Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019 12(3), 1454-1467
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019 12(3), 1454-1467
DOI: 10.18185/erzifbed.559444
Research Article

# Minkowski 3-Uzayında Timelike Normalli Eğrilerin N-Bishop Çatısına göre Slant Helisleri

Hatice KUŞAK SAMANCI[1*], Ayhan YILDIZ[1]

[1]Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bitlis\TÜRKİYE

Geliş / Received: 30.04.2019, Kabul / Accepted: 15.12.2019

**Öz**

Bir eğrinin asli normal vektör alanı sabit doğrultuyla sabit açı yapıyorsa bu eğri slant helis olarak tanımlanır. Bu çalışmada timelike normalli bir eğrinin N-Bishop çatısına göre slant helis tanımı verilerek bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Minkowski 3-uzay, slant helis, N-Bishop çatı.

**The Slant Helices of The Timelike Normal Curves in Minkowski 3-Space According to N-Bishop Frame**

**Abstract**

If the normal vector field of a curve makes a constant angle with constant direction, this curve is defined as a slant helix. In this study, some characterizations were obtained by giving the definition of slant helix according to the N-Bishop frame of a curve with timelike normal.

**Keywords:** Minkowski 3 space, slant helice, N-Bishop frame.

## 1. Giriş

Diferansiyel geometrinin çok yaygın bir biçimde kullanılan özel eğrilerinden birisi helislerdir. Helisler, farklı bilim dallarında çeşitli kullanımlara ve uygulamalara sahiptir. Helis yapısı için DNA çifti ve kalojen üçlü helisi, karbon nano tüpleri, yangın merdivenleri gibi birçok örnekler verilebilir. Helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım 1806 yılında Michel Ange Lancret tarafından yapılmış ve 1845 yılında Barre Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Helisin tanımına benzeyen, yeni bir helis türü olan slant helis; eğrinin asli normal vektör alanı sabit doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bu tanım ise 2004 yılında Izumiya ve Takeuchi tarafından ilk defa yapılmıştır (Izumiya ve Takeuchi 2004). Eğrinin alternatif hareketli çatısı $\left\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\right\}$ olup bu çatı 1995 yılında Scofield tarafından oluşturulmuştur (Scofield 1995). Minkowski uzayında spacelike eğrisinin Bishop çatısına göre slant helislerinin karakterizasyonları 2013 yılında Bükcü ve Karacan tarafından çalışılmıştır (Bükcü ve Karacan 2013). 2016 yılında Uzunoğlu ve arkadaşları eğrinin $\left\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\right\}$ alternatif hareketli çatısına farklı bir yaklaşım getirmiş olup C-slant helisi tanımlamışlardır (Uzunoğlu vd . 2016). 2017 yılında Keskin ve Yaylı ise bir uzay eğrisinin küresel göstergelerini yeni bir alternatif çatı olarak tanımladıkları N-Bishop çatısına göre incelemişlerdir (Keskin ve Yaylı 2017.). Bu

Sorumlu Yazar: hkusak@beu.edu.tr

çalışmada timelike normalli eğrilerin N-Bishop çatısına göre slant helislerinin bazı karakterizasyonları Minkowski 3-uzayında incelenmiştir.

## 2. Materyal ve Metot

Öklid 3-uzayında birim hızlı regüler bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özellikleri Serret-Frenet çatı formülleri ile incelenir. Serret-Frenet çatısının türev formülleri $\vec{T}' = \kappa\vec{N}$ , $\vec{N}' = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$ , $\vec{B}' = -\tau\vec{N}$ ile elde edilir. Bishop, 1975'te Bishop çatısı adı verilen yeni bir alternatif çatı oluşturmuştur. Bishop çatısının teğet vektörü Serret-Frenet çatısının $\vec{T}$ birim teğet vektörüne paralel olup $k_1$ ve $k_2$ Bishop çatısının eğrilikleri olmak üzere Bishop çatısının türev denklemleri, $\vec{T}' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ , $\vec{N}_1' = -k_1\vec{T}$ , $\vec{N}_2' = -k_2\vec{T}$ ile hesaplanır (Bishop 1975). Buna ek olarak Bükçü ve arkadaşları Bishop çatısını Minkowski 3-uzayında incelemiştir (Bükcü 2008, Bükcü Karacan 2010, 2008 a ve b, Karacan 2008). Öte yandan Yılmaz ve arkadaşları 2010 yılında binormal vektör alanına paralel olan type-2 Bishop çatısı olarak adlandırılan yeni bir Bishop çatısı tanımlamışlardır ve bu çatının türev denklemlerini $\vec{N}_1' = -k_1\vec{B}$ , $\vec{N}_2' = -k_2\vec{B}$ , $\vec{B}' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ şeklinde elde etmişlerdir. $k_1$ ve $k_2$ type-2 Bishop çatısının eğrilikleridir (Yılmaz Turgut 2010, Yılmaz Özyılmaz 2010). Kızıltuğ ve arkadaşları 2013 yılında type-2 Bishop çatısı yardımıyla slant helislerin bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir (Kızıltuğ vd. 2013). İlk defa Scofield tarafından oluşturulan $\left\{\vec{N}, \vec{C} = \frac{\vec{N}'}{\left\|\vec{N}'\right\|}, \vec{W} = \frac{\tau\vec{T} + \kappa\vec{B}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right\}$ alternatif çatısı Uzunoğlu ve arkadaşları tarafından daha detaylı incelenerek bu çatının türev denklemlerini $\vec{N}' = f\vec{C} + \vec{W}$ , $\vec{C}' = -f\vec{N} + g\vec{W}$ , $\vec{W}' = -g\vec{C}$ şeklinde elde etmişlerdir (Scofield 1995, Uzunoğlu vd. 2016). Bu alternatif hareketli çatıya göre eğrilikler $H = \frac{\tau}{\kappa}$, $\sigma = \frac{H'}{\kappa\left(1 + H^2\right)^{3/2}} = sbt$ olmak üzere $f = \kappa\sqrt{1 + H^2}$ ve $g = \sigma f$ eşitlikleri ile hesaplanır (Uzunoğlu vd. 2016). Keskin ve Yaylı ise Öklid 3-uzayında bir eğrinin ortonormal $\left\{\vec{N}, \vec{C}, \vec{W}\right\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel olarak eğri boyunca taşınmasını sağlayan N-Bishop çatısını elde etmişlerdir (Keskin Yaylı 2017). Öklid 3-uzayında birim hızlı regüler bir eğrinin N-Bishop çatısı $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ şeklinde olup türev denklemleri $\vec{N}'=k_1\vec{N}_1+k_2\vec{N}_2$, $\vec{N}_1'=-k_1\vec{N}$, $\vec{N}_2'=-k_2\vec{N}$ eşitlikleri ile hesaplanır (Keskin Yaylı 2017). Minkowski 3-uzayında timelike normalli birim hızlı regüler bir eğrinin $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ Serret-Frenet çatısındaki $\vec{N}$ timelike, $\vec{B}$ ve $\vec{T}$ spacelike vektörleridir. Bu durumda $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ N-Bishop çatısının vektörlerinden $\vec{N}_1$ ve $\vec{N}_2$ spacelike, $\vec{N}$ timelike olmaktadır. Minkowski 3-uzayında N-Bishop çatısı bir spacelike eğrinin ortonormal $\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel olarak eğri boyunca taşınmasını ifade eder. Bu çatı timelike normalli eğrinin ikinci türevi olmadığı durumlarda alternatif olarak kullanılabilir. $\langle\vec{N},\vec{N}\rangle_L=-1$, $\langle\vec{N}_1,\vec{N}_1\rangle_L=1$, $\langle\vec{N}_2,\vec{N}_2\rangle_L=1$ olmak üzere timelike normalli eğrinin $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ N-Bishop çatısının türev denklemleri

$$\vec{N}'=k_1\vec{N}_1+k_2\vec{N}_2,$$

$$\vec{N}_1'=k_1\vec{N},\vec{N}_2'=k_2\vec{N}$$

şeklinde elde edilir. $\kappa$ ve $\tau$ Frenet çatı eğrilikleri ile $k_1$ ve $k_2$ N-Bishop çatısının eğrilikleri arasındaki ilişki $f=\sqrt{\left|\tau^2-\kappa^2\right|}=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ eşitliği ile verilmektedir (Samancı Kocayiğit 2019).

## 3. Bulgular

Bu çalışmada Minkowski 3-uzayında timelike normalli bir eğrinin N-Bishop çatısına göre slant helislerinin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

**Tanım 3.1.** $\xi:\mathrm{I}\to\mathrm{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında birim hızlı timelike normalli bir eğri olsun. $\xi$ eğrisinin N-Bishop çatısına göre slant helis olması için $\vec{N}_1$ birim vektörü ile $\vec{v}$ sabit doğrultu vektörü arasındaki açının sabit olması gerekir; yani $\forall s\in I$ için $\langle\vec{N}_1(s),\vec{v}\rangle=\eta_1$ (sbt) koşulunu sağlayan $\xi$ eğrisine slant helis denir.

**Teorem 3.1.** $\xi:\mathrm{I}\to\mathrm{E}_1^3$; sıfırdan farklı $k_1$ ve $k_2$ N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı ve timelike normalli bir eğri olsun. $\xi$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $\forall s\in\mathrm{I}$ için $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olmasıdır.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: $\xi$, $\mathrm{E}_1^3$ de slant helis olsun. Slant helis tanımından $\{\vec{N},\vec{N}_1,\vec{N}_2\}$ N-Bishop çatısına göre $\langle\vec{N}_1,\vec{v}\rangle=\eta_1=(sbt)$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa $\langle \vec{N}_1', \vec{v} \rangle = 0$ olup N-Bishop çatısının türev denklemlerinden $\langle k_1\vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\langle \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$ yazılır. Bulduğumuz $\langle \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$ eşitliğinden tekrar türev alınırsa $\langle \vec{N}', \vec{v} \rangle = 0$ eşitliği bulunur. N-Bishop çatısının türev denlemlerini kullanarak $\langle k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2, \vec{v} \rangle = 0$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} k_1\langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle + k_2\langle \vec{N}_2, \vec{v} \rangle &= 0 \\ k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2) &= 0 \\ \frac{k_1}{k_2} = -\frac{\eta_2}{\eta_1} &= (sbt) \end{aligned}$$

oranı elde edilir. $\langle \vec{N}, \vec{v} \rangle = 0$ eşitliğinden $\vec{v} \in s_p\left\{\vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ olduğunu ve diğer taraftan $\xi$ eğrisinin timelike normalli eğri olmasından dolayı ortonormal N-Bishop çatısı $\left\{\vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2\right\}$ nün vektörlerinden $\vec{N}$ nin timelike, $\vec{N}_1$ ve $\vec{N}_2$ nün spacelike olduğunu gözönünde bulundurursak,

$$\vec{v} = (\eta_1)\vec{N}_1 + (\eta_2)\vec{N}_2$$

(1)

eşitliği yazılabilir. (1) eşitliğinden türev alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= (\eta_1)\vec{N}_1{}' + (\eta_2)\vec{N}_2{}' \\ &= (\eta_1)(k_1\vec{N}) + (\eta_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2)\right]\vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve buradan $\vec{v}$ nin sabit olduğu sonucuna ulaşılarak $\left[k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2)\right] = 0$ denklemi elde edilir. Böylece $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\eta_2}{\eta_1} = sbt$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

$(\Leftarrow)$: $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliğini kabul edelim. Buradan $\frac{k_1}{k_2} = \eta$ ve $\eta$ sabit sayısına karşılık gelen $\eta = -\frac{\eta_2}{\eta_1}$ eşitliği gözönüne alınabilir. Bu denklemden $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\eta_2}{\eta_1}$, yani $k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2) = 0$ eşitliği bulunur. (1) denkleminden türev alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= (\eta_1)\vec{N}_1' + (\eta_2)\vec{N}_2' \\ &= (\eta_1)(k_1\vec{N}) + (\eta_2)(k_2\vec{N}) \\ &= \left[k_1(\eta_1) + k_2(\eta_2)\right]\vec{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve $\vec{v}$ sabit olarak elde edilir. Şimdi $\langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle$ ifadesinin sabit olduğunu gösterelim; yani,

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_1, \vec{v} \rangle &= \langle \vec{N}_1, (\eta_1)\vec{N}_1 + (\eta_2)\vec{N}_2 \rangle \\ &= (\eta_1)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle + (\eta_2)\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle \\ &= (\eta_1)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_1 \rangle}_{1} + (\eta_2)\underbrace{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}_{0} \\ &= \eta_1(sbt) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur, buradan slant helis tanımından $\xi$ eğrisi slant helis olup ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2.** $\xi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$; sıfırdan farklı $k_1$ ve $k_2$ N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı ve timelike normalli bir eğri olsun. $\xi$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)=0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: $\xi$ slant helis olsun. Bu durumda $\frac{k_1}{k_2}$ sabittir. N-Bishop çatısının türev formüllerinden $\vec{N}_1' = k_1\vec{N}$ eşitliğinin türevi alınıp türev denklemlerini yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\vec{N}_1'' &= k_1'\vec{N} + k_1\vec{N}' \\ &= k_1'\vec{N} + k_1(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N} + k_1^2\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2\end{aligned} \tag{2}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten tekrar türev alınıp türev denklemleri yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\vec{N}_1''' &= 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^2\vec{N}_1' + k_1''\vec{N} \\ &\quad + k_1'\vec{N}' + k_1'k_2\vec{N}_2 + k_2'k_1\vec{N}_2 + k_1k_2\vec{N}_2' \\ &= 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^2(k_1\vec{N}) + k_1''\vec{N} + k_1'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &\quad + k_1'k_2\vec{N}_2 + k_2'k_1\vec{N}_2 + k_1k_2(k_2\vec{N}) \\ &= (k_1^3 + k_1'' + k_1k_2^2)\vec{N} + 3k_1k_1'\vec{N}_1 \\ &\quad + (k_2'k_1 + 2k_2k_1')\vec{N}_2\end{aligned} \tag{3}$$

ifadesi elde edilir. $\vec{N}_1$ vektörünün 1.türev, 2.türev ve 3. türev denklemleri $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)$ determinant ifadesinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}&\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right) = \\ &= \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_1' & k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1^3 + k_1'' + k_1k_2^2 & 3k_1k_1' & 2k_1'k_2 + k_2'k_1 \end{vmatrix} \\ &= k_1\left[2k_1'k_2k_1^2 + k_2'k_1^3 - 3k_1^2k_2k_1'\right] \\ &= -k_1\left[k_1^2k_2k_1' - k_2'k_1^3\right] \\ &= -k_1^3\left[k_2k_1' - k_1k_2'\right] \\ &= -k_1^3k_2^2\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'\end{aligned} \tag{4}$$

eşitliği bulunur. Varsayımımızdan dolayı, $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'=0$ olduğundan, (4) denkleminden $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)=0$ sonucu elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_1', \vec{N}_1'', \vec{N}_1'''\right)=0$ eşitliğini kabul edelim. (4) eşitliğinden $k_1^3k_2^2\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'=0$ olup; $k_1 \neq 0$ , $k_2 \neq 0$ şartlarından dolayı $\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'=0$ , eşitliği elde edilir. Buradan $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olup $\xi$ eğrisinin bir slant helis olduğu gösterilerek, böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.3.** $\xi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$; sıfırdan farklı $k_1$ ve $k_2$ N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı ve timelike normalli bir eğri olsun. $\xi$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: $\xi$ slant helis olsun. Bu durumda, $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. Türev denklemlerinden $\vec{N}_2' = k_2\vec{N}$ eşitliğinin türevini alıp türev denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\vec{N}_2'' &= k_2{}'\vec{N} + k_2\vec{N}' \\ &= k_2{}'\vec{N} + k_2\left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right) \qquad (5)\\ &= k_2{}'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 + k_2{}^2\vec{N}_2\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (5) denkleminden tekrar türev alınarak türev denklemleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{N}_2''' &= k_1{}'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2{}'\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_1' \\ &\quad + k_2{}''\vec{N} + k_2{}'\vec{N}' + 2k_2k_2{}'\vec{N}_2 + k_2{}^2\vec{N}_2{}' \\ &= k_1{}'k_2\vec{N}_1 + k_1k_2{}'\vec{N}_1 + k_1k_2(k_1\vec{N}) \\ &\quad + k_2{}''\vec{N} + k_2{}'(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &\quad + 2k_2k_2{}'\vec{N}_2 + k_2{}^2(k_2\vec{N}),\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\vec{N}_2''' &= (k_2{}^3 + k_2{}'' + k_2k_1{}^2)\vec{N} \\ &\quad + (2k_1k_2{}' + k_2k_1{}')\vec{N}_1 + (3k_2k_2{}')\vec{N}_2\end{aligned} \qquad (6)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right)$ ifadesini hesaplamak için bulunan eşitlikler determinantta yerine yazılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}&\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = \\ &= \begin{vmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ k_2{}' & k_1k_2 & k_2{}^2 \\ k_2{}^3 + k_2{}'' + k_2k_1{}^2 & 2k_1k_2{}' + k_2k_1{}' & 3k_2k_2{}' \end{vmatrix} \\ &= k_2(3k_1k_2{}^2k_2' - 2k_1k_2{}^2k_2' - k_2{}^3k_1') \\ &= -k_2(k_2{}^3k_1' - k_1k_2{}^2k_2') \\ &= -k_2{}^3(k_2k_1' - k_1k_2') \qquad (7)\\ &= -k_2{}^5\left[\frac{k_1}{k_2}\right]'\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Varsayımımızdan dolayı, $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ eşitliği (7) da yerine yazılırsa $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}_2', \vec{N}_2'', \vec{N}_2'''\right) = 0$ eşitliğini kabul edelim. Bu durumda (7) eşitliğinden $-k_2{}^5\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup; $k_2 \neq 0$ şartından dolayı $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olduğu görülür ve $\dfrac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olarak elde edilir. Bu durumda $\xi$ eğrisinin bir slant helis olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4.** $\xi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_1^3$; sıfırdan farklı $k_1$ ve $k_2$ N-Bishop çatı eğriliklerine sahip birim hızlı ve timelike normalli bir eğri olsun. $\xi$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliği sağlanmasıdır.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: $\xi$ ; slant helis olsun. Bu durumda $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir.Türev denklemlerinde $\vec{N}' = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alındıktan sonra türev denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\vec{N}'' &= k_1'\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_1' + k_2'\vec{N}_2 + k_2\vec{N}_2' \\ &= k_1'\vec{N}_1 + k_1(k_1\vec{N}) + k_2'\vec{N}_2 + k_2(k_2\vec{N}) \\ &= (k_2^2 + k_1^2)\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2\end{aligned} \tag{8}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten tekrar türev alınarak türev denklemlerini yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}&\vec{N}''' = \\ &= (2k_2k_2' + 2k_1k_1')\vec{N} + (k_2^2 + k_1^2)\vec{N}' \\ &+k_1''\vec{N}_1 + k_1'\vec{N}_1' + k_2''\vec{N}_2 + k_2'\vec{N}_2' \\ &= (2k_2k_2' + 2k_1k_1')\vec{N} + (k_2^2 + k_1^2)(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &+k_1''\vec{N}_1 + k_1'(k_1\vec{N}) + k_2''\vec{N}_2 + k_2'(k_2\vec{N}) \\ &= (3k_2k_2' + 3k_1k_1')\vec{N} + (k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2)\vec{N}_1 \\ &+(k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3)\vec{N}_2\end{aligned} \tag{9}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\vec{N}$ nin 1.türev, 2.türev ve 3.türev eşitliklerini $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right)$ de yerine yazıp gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}&\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ (k_1^2 + k_2^2) & k_1' & k_2' \\ (3k_1k_1' + 3k_2k_2') & (k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2) & (k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3) \end{vmatrix} \\ &= -k_1\left[(k_1^2 + k_2^2)(k_2'' + k_1^2k_2 + k_2^3) - 3k_1k_1'k_2' - 3k_2k_2'^2\right] \\ &+k_2\left[(k_1^2 + k_2^2)(k_1'' + k_1^3 + k_1k_2^2) - 3k_1k_1'^2 - 3k_2k_2'k_1'\right] \\ &= -\left(3k_1k_2^2k_1' + 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\left[k_2k_1'' - k_1k_2''\right] \\ &= -\left(3k_1k_2^2k_1' + 3k_2^3k_2'\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \\ &+\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1\right]\left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'' k_2^4 + 2k_2^3k_2'\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]\end{aligned} \tag{10}$$

eşitliği bulunur. $\xi$ slant helis olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabittir. Buradan $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olup (10) denkleminden $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ olur ki ispatın gerek şartı tamamlanır.

$(\Leftarrow)$: $\det\left(\vec{N}', \vec{N}'', \vec{N}'''\right) = 0$ eşitliğini kabul edelim. Bu durumda (10) denkleminden $\left[\dfrac{k_1}{k_2}\right]' = 0$ olur ve buradan $\dfrac{k_1}{k_2}$ sabit olarak

elde edilir. O halde $\xi$ nin slant helis olduğu gösterilmiş olup ispat tamamlanır.
Minkowski 3-uzayında timelike normalli bir $\xi$ eğrisi slant helis olsun. O zaman N-Bishop çatısının $\alpha'(s)=\vec{T}$ vektörüne göre kovaryant türev

$$\begin{aligned} D_T\vec{N} &= k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2 \\ D_T\vec{N}_1 &= k_1\vec{N} \\ D_T\vec{N}_2 &= k_2\vec{N} \end{aligned} \tag{11}$$

denklemleri yazılır. Herhangibir $s \in \mathrm{I}$ için $\vec{N}_1(s)$ ve $\vec{N}_2(s)$ vektör alanları olup $k_1$ ve $k_2$ eğrilikleri s parametreli fonksiyonlardır.

**Teorem 3.5.** Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı ve timelike normalli $\xi$ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart;

$$D_T(D_T D_T\vec{N}_1) = D_T\vec{N}_1\left(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}\right) + 3k_1' D_T\vec{N} \tag{12}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat.** $(\Rightarrow)$: Farz edelim ki $\xi$ slant helis olsun. (12) eşitliğini ispatlamak için öncelikle (11) eşitliklerinden $D_T N_1 = k_1\vec{N}$ eşitliğinin kovaryant türevi alınıp (11) eşitlikleri yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} D_T(D_T\vec{N}_1) &= D_T(k_1\vec{N}) \\ &= k_1'\vec{N} + k_1 D_T\vec{N} \\ &= k_1'\vec{N} + k_1(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N} + k_1^{\,2}\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{13}$$

eşitliği bulunur. (13) eşitliğinin tekrar kovaryant türevi alındıktan sonra (11) eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} D_T(D_T D_T\vec{N}_1) &= D_T(k_1'\vec{N} + k_1^{\,2}\vec{N}_1 + k_1k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1''\vec{N} + k_1' D_T\vec{N} + 2k_1k_1'\vec{N}_1 + k_1^{\,2} D_T\vec{N}_1 \\ &\quad + (k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_2 + k_1k_2 D_T\vec{N}_2 \\ &= k_1''\vec{N} + k_1' D_T\vec{N} + 2k_1k_1'\vec{N}_1 \\ &\quad + (k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_2 + k_1k_2(k_2\vec{N}) + k_1^{\,2} D_T\vec{N}_1 \end{aligned} \tag{14}$$

eşitliği bulunur. $\xi$ slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitliğin türevi alınırsa $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten türev alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{k_1'k_2 - k_1k_2'}{k_2^2} = 0 \Rightarrow k_1'k_2 - k_1k_2' = 0 \\ &\Rightarrow k_1'k_2 = k_1k_2' \end{aligned} \tag{15}$$

bulunur. Ayrıca (11) eşitliklerinden

$$\vec{N} = \frac{1}{k_1} D_T\vec{N}_1 \tag{16}$$

eşitliği yazılabilir. (15) ile (16) eşitlikleri (14) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_1) =$$
$$= \left(k_1'' + k_1 k_2^2\right)\vec{N} + k_1' D_T \vec{N}$$
$$+2k_1'\left(\underbrace{k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2}_{D_T N}\right) + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1$$
$$= (k_1'' + k_1 k_2^2)\vec{N} + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1 + 3k_1' D_T \vec{N}$$
$$= (k_1'' + k_1 k_2^2)(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1) + k_1^{\,2} D_T \vec{N}_1 + 3k_1' D_T \vec{N}$$
$$= D_T \vec{N}_1(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}) + 3k_1' D_T \vec{N}$$

eşitliği elde edilir ve ispatın gerek şartı tamamlanır.

$(\Leftarrow)$ : Tersine (12) denkleminin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\xi$ eğrisinin slant helis olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için (16) denkleminin kovaryant türevi alınarak

$$D_T \vec{N} = D_T\left(\frac{1}{k_1} D_T \vec{N}_1\right)$$
$$= -\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten tekrar kovaryant türev alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$D_T D_T \vec{N} = D_T\left(-\frac{k_1'}{k_1^2} D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T \vec{N}_1\right)$$
$$= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1$$
$$-\frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{1}{k_1} D_T D_T D_T \vec{N}_1 \qquad (17)$$

eşitliği elde edilir. (17) denkleminde (12) denklemi yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$D_T D_T \vec{N} =$$
$$= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1$$
$$+\frac{1}{k_1}\left(D_T \vec{N}_1(\frac{k_1''}{k_1} + k_2^2 + k_1^{\,2}) + 3k_1' D_T \vec{N}\right)$$
$$= -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1$$
$$+D_T \vec{N}_1\left(\frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}$$
$$= \left(-\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right) D_T \vec{N}_1$$
$$-\frac{2k_1'}{k_1^2} D_T D_T \vec{N}_1 + \frac{3k_1'}{k_1} D_T \vec{N}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde (11) ve (13) denklemleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$D_T D_T \vec{N} =$$
$$= \left( -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1$$
$$-\frac{2k_1'}{k_1^2}\left(k_1'\vec{N} + k_1^2\vec{N}_1 + k_1 k_2 \vec{N}_2\right) + \frac{3k_1'}{k_1}\left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right)$$
$$= \left( -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2}\vec{N}$$
$$-2k_1'\vec{N}_1 - \frac{2k_1'k_2}{k_1}\vec{N}_2 + 3k_1'\vec{N}_1 + \frac{3k_1'k_2}{k_1}\vec{N}_2$$
$$= \left( -\left(\frac{k_1'}{k_1^2}\right)' + \frac{k_1''}{k_1^2} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1 \right) D_T \vec{N}_1$$
$$+k_1'\vec{N}_1 + \frac{k_1'k_2}{k_1}\vec{N}_2 - \frac{2(k_1')^2}{k_1^2}\vec{N} \qquad (18)$$

eşitliği elde edilir ve diğer yandan $D_T D_T \vec{N}$ ifadesini hesaplamak için (11) denklemlerin tekrar kovaryant türevi alınarak

$$D_T D_T \vec{N} = D_T\left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right)$$
$$= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 + k_2 D_T\vec{N}_2$$
$$= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 + k_2^2\vec{N} \qquad (19)$$

denklemi bulunur. Şimdi (18) ve (19) eşitliklerini eşitleyerek $\frac{k_1'k_2}{k_1} = k_2'$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ eşitliği elde edilir ve oranın türevi sıfır olduğuna göre $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ eşitliği yazılır ve buradan $\xi$ nin bir slant helis olduğu sonucuna ulaşılır.

**Teorem 3.6.** Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı timelike normalli $\xi$ eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = D_T\vec{N}_2\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 + k_1^2\right) + 3k_2' D_T\vec{N} \qquad (20)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat.** $\xi$ nin bir slant helis olduğunu kabul edelim. (20) denklemini ispatlamak için (11) denklemlerinden $D_T\vec{N}_2 = k_2\vec{N}$ eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa

$$D_T(D_T\vec{N}_2) = D_T(k_2\vec{N}) = k_2'\vec{N} + k_2 D_T\vec{N}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten (11) denklemleri yerine yazılırsa

$$D_T D_T\vec{N}_2 = k_2'\vec{N} + k_2(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2)$$
$$= k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2$$

eşitliği elde edillir. Bu eşitlikten tekrar kovaryant türev alınırsa elde edilen

$$D_T(D_T D_T\vec{N}_2) = D_T(k_2'\vec{N} + k_1k_2\vec{N}_1 + k_2^2\vec{N}_2)$$
$$= k_2''\vec{N} + k_2'D_T\vec{N} + 2k_2k_2'\vec{N}_2 + k_2^2 D_T\vec{N}_2$$
$$+(k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_1 + k_1k_2 D_T\vec{N}_1$$

ifadesinde, (11) eşitliği yerine yazılırsa

$$D_T(D_T D_T\vec{N}_2) = k_2''\vec{N} + k_2'D_T\vec{N} + 2k_2k_2'\vec{N}_2$$
$$+(k_1'k_2 + k_1k_2')\vec{N}_1 + k_1k_2(k_1\vec{N}) + k_2^2 D_T\vec{N}_2 \qquad (21)$$

bulunur. $\xi$ slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılır. Bu eşitlikten dolayı (15) eşitliği (21) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = k_2''\vec{N} + k_1^2 k_2 \vec{N} + k_2' D_T \vec{N}$$
$$+2k_2'\underbrace{(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2)}_{D_T\vec{N}} + k_2^2 D_T \vec{N}_2$$
$$= (k_2'' + k_1^2 k_2)\vec{N} + k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T \vec{N} \qquad (22)$$

eşitliği elde edilir. (11) ile verilen denklemlerin üçüncüsü olan $\vec{N} = \frac{1}{k_2} D_T \vec{N}_2$ eşitliği (22) de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_T(D_T D_T \vec{N}_2) = (k_2'' + k_1^2 k_2)(\frac{1}{k_2} D_T \vec{N}_2)$$
$$+ k_2^2 D_T \vec{N}_2 + 3k_2' D_T \vec{N}$$
$$= D_T \vec{N}_2 (\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 + k_1^2) + 3k_2' D_T \vec{N}$$

eşitliği bulunmuş olup ispatın gerek şartı tamamlanmış olur.

Tersine (20) denkleminin doğru olduğunu kabul edip $\xi$ eğrisinin slant helis belirttiğini gösterelim. Timelike normalli eğrinin N-Bishop çatısının türev denklemlerinden $D_T \vec{N}_2 = k_2 \vec{N}$ ve $D_T \vec{N} = k_1 \vec{N}_1 + k_2 \vec{N}_2$ denklemleri (20) da yerine yazıldığında

$$D_T \vec{N}_2 (\frac{k_2''}{k_2} + k_2^2 + k_1^2) + 3k_2' D_T \vec{N} =$$
$$= (k_2'' + k_2^3 + k_2 k_1^2)\vec{N} + 3k_1 k_2' \vec{N}_1 + 3k_2 k_2' \vec{N}_2$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu denklem (6) denklemi ile eşitlendiğinde $3k_1 k_2' = 2k_1 k_2' + k_2 k_1'$ denklemi ile $\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1'}{k_2'}$ oranı bulunur. Bu orandan elde edilen $\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k_2'}{k_2}$ eşitliğinin integrasyonu alındığında $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olduğu görülür. Böylece $\xi$ eğrisinin slant helis olduğu ispatlanmış olur.

**Teorem 3.7.** Minkowski 3-uzayında alınan birim hızlı ve timelike normalli $\xi$ eğrisi slant helis ise

**i.** $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 + k_2^2) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (23)$$

**ii.** $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}\left(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (24)$$

**iii.** $$D_T(D_T D_T \vec{N}) = D_T \vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 + k_2^2\right) + 3k_1' D_T \vec{N}_1 + 3k_2' D_T \vec{N}_2 \qquad (25)$$

durumlarını sağlar.

**İspat.** $\xi$ nin bir slant helis olduğunu kabul edelim. (23), (24) ve (25) eşitliklerini göstermek için (11) denklemlerinden $D_T\vec{N} = k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2$ eşitliğinin kovaryant türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} D_T(D_T\vec{N}) &= D_T(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= k_1'\vec{N}_1 + k_1 D_T\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 + k_2 D_T\vec{N}_2 \\ &= k_1^2\vec{N} + k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten tekrar kovaryant türev alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & D_T(D_T D_T\vec{N}) = \\ & = D_T(k_1^2\vec{N} + k_2^2\vec{N} + k_1'\vec{N}_1 + k_2'\vec{N}_2) \\ & = 2k_1k_1'\vec{N} + k_1^2 D_T\vec{N} + 2k_2k_2'\vec{N} \\ & + k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_2' D_T\vec{N}_2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (11) denklemleri tatbik edilip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & D_T(D_T D_T\vec{N}) = 2k_1' D_T\vec{N}_1 + 2k_2' D_T\vec{N}_2 + k_1^2 D_T\vec{N} \\ & + k_2^2 D_T\vec{N} + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_1' D_T\vec{N}_1 + k_2' D_T\vec{N}_2 \\ & = 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2 + D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) \\ & + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 \end{aligned} \tag{26}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi ise $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadesinin özdeşini bulmaya çalışalım. $\xi$ eğrisi slant helis olduğundan $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ yazılabilir. Bu eşitlikten türev alınırsa $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ eşitliği bulunur, (15) eşitliğinden

$$\frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} \tag{27}$$

yazılabilir. Burada $\frac{k_1}{k_2} = sbt$ olduğundan $\frac{k_1'}{k_2'} = sbt$ olduğu açıktır ve bölüm türevi uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{k_1''k_2' - k_1'k_2''}{k_2'^2} = 0 \Rightarrow k_1''k_2' - k_1'k_2'' = 0 \\ & \Rightarrow k_1''k_2' = k_1'k_2'' \Rightarrow \frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} \end{aligned} \tag{28}$$

eşitliği elde edilir. (27) ve (28) eşitlikleri göz önüne alarak $\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1'}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2}$ bağıntısı yazılır. Buradan $\frac{k_1''}{k_2''} = \frac{k_1}{k_2}$ olup

$$k_1''k_2 = k_1k_2'' \tag{29}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} = a$ şeklinde yazılıp $\frac{k_1''}{k_1} = a$ ve $\frac{k_2''}{k_2} = a$ eşitlikleri $k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$ ifadesinde kullanılarak

$$\begin{aligned} k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 &= \frac{k_1''}{k_1}k_1\vec{N}_1 + \frac{k_2''}{k_2}k_2\vec{N}_2 \\ &= ak_1\vec{N}_1 + ak_2\vec{N}_2 \\ &= a(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2) \\ &= aD_T\vec{N} \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_1''}{k_1} D_T\vec{N} \quad \text{veya}$$

$$k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = \frac{k_2''}{k_2} D_T\vec{N} \qquad (30)$$

eşitlikleri yazılabilir. (30) eşitlikleri (26) denkleminde yerine ayrı ayrı yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$D_T(D_T D_T\vec{N}) =$$
$$= D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{k_1''}{k_1} D_T\vec{N} + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$
$$= D_T\vec{N}(\frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 + k_2^2) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$

şeklindeki (23) eşitliği ve

$$D_T(D_T D_T\vec{N}) =$$
$$= D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{k_2''}{k_2} D_T\vec{N} + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$
$$= D_T\vec{N}(\frac{k_2''}{k_2} + k_1^2 + k_2^2) + 3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$

şeklindeki (24) eşitliği bulunur. (25) eşitliğini göstermek için $D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$ eşitini bulmaya çalışalım;

$$D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) = \left(k_1\vec{N}_1 + k_2\vec{N}_2\right)\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$
$$= k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + \frac{k_1 k_2''}{k_2}\vec{N}_1 + \frac{k_1'' k_2}{k_1}\vec{N}_2$$

eşitliğinde (29) eşitliği yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right) = k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + \frac{k_1'' k_2}{k_2}\vec{N}_1 + \frac{k_1 k_2''}{k_1}\vec{N}_2$$
$$= k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 + k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2$$
$$= 2\left(k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$2\left(k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2\right) = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{k_1} + \frac{k_2''}{k_2}\right)$$

$$k_1''\vec{N}_1 + k_2''\vec{N}_2 = D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right)$$

denklemleri bulunur. Bu eşitlik (26) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$D_T(D_T D_T\vec{N}) =$$
$$= D_T\vec{N}(k_1^2 + k_2^2) + D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2}\right)$$
$$+3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$
$$= D_T\vec{N}\left(\frac{k_1''}{2k_1} + \frac{k_2''}{2k_2} + k_1^2 + k_2^2\right)$$
$$+3k_1' D_T\vec{N}_1 + 3k_2' D_T\vec{N}_2$$

şeklindeki (25) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

## 4. Kaynaklar


Bishop, R.L. 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, 82(3): 246-251.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2008. Special Bishop Motion and Bishop Darboux Rotation Axis of The Space Curve, Journal of Dyn. Systems and Geo. Theories, 6(1): 27-34.

Bükcü, B, Karacan, M.K. 2008. On the Slant Helices Accordıng to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space, Tamkang J. of Mathematics, 39(3): 255-262.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2008. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, Communications Faculte Science University Ankara Series A1 Mathematics Statistics, 57(1): 13-22.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame, International J. of Computational and Mathematical Sciences, 3(2): 67-70.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2010. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, Selçuk J. of Applied Mathematics, 11(1): 15-25.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2013. The Slant Helices According to Bishop Frame of the Spacelike Curve in Lorentzian Space, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 12(5), 691-700.

Izumiya, S., Takeuchi, N. 2004. New Special Curves and Developable Surfaces, Turkish Journal of Mathematics, 28(2), 153-164.

Karacan, M.K. 2008. Bishop Frame of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 3(1): 80-90.

Keskin, O., Yaylı, Y. 2017. An Application of N-Bishop Frame to Spherical Images for Direction Curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(11), 1750162.

Kızıltuğ, S., Kaya, S., & Tarakçı, O. 2013. The Slant Helices According to Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-space. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 85(2), 211-222.

Samancı, H.K., Kocayiğit H. 2019. N-Bishop Darboux Vector of the Spacelike Curve with Spacelike Binormal, Thermal Science, 23(1), 353-360.

Scofield, P.D. 1995. Curves of Constant Precession. The American Mathematical Monthly, 102(6): 531-537.

Uzunoğlu, B., Gök İ., Yaylı, Y. 2016. A New Approach on Curves of Constant Precession, Applied Mathematics and Computation, 275: 317-323.

Yılmaz, S., Turgut, M. 2010. A New Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images, J. of Mathematical Analysis and Applications, 371(2): 764-776.

Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Turgut, M. 2010. New Spherical Indicatrices and their Characterizations, An Saint. University Ovidius Constanta, 18(2): 337-354.