

SAYI DOĞRUSUNUN ÖĞRETİMİNDE YENİ BİR YAKLAŞIM

Yard. Doç. Dr. Murat Altun, maltun@uludag.edu.tr
Uludağ Üniversitesi

Abstract: The teaching of number-line concept begins from the first year on in the programs of mathematics courses. Number line is not only a basic concept in mathematics, but also an important medium in progressing mental computation and improving problem solving skills. In this study, a new approach to teaching number line called "apple-stair" is set forth. This approach is suitable for Realistic Mathematics Education. At the end of this study, it was found that "apple-stair" is a good model for teaching number line.

Öz: Sayı doğrusunun öğretimine, matematik programlarında, öğretimin ilk yıllardan itibaren yer verilir. Sayı doğrusu, matematiğin temel kavramlarından biri olmanın yanı sıra, sayıların sıralanması, zihinden hesaplama ve problem çözme becerilerinin geliştirilmesi bakımından da önemli bir araç olma özelliği taşımaktadır. Bu çalışmada sayı doğrusunun öğretimi ile ilgili olarak Gerçekçi Matematik Eğitimi'ne (RME) uygun bir yaklaşım önerilmiş ve önerilen modelle ilgili bir deneysel çalışma yapılmıştır. Çalışma sonunda elma merdiveni modeli" sayı doğrusunun kazandırılması için iyi bir model olarak görünmüştür.

Giriş

Sayı doğrusu sayıların sıralanması, büyüklük küçüklük ilişkileri, zihinden hesap yapmayı kolaylaştıracak bir model ve problemlerin şemalaştırılmasına uygun bir araç olması nedeniyle matematik programlarında yer alır ve öğretimine ilköğretimin ilk yıllarındayken başlanır. İlerleyen yıllar içinde, tamsayıların, rasyonel sayıların, reel sayıların öğretiminde zorunlu olarak üzerinde çalışılan ve faydalanılan bir kavramdır. Ayrıca topolojik olarak bir boyutlu uzaydır ve bundan ötürü önemlidir. Bu çalışmada sayı doğrusu, ilköğretimin ilk yıllarındaki işlevleri bakımından ele alınmakta ve nasıl öğretilmesi gerektiği üzerinde durulmaktadır.

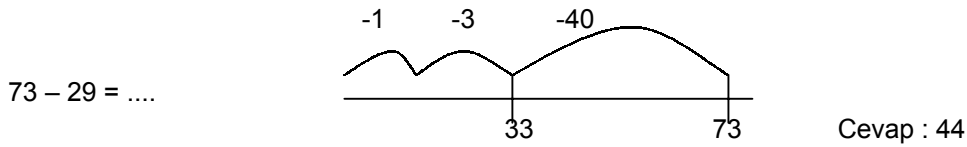
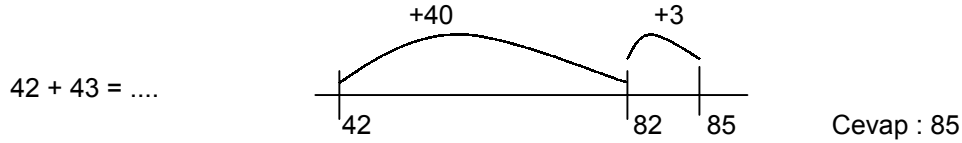
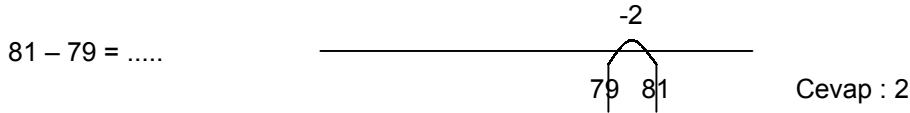
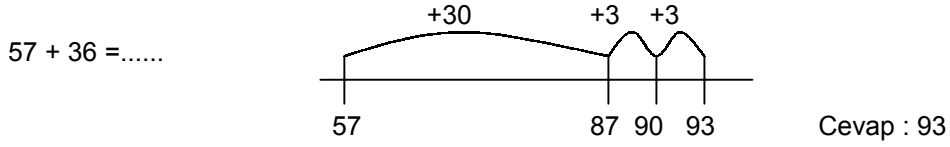
Sayı doğrusunun matematik öğretimindeki yeri ve önemi üstüne Hollanda'da birkaç önemli çalışma yapılmıştır. Treffers (1991) küçük sınıflarda öğretici bir model olarak boş sayı doğrusunu önermiştir. Bu model sadece 20'nin altındaki küçük sayılarla işlem yapmak için değil, aynı zamanda 100'e kadar büyük sayılarla zihinden işlem yapmak için kullanılır. Zihinsel aritmetik, yazılı işleme yardımcı bir unsur olmanın ötesinde çocukların informal stratejilerini kullanma, bunları okula taşıma, esnek hesaplama ve problem çözme stratejilerinin daha ileri boyutlarda geliştirilmesi için bir dayanaktır. Bundan ötürü Hollanda'da basamak kavramına dayalı sütun aritmetiğine 3üncü sınıfa kadar başlanmamaktadır.

100'e kadar toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılmasında, sayı doğrusu ve daha sonra boş sayı doğrusu oklar ve sıçramalar suretiyle sayıların görüntülenmesine imkan vermesi bakımından tercih edilen bir araçtır. Bu yönüyle yüzlük sayı karesine göre daha üstündür. Klein ve arkadaşları (1998), ikinci sınıf öğrencilerinin işlem yapmada boş sayı doğrusunu kullanmalarına ilişkin yaptıkları deneysel çalışmalarda sayı doğrusunun işlem öğretiminde kullanılan şekillerini geniş biçimde çalışmışlardır. Bu çalışmada sayı doğrusunu işlem yapmada kullanım biçimi ile ilgili birkaç örnek aşağıda verilmektedir.

Bu örneklerde gözlenebildiği gibi çocuklar işlemleri yapmada sayı doğrusunu kullandıkları takdirde oldukça serbest davranabilmekte ve kendi stratejilerini kullanabilmektedirler. Zaman içinde

çocukların bu hesapları boş sayı doğrusunun kullanılmadan veya daha pratik kullanarak, örneğin $42 + 43 = 85$ işlemini $40 + 40 = 80$, $2 + 3 = 5$ ve $80 + 5 = 85$ şeklinde yaptıkları gözlenmiştir.

Türkiye’de yürürlükte bulunan İlköğretim Matematik Programı’nın (İMP) birinci sınıfta ilgili olan kısmında “sayı doğrusunu kavrayabilme” diye bir hedef ve bu hedefin açılımında davranış ifadeleri olarak “D1: Sayı doğrusu üzerine verilen doğal sayıları okuma, D2: Sayı doğrusu üzerinde boş bırakılan yerlere uygun doğal sayıları yazma, D3: Bir sayı doğrusu yaparak, belirtilen sayıları bu sayı doğrusu üzerinde yerleştirme” ifadeleri yer almaktadır (İMP s:44). İMP’nin yine birinci sınıfta toplama, çıkarma, çarpma işlemleriyle ilgili hedef ve davranışlarının arasında, “işlemi sayı doğrusunda gösterme, işlemi sayı doğrusundan yararlanarak çözme” şeklinde davranış ifadelerine yer verilmektedir (İMP s: 51, 52, 57, 64). Programın, öğrenme ve öğretme etkinlikleri kısmında sayı doğrusuna yer verilmediğinden bu kavramın verilmesi hususunda bir fikir edinme şansı bulunamamıştır.



Matematik soyutlama bilimidir ve matematiğin temel elemanlarından olan sayılarda soyut kavramlardır, dolayısıyla sayı doğrusu da soyuttur. Soyut bir kavramın birinci sınıfta öğretimi söz konusu olunca, öğretime bir özen gösterilmesi gerektiği ortaya çıkmaktadır. “Matematik dersi öğretmeni, birinci sınıf çocuğunun 7 olan yaşını dikkate alarak, kavramın öğretimi ertelemeli mi? Program bütünlüğü içinde ertelenemeyecek ise, öğretimi nasıl yapılmalı?” gibi soruların açıklığa kavuşturulması gerekmektedir.

Türkiye’de ilköğretim matematik ders kitaplarında sayı doğrusunun öğretimi doğrudan, şekli çizilerek tanıtılmakta, bazen bahçe çiti v.s. gibi modeller referans alınmaktadır.

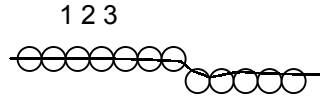
RME’nin kurucusu Freudenthal’a göre tüm matematik kavramları insanın gerçek hayatı matematikleştirmesi suretiyle ortaya çıkmıştır (Gravemeijer, 1990). Öyleyse sayı doğrusunun öğretimi de gerçek bir durumun matematikleştirilmesi suretiyle olabilir. Böyle yapılmadan “bunun adı sayı doğrusu” gibi tutumla öğretim yapıldığında, öğretmenin her dediğinin doğru olduğuna inandıkları için, muhtemelen öğrencilerin bir itirazları veya memnuniyetsizlikleri olmayacaktır. Matematik öğretiminde bu tür bir tavır süreklilik gösterirse, bir süre sonra matematik, içinde bir çok kabul bilgisi de bulunan bir kurallar topluluğu, karmakarışık bir ders halini alacaktır. Bu tutum, zaman içinde, başta fark

edilemeyen fakat öğretmenin eliyle gelişen başaramama duygusunu ortaya çıkarmakta, bu da matematik kaygısına yol açmaktadır (Skemp1986).

Sayı doğrusunun, öğrenciler tarafından inşasının, onun etkili kullanımını kolaylaştıracağı açıktır. Sayı doğrusunun inşası ile ilgili modellerden biri sayma ipidir.

Sayma İpi

Treffers (1991), sayı doğrusunun inşasında bir sayma ipinin (üzerine boncukların dizili olduğu ip) kullanılabileceğini önermiştir. Bu ip sayma sayıları doğrusunun inşası için uygun bir modeldir, ancak bu modelde sıfırın nereye eşleneceği sorun yaratmaktadır. İlk boncuk sıfır olarak kabul edilirse sıfırın boştan farklı bir kümeye eşlenmesi söz konusu olmaktadır ki bu yanlıştır. Boncuk olamayan konuma sıfır denecek olursa “Bu konum bire (1) ne kadar uzaktır ve bu uzaklığın iki katı kadar geride olan noktadan farkı nedir?” soruları akla gelmektedir.

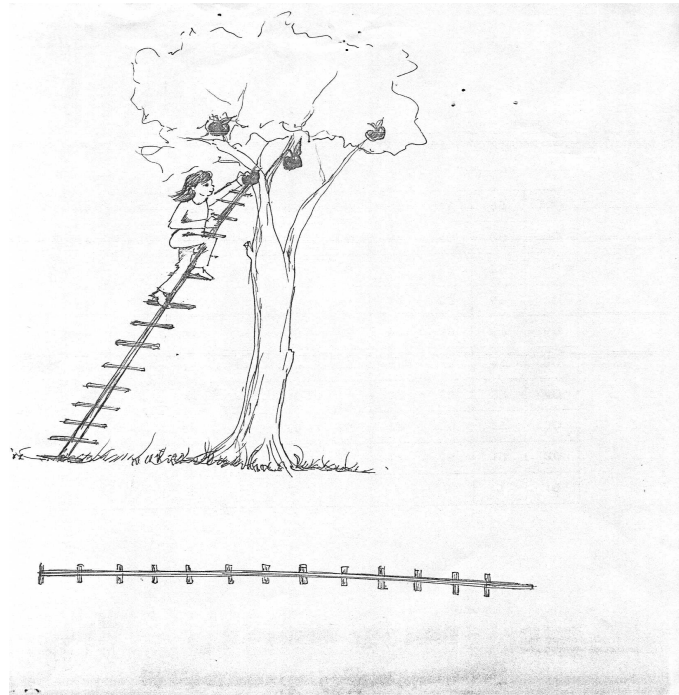


Şekil 1: Sayma ipi

Ayrıca sayma ipi, sayıları bir aralığa eşlemek yerine bir noktaya eşlemektedir. Oysaki sayı doğrusunun problem çözme veya hesaplama yapmada bir araç olarak kullanılması halinde sayılar aralıklara örneğin bir insanın adımlarına, eşlenmektedirler. Sayma ipinde boncukların birbirlerine dokunur konumda duruyor olmaları aralık fikrini ortadan kaldırmaktadır. Bu konumuyla sayma ipi iyi bir sayma aracıdır fakat hesaplama aracı değildir.

Bir Model Olarak Elma Merdiveni

Bu çalışmada sayı doğrusunun inşası için önerilen modelin adı “elma merdiveni” modelidir. Bu modelin önerilmesinde, RME'nin matematikleştirme için önerdiği üç temel ilkeye (1. Yönlendirilmiş keşfetme ve matematikleştirmeyi geliştirme, 2. Çevre problemlerinin uyarıcı olması ve kavramın, sürecin yeniden keşfi ile kazanılması, 3. İnfomal matematik bilgi ile formal matematik bilgi arasında köprü rolü üstlenerek kendi kendine gelişen modellere yer verme) dikkat edilmiştir (Gravemeijer, 1994).



Şekil 2: Elma merdiveni

Elma merdiveni ana taşıyıcı olarak dayanıklı bir ağaca eşit aralıklarla delikler açmak ve bu deliklerden basamak görevi yapacak çubukların geçirilmesi suretiyle inşa edilen bir merdivendir. Bir meyve ağacına çıkmak için çift taşıyıcılı merdivenlere göre daha kullanışlıdır. Üzerinde adımlamak suretiyle ileri geri hareket söz konusudur. Çocukların üzerinde hareket etmekten, -Skemp'e (1986) göre onların fiziksel gelişmelerine katkı vereceği için- hoşlandıkları bir araçtır. Onların bu aracı kullanmaları için illa da faydacıl bir durum gerekmez.

İMP'ye uygun olarak birinci sınıfta sayı doğrusunun öğretiminde kullanılmak üzere seçilen elma merdiveni modelinin uygulandığı aşağıda tanıtılmıştır.

Yöntem

Sayı doğrusunun öğretimi için, ders kitaplarında herhangi bir öneri bulunmadığından elma merdivenini esas alan bir çalışma planlanmış ve Bursa-Samanlı İlköğretim okulunun 1inci sınıfında uygulanmıştır. Çalışma öncesinde aynı zamanda ilköğretim yüksek lisans öğrencisi olan sınıf öğretmeni ile işbirliğine gidilmiş; öğretmen, deneysel çalışmayı yürütebilmesi için yetiştirilmiştir.

"Sayı doğrusunu kavrayabilme" şeklinde İMP deki amaca uygun olarak hazırlanan ders planı çerçevesinde, öğrencilere ilk derste üç aşamalı bir çalışma yaptırılmıştır. Bunlar;

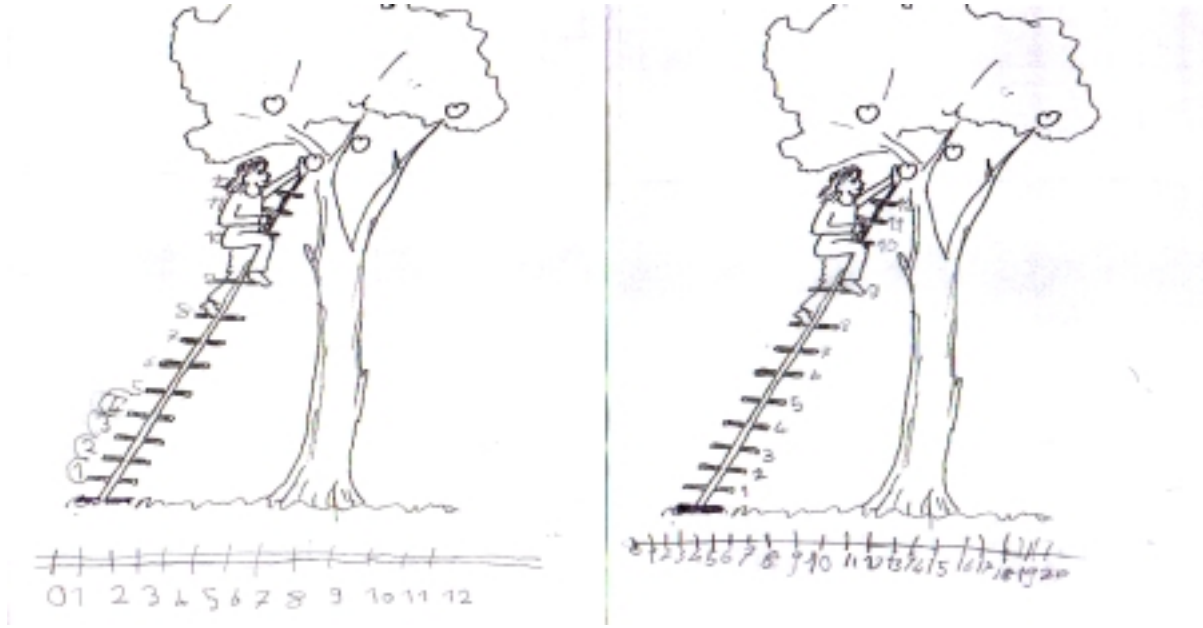
- a) Merdivenin tanıtılması
- b) Basamakların numaralandırılması ve 0'ın yeri
- c) Sağdan uzayabileceğinin sezdirilmesidir.

Bu aşamalara uygun olarak önce şekil 2'dekine benzer merdivenin daha önce hazırlanmış maketi sınıfa getirilmiş ve öğrencilere gösterilmiş, bu aracı tanıyıp tanımadıkları sorulmuştur. Öğrencilerin % 80 ine yakın kısmı, onun bir merdiven olduğunu ve nerelerde kullanıldığını açıklamış, bir kısım öğrenci TV antenine benzetmiş, diğer kısım fikir beyan etmemiştir. "Meyve toplama" eylemi gündemde tutularak merdivenin nasıl kullanıldığı anlatılmış, plastik bir bebek maketi kullanılarak merdivene tırmanış canlandırılmıştır. Maket bebeğin bulunduğu değişik konumlar için "Hangi (kaçıncı) basamakta?" sorusu sorulmuş, tüm öğrenciler bu soruyu doğru olarak yanıtlayabilmişlerdir. Bu açıklamalardan sonra öğrencilere şekil 2'nin fotokopileri dağıtılmış ve şekil 2'deki merdivenin basamaklarına kaçınıcı olduklarını gösteren sayıların yazılması istenmiştir. Öğrenciler 1 den itibaren uygun sayıları yazmışlardır, ancak birkaç öğrencinin merdiveni yukarıdan aşağıya numaraladığı görülmüştür. Bunun üzerine "merdivene tırmanma" ve "ilk adım" hatırlatılarak düzeltmeleri sağlanmıştır.

Bu ilk derste yapılan ikinci çalışma, meyve toplama işi bitince, numaralanmış bulunan bu merdivenin ağaçtan indirilip yere yatırıldığını gösteren şekli çizilerek, yatay modelde baştaki basamağa kaç yazılacağı sorulmuştur. Öğrencilerin buraya 0 (sıfır) demekte zorlanmadıkları gözlenmiştir. Şekil 3'de iki öğrencinin yatay merdiveni numaralayış şekli görülmektedir.

Bu kısımdaki çalışmaları pekiştirmek üzere, öğrencilere bu merdivene 2 şer 2 şer adım atarak çıkıp çıkamayacakları sorulmuştur. Çıkabileceklerini bildirmeleri üzerine ikişer-ikişer çıkan bir çocuğun ayak basacağı basamakların işaretlenmesi istenmiş, öğrenciler kendi çizdikleri merdivenlerde bunları gösterebilmişlerdir. Az sayıda hatalı numaralama yapan çocuklar arkadaşlarının müdahalesiyle doğru numaralamayı başarmışlardır.

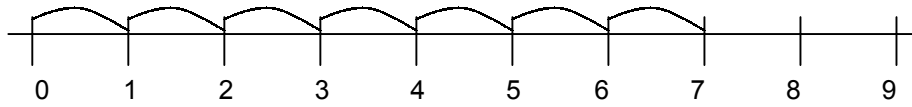
Bu dersteki çalışmanın son aşamasında konuşmalar "daha yüksekte dallanmış ağaçların meyvelerinin nasıl toplanacağı" üstüne olmuştur. Bu soruna çözüm olarak "daha uzun merdiven" cevabı alınca, 12 basamaklı olan önceki merdivenin yatık duran şeklinin bu iş için uygun hale getirilmesi istenmiştir. Öğrencilerin % 80 i merdiveni sağ taraftan uzatarak doğru cevabı elde ettiler. Birkaç öğrencinin şekli doğru fakat sağ ucu yukarıya kıvrılarak tamamladığı görülmüştür.



Şekil 3: Merdivenin numaralanması

Tamamlama çalışmalarının arkasından dağlara çıkmak için bile merdiven yapılabileceği hayal edilerek merdivenin sağdan istenildiği kadar uzatılabileceği fikri sınıfta paylaşıldı. Alıştırma olarak yatay duran merdivenlerde bazı basamaklar numarasız bırakılmış ve öğrencilerin doldurmaları istenmiştir. Öğrenciler numarasız kısımları doldurmada hata yapmadılar.

Sayı doğrusunu kavrayabilme amaçlı ikinci derste merdivenden sayı doğrusu elde etme amacıyla çalışmalar yapıldı. Dersin ilk aşamasında öğrencilerden yatık duran sayı merdivenini çizmeleri istendi. Bu çalışmada öğrencilerin çoğu 10 dan çok basamaklı merdiven çizdi. Bazıları fazla olduğunu düşünerek bir kısım basamakları sildiler. En çok 20 basamaklı merdiven çizildi. Bu merdivende "8. basamağa kadar çıkan birinin çıktığı basamakları gösterelim mi?" sorusuna öğrenciler bağlamak suretiyle şekil 4 teki gibi gösterdiler. Bu çalışmayı pekiştirmek için 0'ı işaretlenmiş boş sayı doğrusunda (merdiveninde) ikişer-ikişer sıçrayarak yol alan kurbağanın hareketini göstermeleri istendi. Öğrenciler bunda da oldukça başarılıydılar ve kurbağanın değdiği ve değmediği sayıları doğru olarak işaretlediler.



Şekil 4: Sayı doğrusunda hareketin gösterimi

Bu derste üçüncü çalışmada;

- * İşlem sonuçlarının sayı doğrusunda gösterilmesi istendi.
- * Öğrencilere bir kanguru resmi gösterilip, üzerinde konuşuldu. Sıçrayarak hareket ettiğini bilmeyen yoktu. Onlara kangurunun ağaç kovuklarında yaşadığı ve zıplayarak yol aldığı açıklandı. Temsili olarak çizilen bir ağaç kovuğundan çıkan kangurunun aldığı yolu sayarak bulmaları istendi. Öğrenciler öğretmenin verdiği fotokopiyi doldurarak kangurunun iki sıçrayışta yuvadan ne kadar uzaklaşmış olduğunu gösterdiler.

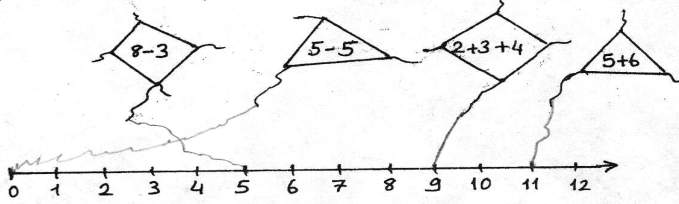
Üç hafta sonra öğrencilere Şekil 5'te bir öğrenci tarafından doldurulmuş örneği görülen ve dört soru içeren kağıt dağıtıldı. Bu kağıttaki sorular aşağıda verilmiştir.

1. İşlemleri yap , uçurtmayı yerine bağla.
2. En uzun sayı doğrusunu çiz.
3. Ece'nin yaşı 3 yıl önce 5 idi. 2 yıl sonra kaç olur? Sayı doğrusundan yararlanarak bul.
4. Ana kanguru 3'er 3'er , yavru kanguru 2'şer 2'şer zıplıyor. Yuvadan birlikte ayrılıyorlar. Her zıplayışta yuvadan ne kadar uzakta olurlar?

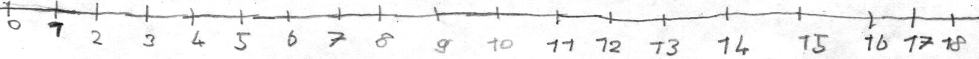
Çocukların yazıp çizebilmeleri için soruların altında boşluk bırakıldı. Ayrıca sorular yüksek sesle kendilerine okundu. Alıştırma niteliğindeki 1. soruda 28 öğrencinin tamamına yakını (21 öğrenci) dört işlemden en az üçünü doğru yaptılar ve uçurtmaları doğru yerlerine bağladılar. Diğer öğrencilerden sadece 2'si işlem sonuçlarıyla sayı doğrusunu ilişkilendiremedi.

Adı Soyadı: KASIM UZUN

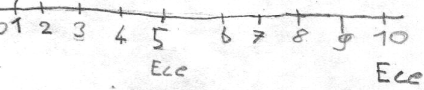
① İşlemleri yap. Uçurtmayı uygun yere bağla.



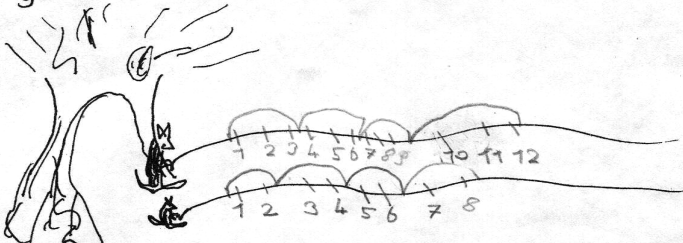
② En uzun sayı doğrusunu çiz.



③ Ece'nin yaşı 3 yıl önce 5 idi. İki yıl sonra kaç olur. Sayı doğrusundan yararlanarak çözü.



④ Ana kanguru 3'er 3'er , yavru kanguru 2'şer 2'şer zıplıyor. Yuvadan birlikte çıkıyorlar. 4'er zıplayışta yuvadan ne kadar uzaklaşırlar?



Şekil 5: Sayı doğrusu ile ilgili alıştırmalar

İkinci soruya cevap olarak öğrencilerin tamamı sayı doğrusunu temsil edebilecek bir şekil çizdi ve bunlardan 16 tanesi, çizdiği sayı doğrusunu 0'dan başlayarak kağıt boyunca numaraladı. 7 öğrenci 1'den başlayarak numaraladı, 5 öğrenci sayı doğrusunu bölümlemesine rağmen numaralamadan bıraktı.

Ece'nin bugünkü yaşı ile ilgili olarak 13 öğrencinin sayı doğrusunda 10 olan doğru cevaba ulaştıkları gözlemlendi. Kalan 15 çocuktan 10 tanesi sayı doğrusu üzerinde çalıştı fakat doğru sonuca ulaşamadı, diğer 5 tanesi sayı doğrusu çizmeden aritmetik işlemlerle yapmaya çalıştı fakat başarısız oldu.

Üçüncü ve sonuncu soru olan kanguru ve yavrusunun hareketleri ile ilgili soruya 13 öğrenci problemdeki hareketleri modelleyen çizim yaptılar, ancak doğru sonuca 4 kişi ulaşabildi.

Sonuç

Bu çalışmada öğrencilerin elma merdiveninden sayı doğrusu inşa edebildikleri gözlemlendi. Çalışmalarında informal bilgi ve becerilerini rahatlıkla kullanabildiler. Bazı öğrenciler bu merdiveni daha önce görmemişlerdi, ancak onu tasarımları zor olmadı. Onlar da en az görenler kadar başarılıydılar.

Sayı doğrusunun inşasında “elma merdiveni” iyi bir model olarak gözükmektedir. Ders kitaplarında yer alan modellere ve sayma ipine göre (0) sıfırın yerinin doğal olarak oluşması ve sayılara basamakların yanı sıra, işlem yaparken basamak aralıklarının eşlenmesi bu modelin kalitesini yükseltmektedir.

Merdivenin tanınmıyor olmasına rağmen olabirliğine kolay kanaat getirilmesi, gerektiğinde maketinin veya bir örneğinin yapılabilmesi ve kullanımının kolayca anlaşılması, öğretimde kullanım kolaylığı sağlamaktadır. Kaldı ki çocuklar merdiven kavramına uzak değildi ve hatta çoğu yaşadığı en az bir merdiven kazası olayı anlatmıştı.

Elma merdiveninin sayı doğrusunun tüm özelliklerini (sağdan sonsuz) kazanması da yaşanan hayat ve kazanılmış bulunan bilgiler bağlamında kolay oldu ve merdiven sayı doğrusu kavramını oluşturmada bir köprü görevini üstlendi.

Sayı doğrusunun zihinden işlem yapma, işlem becerilerini geliştirme ve problem çözmede bir model olarak kullanılmasının, bu yazıda sözü edilen yöntemle mi yoksa diğer yöntemlerle mi kazanılması halinde daha etkili olduğu ayrı bir tartışma konusudur. Bu tür tartışmalara açıklık getirecek araştırmaların yapılması beklenmektedir.

Kaynakça

- Gravemeijer, K. & Streefland, L.(1990). *Developing Realistic Mathematics Education*, Freudenthal Institut, Utrecht, The Netherlands.
- Hauvel-Panzuihen, M. (1996). *Assesment and Realistic Mathematics Education*, Freudenthal Institut, Utrecht, The Netherlands.
- Klein, A S. & Beishuizen, M. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades:Realistic versus Gradual Program Design, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29.
- Skemp, R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books LTD. 27 Wrights Lane London W8 5 TZ.
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education” In L. Streefland (Ed.) *Realistic Mathematics Education In Primary School*, pp.21-56, Utrecht, THA Netherlands.