alması *1 adım atması* olacaktır ve bu ilk durumun ifadesi: $1.a^2$. Şimdi atın 1 çuvalı boğaya verdiği haldeki duruma bakılırsa (bu durum, sorular ve verilen cevaplardan oluşmaktadır); *atın sırtında kaç yük vardı*?:2, *kaç adım atmıştı*?: 1, 2.1=2. *At şimdiye kadar kaç defa yük değiştirdi*?: 1 ve 2:1=2 olup, bir sonraki değişimin başına yazılırsa $2ab$ bulunur. Yürümeye devam ediyorlar ve at çok yorulup kalan çuvalı da boğaya veriyor ve artık tüm çuvallar boğada. Acaba bu aşamada *kaç adım atıldı*? Önce, baştan bu son duruma gelene kadar ki durumlar dikkate alınırsa, a^2, $2ab$ bulunduğu görülür. Bu durumda toplam 2 *değişim* olmuştur. O halde son aşamadaki atılan adım sayısını bulmak için izlenecek sorular: *Atın sırtında kaç çuval kalmıştı*?:1, *bundan önceki yük değişiminde* (ab) kaç *adım atmışlardı*?: 2, 2.1=2. *At çuvalların hepsini bıraktığında kaç değişim oldu*?: 2, 2:2=1. O halde, *sondaki adım sayısı*:1 olup, b^2 olacak (Atın sırtında hiç çuval kalmadığından yazılmaz, a^0).

$$\textbf{(1)}\ A^2 \xrightarrow[1.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(2)}\ \underbrace{A^1\,B^1}_{\substack{2\times1=2\\2\div1=2}} \xrightarrow[2.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(1)}\ \underbrace{B^2}_{\substack{2\times1=2\\2\div2=1}}$$

Toplam adım sayısı yazılırsa: 1+2+1=4, $4=2^2$.

ÖRNEK 2. At ve boğa adım atarak yürümeye başlıyor. İlk olarak at sırtına 3 çuval yük alıyor: a^3. Bir süre yürüdükten sonra yoruluyor ve bir çuvalı boğaya veriyor: a^2b; bu halde *kaç adım atacaklarını* bulup önüne yazmak için sorulursa: *Atın sırtında kaç çuval vardı*?:3, *kaç adım atmıştı*?:1, 3.1=3. *At kaç defa yük değiştirdi*?:1, 3:1=3 olup, 3 a^2b bulunur. Yürümeye devam ediyorlar ve at yine yorulup çuvalın birini boğaya veriyor: ab^2, bu halde *kaç adım atacakları* bulunup yazılacak. *Atın sırtında kaç çuval vardı*?:2, *kaç adım atılmıştı*?:3, 2.3=6. Şimdiye kadar *kaç değişim oldu*?:2, 6:2=3 olup $3ab^2$ bulunur. Yine yürümeye devam ediyorlar ve yolun sonuna geldiklerinde at kalan çuvalı da boğaya yüklüyor:b^3. Acaba bu durumda *kaç adım atılacak*? Bunun için sorulursa: *Atın sırtında kaç çuval vardı*?:1, *kaç adım atılmıştı*?:3, 3.1=3. Şu ana kadar *kaç değişim oldu*?:3, 3:3=1. O halde b^3 olacaktır.

$$\textbf{(1)}\ A^3 \xrightarrow[1.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(3)}\ \underbrace{A^2\,B^1}_{\substack{1\times3=3\\3\div1=3}} \xrightarrow[2.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(3)}\ \underbrace{A^1\,B^2}_{\substack{3\times2=6\\6\div2=3}} \xrightarrow[3.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(1)}\ \underbrace{B^3}_{\substack{3\times1=3\\3\div3=1}}$$

Toplam atılan sayısı bulunursa: 1+3+3+1=8, $8=2^3$.

ÖRNEK 3. (Örnek 1 ve 2 den görüldüğü gibi her başlangıçta ve yolun sonunda at ve boğa yükün tamamını sırtına aldığında atılan adım sayısı değişmemekte, 1 olarak kalmaktadır. Bundan dolayı, bu örnekte bu değişimlerin her zaman aynı kaldığına dikkat çekilebilir ve ilk değişim incelenmeden verilebilir.) At ve boğa yürümeye başlıyorlar, at sırtına 4 çuval alıyor: a^4. Adım atarak yürürlerken at yoruluyor ve çuvalın 1 tanesini boğaya veriyor: a^3b. Bu durumda *kaç adım atacaklar*, bulmak için gerekli sorular cevaplanırsa; *atın sırtında kaç çuval vardı*?: 4, *kaç adım atılmıştı*?: 1, 4.1=4. *Çuval değişimi kaç defa oldu*?: 1, 4:1=4 olup $4a^3b$. Yola devam ediyorlar ve at yine yorulup 1 çuvalı daha boğaya veriyor: a^2b^2. Atacakları adım sayısı bulunursa: *Atın sırtında kaç çuval vardı*?: 3, *kaç adım atılmıştı*?: 4, 3.4=12. *Kaç değişim oldu*?: 2. O halde 12:2=6 olup $6a^2b^2$. Ve yürümeye 6 adım devam edince at yine yorulup 1 çuvalı boğaya veriyor: ab^3. Bu durumda attıkları adım sayısı bulunursa; *atın sırtında kaç çuval vardı*?: 2, *kaç adım atılmıştı*?: 6, 2.6=12. Buraya kadar *kaç defa yük değişimi oldu*?: 3. O halde 12:3=4 adım atacaklar: 4 ab^3. Bundan sonrakinde: b^4, *kaç çuval vardı*?: 1, *kaç adım atılmıştı*?: 4. *Değişim sayısı*: 4. O halde: 4:4=1 olup, b^4.

$$\textbf{(1)}\ A^4 \xrightarrow[1.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(4)}\ \underbrace{A^3B^1}_{\substack{1\times4=4\\4\div1=4}} \xrightarrow[2.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(6)}\ \underbrace{A^2B^2}_{\substack{3\times4=12\\12\div2=6}} \xrightarrow[3.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(4)}\ \underbrace{A^1B^3}_{\substack{2\times6=12\\12\div3=4}} \xrightarrow[4.\,Degisim]{\hspace{3em}} \textbf{(1)}\ \underbrace{B^4}_{\substack{4\times1=4\\4\div4=1}}$$

Toplam atılan adım sayısı: 1+4+6+4+1=16, $16=2^4$.

Böylece devam edildiğinde *n* tane çuvalı taşımaları sırasında da aynı yöntemin tekrarlanacağı aşikardır. Kısaca $(n-2)$.ciden sonraki adımlar (bu hal ayrıntılı incelenmeden) gözlemlenirse: At ve boğa birlikte yürümeye başlıyorlar, atın sırtında *n* çuval yük var: a^n, bu çuvallardan birisini boğaya veriyor: $a^{n-1}b$, *kaç adım atılmıştı*?: 1, *kaç çuval vardı*?: *n*, *kaç değişim oldu*?: 1, *n*:1=*n*. O halde $na^{n-1}b$. Bundan sonraki yürüyüşte, *atın sırtında kaç çuval vardı*?: *n*-1, *kaç adım atıldı*?: *n*. *Değişim kaç defa*?: 2, $\dfrac{n(n-1)}{2}$; bir sonrakinin $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ olacağı aşikardır ve devam edilirse, sondan bir önce *n* adım atacaklar: nab^{n-1} ve son olarak da 1 adım atmış olacaklar: b^n.

Toplam atılan adım sayısı : $1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}+\cdots+n+1=2^n$.

Hikayenin İşlem Basamakları:

1. İlk başladıklarında bütün çuvallar atta ve yolun sonuna vardıklarında bütün çuvallar boğada olup çuvalların tümü sadece birisindeyken 1 adım atmaktadır. Şunu söylemek mümkündür: Çuvalların hepsi sadece birisinin sırtındayken 1 adımdan fazla atamıyorlar.
2. İkinci defa yürüyüşe başlandığında, yani atın sırtındaki çuvallar 1 azaldığında ve boğa ilk defa 1 çuval aldığında atılan adım sayısı, atın sırtına ilk defada aldığı yük sayısı kadar olmaktadır.
3. Yürüyüşün sona ermesinden önce, yine atılan adım sayısı taşınacak çuval sayısı kadar olmaktadır.
4. Toplam yük değişim sayısı n+1 defa, atılan toplam adım sayısı 2^n defadır.

Yöntem:
Bu hikaye ile anlatım, İstanbul ili Firuzağa İlköğretim okulunda bir yıl ara ile 35 ve 37 kişilik iki sınıf, 37 ve 34 kişilik iki sınıf olmak üzere toplam 4 adet 8.sınıfa; ayrıca İstanbul ili Şişli Lisesinde 44 ve 46 kişilik iki 9.sınıf ve 38 kişilik bir 10.sınıfa uygulanmıştır.

İşlem ve Bulgular:
Araştırmacılar ders deneyimlerinden yola çıkarak, binom açılımının öğrenciye kolay kavratılması için bu metoda ulaşmışlardır. Sınıf ortamında uygulaması, araştırmacılardan öğretmen Gülten tarafından yapılmıştır(makalenin devamında 'öğretmen' olarak geçecektir). Öğretmen binom açılımını önce klasik yöntemle anlatmış, örnekler çözmüş ve tahtaya bir soru yazarak binom açılımını yapmalarını istemiştir. Sonra sınıfı dolaşarak teker teker kontrol etmiş ve birkaç öğrencinin doğru yaptığını tespit etmiştir (35 ve 37 kişilik iki sınıfta da durum aynı olup, doğru cevabı veren öğrenci sayısı 10'u geçmemiştir). Öğrenciler, öğretmene katsayıları, derece sayılarını hatırlayamadıklarını ve karıştırdıklarını söylemiştir. Bunun üzerine öğretmen, $(a+b)^n$ açılımında derecelerin değişimini kavratabilmek amacıyla at ve boğa hikayesini anlatmış (senaryonun verilişinin birinci aşaması), katsayıları ise Pascal üçgeni ile vermiştir. Tahtaya yeniden soru yazmış ve bu defa 35 kişilik (ve 37) sınıfın %50 sine yakını açılımdaki dereceleri doğru yazmış, fakat katsayıları başa yazarken karıştırmıştır (35 kişilik sınıftan %50 nin 6 tanesi, 37 kişilik sınıftan 8 tanesi hem katsayı hem dereceyi doğru yazmıştır). Bu aşamadan sonra öğretmen, katsayıları kavratmak amacıyla ikinci aşamadaki hikayeyi anlatmıştır. Atın, boğanın ve sırtındaki çuvalların resimlerini de tahtaya çizerek olayı dramatize etmiştir. Öğretmen, at ve boğanın arasındaki konuşmaları dramatize ederken öğrencilerin keyifle dinlediklerini, öğrencilerde merak duygusunun oluştuğunu gözlemlemiştir. Öğrenciler, bu hikayenin sunumunu sessiz ve dikkatlice dinlemişler; hikayenin anlatımı bitince öğretmene, bu anlatımı çok eğlenceli bulduklarını söylemişlerdir. Anlatım bittikten sonra öğretmen tahtaya yeniden bir soru yazmış ve bu defa sınıfın çoğunluğundan doğru cevabı almıştır(37 kişilik sınıftan 30, 34 kişilik sınıftan 26 tanesi).

Bir yıl sonra bu konu 37 kişilik sınıfa geleneksel yoldan, 34 kişilik sınıfa ise hikaye ile anlatılmıştır. Her iki sınıfa da aynı sorular sorulmuş [$(a+b)^2, (a+2b)^2, (b+f)^3, (2f+a)^2$] ve cevapları küçük kağıtlara yazılarak toplanmıştır(sınav amaçlı değil). Bu konuyu geleneksel anlatımla gören öğrencilerden %26 sının, yeni yöntemle gören öğrencilerden %78 inin sorulara doğru cevap verdikleri görülmüştür.

2001-2002 öğretim yılında Şişli Lisesinde 44 kişilik 9.sınıf öğrencilerine çarpanlara ayırma konusu anlatılırken binom açılımı ile ilgili örnekler sorulduğunda öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun konuyu unuttuğu, iki terimli toplamı ve farkını yaparken derece ve katsayıları karıştırdıkları görülmüştür. Bu öğrenciler farklı ilköğretim okullarından gelmiş olup, binom açılımı konusunu geleneksel yöntemle öğrenmiş öğrencilerdir. Bu durum dersin öğretmeni ile birlikte araştırmacılar tarafından değerlendirilmiştir. Dersin öğretmeni[*] bu araştırmada söz edilen hikayenin sunumu ile ilgili olarak bilgilendirilmiştir. Bundan sonraki ilk derste bu hikayeyi sunarak binom açılımı konusunu öğrenciye hatırlatmış ve sorulan soruları sınıfın tamamına yakını doğru cevaplamıştır. Aynı yöntem araştırmacı öğretmen tarafından 46 kişilik 9.sınıfta tekrarlandığında başarının %85 civarında olduğu

[*] Uygulamada yardımcı olan matematik öğretmeni Altan Aygün'e teşekkür ederiz.

görülmüştür. Öğretmenler verileri toplarken, tahtaya yazdıkları soruların cevaplarını öğrencilerin küçük bir kağıda yazarak vermelerini istemiştir(sorulan sorulara örn: $(2a+3b)^2$, $(a+3b)^2$, $(a+b)^3$, $(2a+b)^3$, $(a+b)^4$). 2002-2003 öğretim yılında 10.sınıflarda binom açılımı ile ilgili örnekler sorulduğunda, sınıfta bulunan bu yöntem ile öğrenmiş öğrencilerin binom açılımını hemen hatırladıkları görülmüş ve sorulara yaklaşımlarının daha doğru olduğu tespit edilmiştir.

Sonuç ve Öneriler:

Bu çalışmada binom açılımını hikaye ile öğrenen öğrencilerin, klasik anlatımla öğrenenlere göre daha başarılı oldukları, konuyu daha iyi hatırladıkları gözlenmiştir. Hikaye ile anlatım sırasında öğretmenin, oyunlaştırarak ve tahtaya çizdiği at ve boğa arasındaki konuşmaları tiyatro sahnesinde gibi temsil etmesi ile öğrenciler dersi eğlenceli bulmuşlardır. Sunum sırasında öğrencilerde merak duygusu gelişmiş ve öğrenmeye ilişkin motivasyonun güçlü bir şekilde sağlandığı görülmüştür. Öğrenciler, karşılaştıkları iki terimli ifadelerin sadece a ve b olmadığı durumları da gözönüne alarak diğer harflerle ilişkili olarak yeni hikayeler geliştirebileceklerini söylemişlerdir; böylelikle yaratıcı sonuçlar elde ettikleri görülmüştür. Bu yapılan incelemeler ışığında sonuç ve öneriler:

1. Klasik bir binom açılımının sunuşu değil de bir hikaye ile olayı kavrayan öğrenci bunu unutmayacaktır.
2. At, boğa ve sırtlarındaki çuvallar, resimle çizildiğinde ya da figürleri kullanıldığında ders eğlenceli hale gelecektir.
3. Binom açılımı denildiğinde herhangi iki terimlinin harf toplamı değil, bir olayın varılacak sonuçları olarak gözönüne alınacaktır.
4. Bu çalışmada ilköğretime yabancı olmaması nedeniyle *a* ve *b*, at ve boğa olarak gözönüne alınmış olup farklı örnek olaylar verilebilir ve öğrenciden oluşturması istenebilir.
5. Bu hikaye gerçek olmamakla birlikte, uygulayıcı gerçek koşullara uyarlayabilir. Aşağıda gerçek durumlara iki örnek verilmiştir:
a) Ticaret yapan ve un çuvalı taşıyan bir tüccarın at ve boğası olsun. Bu çuvalları atla boğa kendileri değiştiremeyeceği için tüccar değiştirecektir.
b) Öğretmen öğrenciyi daha iyi motive etmek için öğrencinin atla boğa sahibi olduğunu söyler, bu çuval değişimini öğrenci kendisi uygular ve daha çok motive olmuş olur.
6. Binom açılımı sadece *a* ve *b* gibi harflerden ibaret olmayıp, her öğretilmek istenen iki terimli toplamının *n*.ci mertebeden toplamı ifadesinde kurguları çeşitlemek yerinde olacaktır.
7. Pascal üçgeninin bazı özelliklerinin verilmesi ile öğrencinin motivasyonu üst düzeyde tutulmuş olacaktır.
8. Bu çalışma, sadece ilköğretim aşamasında ele alınmış olup olasılık ile ilgili (kombinasyon) durumlara değinilmemiştir. Orta öğretimde, henüz binom açılımını kavrayamamış öğrenciler için farklı bir kurguyla verilebilir.

Kaynakça:

Altun, M. (2002). *Eğitim Fakülteleri ve İlköğretim Öğretmenleri İçin Matematik Öğretimi*. Bursa: Alfa Kitabevi.

Altun, M. (2002). *İlköğretim İkinci Kademede (6,7 ve 8. sınıflarda) Matematik Öğretimi*. Bursa: Alfa Kitabevi.

Baykul, Y. (2002). *İlköğretimde Matematik Öğretimi 1-5. Sınıflar İçin.* Ankara: Pegem A Yayınları.

İlköğretim Okulu Matematik Programı (2002). *6-7-8. Sınıf*. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Polatoğlu, M.; Çamlı A.& Çalıkoğlu İ. (2002). *İlköğretim Matematik Ders Kitabı 8*. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

I. Kaşıkçı M., *Öğretmen Dünyası, 8. Sınıf Matematik Dersi Ünite Planları*, http://mat.dunyasi.tripod.com/8.2.htm web adresinden alındığı tarih: 18.02.2003.

II. Saka M., *Öğrencilerim Matematiği Nasıl Öğrenmek İsterler*, http://egitim.dagarcigi.tripod. com/tartisma/tartisma_ogrencilerim_matematik_dersini_01.htm, web adresinden alındığı tarih: 10.03.2003.

III. *Math Forum: Pascal's Triangle*, http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/ pascal_binomial.html, web adresinden alındığı tarih: 09.02.2003.

IV. Büyükkeçeci, S., *PaRaDoksLaR, Matematiğin Sırları: Pascal Üçgeni*, http://www.paradokslar. com/ matematiks/ matematigin_sirlari.htm, web adresinden alındığı tarih: 15.04.2003.