Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
E-ISSN: 2651-2769
Sayı 43, Aralık 2019

Journal of Science and Technology
of Dumlupınar University
E-ISSN: 2651-2769
Number 43, December 2019

ARAŞTIRMA MAKALESİ (Research Article)

KÂHLER-EİNSTEİN METRİK ÜZERİNE

Cemile YETİM[*1], Mine TURAN[2]

[1]Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, cemile.yetim@ogr.dpu.edu.tr, ORCID: 0000-0003-4115-5589
[2]Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kütahya, mine.turan@dpu.edu.tr, ORCID:0000-0002-8054-5945

Geliş Tarihi:05.12.2018 *Kabul Tarihi: 21.05.2019*

ÖZ

Bu çalışmada iki manifold arasındaki farklılıkları ayırt etmek için kullanılan ve bir yönlendirmeye sahip kompleks vektör demetlerinin karakteristik sınıfı olan Chern sınıflarından birinci Chern sınıfı ve Kâhler-Einstein metriklerine değinilmiş aynı zamanda da aralarındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Birinci Chern sınıfının pozitif, negatif ve sıfır olduğu durumlardan pozitif olduğu durum incelenmiş ve bu durum için Kâhler-Einstein metriklerinin nasıl bulunabileceği açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Kâhler-Einstein Metrik, Birinci Chern Sınıfı, Futaki İnvaryantı*

ON KÂHLER-EINSTEIN METRIC

ABSTRACT

In this study, we were mentioned Kâhler-Einstein metrics and the first Chern class of the Chern classes which is the characteristic class of complex vector bundles with a orientation and used to distinguish the differences between two manifolds. Relation between Kâhler-Einstein metrics and first Chern class was mentioned. Positive case of the first Chern class which has positive, negative and zero was examined and for this case how to find Kâhler-Einstein metrics was explained.

Keywords: *Kâhler-Einstein Metrics, First Chern Class, Futaki Invaryant*

1. GİRİŞ

Bir vektör demeti, bir baz uzayı (topolojik uzay) üzerindeki bir noktaya bir vektör uzayı atamanın bir yoludur. Karakteristik sınıflar, her vektör demeti ile bu baz uzayının bir kohomoloji sınıfı arasında eşleme yapar. Kohomoloji sınıfı, özellikle bükülmüş olan demetin mertebesini ölçer. Bu demetin, kesitinin (çapraz kesitinin) olup olmaması önemli değildir. Başka bir deyişle karakteristik sınıflar, bir yerel çarpım yapısının bir genel çarpım yapısından sapmasını ölçer. Bu yapılar cebirsel topoloji, diferansiyel geometri ve cebirsel geometride birleştirici geometrik kavramlardan biridir. Karakteristik sınıflar kohomoloji teorisinin bir kontravaryant yapısıdır [1].

Homoloji ve kohomoloji, topolojik uzaylar kategorisinden değişmeli gruplar veya halkalar kategorisine sahip birer funktordur. Homoloji ve kohomoloji arasındaki temel fark: kohomoloji grupları kontravaryant funktorlar iken homoloji grupları kovaryant funktorlar olmasıdır. Funktorlar ise morfizmleri morfizme veya objeleri objeye dönüştüren kategoriler arasında bir fonksiyondur. Homoloji, sadece değişmeli bir grup veya vektör uzayı iken kohomoloji doğal bir şekilde halka (cebir) yapısına sahiptir. Bu nedenle kohomoloji, homolojiye göre daha cebirsel bir yapıya sahiptir. Ayrıca kohomoloji, homolojinin dualidir ve homolojinin cebirsel değişimleri olarak ifade edilir. Daha kısa bir anlatımla kohomoloji bir topolojik uzayın invaryantlarıdır. Homoloji ve kohomoloji grupları çok farklı gibi görünse de çok büyük bir fark yoktur ve bir uzayın homoloji grupları, o uzayın kohomoloji gruplarını belirler [2].

Kohomoloji grupları kontravaryant funktorlar olduğundan bu kontravaryantlık, kohomolojide ekstra yapılara neden olur. Bu yapılardan biri de bir uzayın kohomoloji gruplarını bir halkaya dönüştüren doğal bir çarpım olan cup çarpımıdır. Bu kohomoloji gruplarının halkaya dönüşümü sırasında Gysin tam dizi ile cup çarpımı kullanılır. Bu tam dizi, karakteristik sınıflardan biri olan Chern sınıfının oluşumundaki etmenlerden biridir [3].
Chern sınıfları, bir yönlendirmeye sahip olan kompleks vektör demetlerinin (veya n- düzlem demeti) karakteristik sınıfıdır. İki manifold arasındaki farklılıkları ayırt etmek için kullanılır. İki manifold, farklı Chern sınıflarına sahip ise onlar aynı olamazlar. Fakat iki manifold, aynı Chern sınıflarına sahip olabilir ve hala farklı olabilirler. Chern sınıflarından elde edilen sayılara Chern sayıları denir. Chern sınıflarının sayıları, kompleks boyutlarının (kompleks 1 boyut = reel 2 boyut) sayılarından bağımsızdır. Kompleks 1 boyutlu manifold, bir Chern sınıfına sahiptir. Bu sınıf birinci Chern sınıfı olarak adlandırılır. Kompleks 2 boyutlu manifold, birinci ve ikinci Chern sınıfına sahiptir. Chern sınıfları, manifoldların büyük resmini öğrenmek için çok kullanışlı araçlardır.

Chern sınıflarının ilki olan birinci Chern sınıfının negatif ve sıfır olduğu durumlarda fizikte String teorisinde önemli role sahip olan Kâhler-Einstein metriği varlığından bahsedilebilir. Birinci Chern sınıfının pozitif olduğu durumda Kâhler-Einstein metrikten söz edilmesi için Futaki invaryantının sıfır olması gerekir. Futaki invaryantı sıfır ise Kâhler-Einstein metrik bulunabilir. Kâhler-Einstein metrik hem Kâhler hem de Einstein olan metriktir. Einstein manifoldlar fizikte, Einstein'ın genel yerçekimi teorisindeki uzay-zamanı belirlemek için kullanılır. Matematikte ise daha karmaşık geometrilerin temel yapı taşıdır. Bu nedenle Kâhler-Einstein metrikleri anlamak hem Kâhler hem de Einstein manifoldları anlamada kolaylık sağlar. Bu kolaylık ise matematik ve fizikte önemli gelişmeleri yanında getirir.

Bu makalede özellikle Kâhler-Einstein metrik ve pozitif birinci Chern sınıfı üzerinde durulmuştur.

2. KÂHLER- EİNSTEİN METRİK

Bu bölümde birinci Chern sınıfının işaret durumu ve Kâhler- Einstein metriğinin özellikleri ile ilgili bilgi verilerek birinci Chern sınıfı ile Kâhler- Einstein metriği arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

2.1. Kompleks Manifold

M, iyi tanımlı holomorfik fonksiyonlara sahip düzgün manifold olsun. Daha açık bir ifade ile kompleks boyutu sıfırdan büyük n tamsayısı için M, $U_\alpha \subset M$ ve $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ açık kümeleri ile

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$$

homeomorfizmi tarafından örtülür öyle ki $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ öteleme dönüşümü her yerde tanımlanabilen holomorfiktir. $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ birleşimi her α için V_α üzerinde holomorfik ise $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu da holomorfiktir. Verilen dönüşümleri kullanarak herhangi bir yakın $p \in M$ noktası, her i için $z^i(p) = 0$ olan kompleks değerli fonksiyonlardan oluşan $z^1, \dots, z^n$ şeklinde bir holomorfik koordinat sistemi vardır. Ayrıca $w^1, \dots, w^n$ şeklinde farklı bir koordinat sistemi varsa her w^i, $z^1, \dots, z^n$ nin holomorfik bir fonksiyonudur [4].

Örnek 2.1.1. (Riemann Küresi) $M = S^2$ olsun ve $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küre olarak düşünelim. Burada iki dönüşüm tanımlayalım. $U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ gibi kuzey kutbun tümlemesi olsun ve

$$\varphi: U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

kuzey kutbundan xy-düzlemine kadar üç boyutlu harita projeksiyonu olarak tanımlansın. Benzer şekilde $U_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ güney kutbun tümlemesi olsun ve

$$\psi: U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

kompleks eşlenik ile güney kutbundan xy-düzlemine harita projeksiyonunun birleşimi olsun. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

hesaplaması yapılabilir. Bu öteleme fonksiyonu holomorfik olduğundan iki harita bir kompleks manifoldun yapısı S^2 yi verir [4].

Örnek 2.1.2 (Kompleks Projektif Uzay). $\mathbb{CP}^n$ kompleks projektif uzay, $\mathbb{C}^{n+1}$ deki kompleks doğruların uzayı olarak tanımlanır. Başka bir deyişle $\mathbb{CP}^n$ nin noktaları her sayısı sıfır olmayan $[Z_0: \dots : Z_n]$ $(n+1)$- lileridir ve her $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için

$$[Z_0: \dots : Z_n] = [\lambda Z_0: \dots : \lambda Z_n]$$

tanımlanır. $\mathbb{CP}^n$ topolojik bir uzay olarak bu denklik bağıntısı altında $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0, \dots, 0\}$ dan bölüntü topolojisi kalır. $Z_0, \dots, Z_n$ homojen koordinatları hatırlayalım. Kompleks yapıyı tanımlamak için $n+1$ harita kullanalım. $i \in \{0,1, \dots, n\}$ için

$$U_i = \{ [Z_0: \dots : Z_n] : Z_i \neq 0 \}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [Z_0: \dots Z_i \dots : Z_n] &\longrightarrow \left(\frac{Z_0}{Z_i}, \dots, \frac{Z_n}{Z_i}\right) \end{aligned}$$

olsun. Burada $\frac{z_i}{z_i}$ terimi dahil edilmediğinden öteleme fonksiyonlarının holomorfik olan kısmını kontrol etmek kolaylaşır. Örneğin $\mathbb{C}^n$ üzerinde $w^1, \dots, w^n$ koordinatlarını kullanarak

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}[w^1, \dots, w^n] = \left(\frac{1}{w^1}, \frac{w^2}{w^1}, \dots, \frac{w^n}{w^1}\right)$$

yazılabilir. $n = 1$ durumunda öteleme fonksiyonu ile iki harita elde ederiz. Böylece $\mathbb{CP}^1 = S^2$ kompleks manifolddur [4].

Tanım 2.1.1. M bir düzgün manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı, M nin tanjant demetlerinin

$$J: \tau_M \longrightarrow \tau_M$$

endomorfizmidir öyle ki $J^2 = -I$ (Id birim dönüşüm) dir [4].

Başka bir deyişle hemen hemen kompleks yapı, tanjant uzayın her noktasında $\sqrt{-1}$ çarpımlı bilineer dönüşüm gibi davranır. M nin boyutu çift olmalıdır çünkü tek boyutlu vektör uzayının herhangi bir endomorfizmi karesi -1 olmayan bir öz değere sahiptir [4].

Örnek 2.1.3. M kompleks bir manifold ise holomorfik haritalar $\mathbb{C}^n$ ile bir p noktasında her bir tanjant uzayına karşılık gelir. Eğer M nin lokal kompleks koordinatları $z^1, \dots, z^n$ ise M nin lokal reel koordinatları $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ şeklinde yazabiliriz. Bununla beraber J,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

sağlayan tek lineer dönüşümüdür. $T^C M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ olduğundan lokal holomorfik koordinatları

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$$

biçiminde yazılabilir. $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$ yi reel ve imajiner kısımlarına ayırdığımızda

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

elde edilir. J endomorfizmi, $T^C M$ nin kompleks lineer endomorfizmine genişler ve J nin, $T^{1,0}M$ nin $+i\left(\sqrt{-1}\right)$ ve $T^{0,1}M$ nin $-i\left(-\sqrt{-1}\right)$ öz uzayına komplesleştirilmiş tanjant demetinin ayrışımı

$$T^{C}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

şeklinde ifade edilir. Burada belirtilen $T^{1,0}M$ holomorfik tanjant demeti olarak isimlendirilir. $T^{1,0}M$, $\frac{\partial}{\partial z^i}$ tarafından ve $T^{0,1}M$ de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$ tarafından gerilir [4], [5].

Önerme 2.1.1. $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial\, \bar{z}^1} d\bar{z}^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial\, \bar{z}^n} d\bar{z}^n \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial\, \bar{z}^i}$$

Cauchy-Riemann denklemleri olmak üzere f fonksiyonu holomorfiktir ancak ve ancak $\bar{\partial} f = 0$ dır [4].

2.2. Hermitian ve Kâhler Metrikleri
Riemann metriğinin, her bir tanjant uzay üzerindeki pozitif tanımlı bir simetrik bilineer formdur.

Tanım 2.2.1. J kompleks yapısı ile birlikte M bir kompleks manifold olmak üzere herhangi X, Y tanjant vektörleri için $g(JX, JY) = g(X, Y)$ ise g Riemann metriği M üzerinde bir Hermitian metrik olarak adlandırılır. Başka bir deyişle her bir tanjant uzay üzerinde ortogonal dönüşüm olması için J kompleks yapısı gerekir [4].

$z^1, \ldots, z^n$ lokal koordinatlarda bir Hermitian metrik

$$g_{j\bar{k}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right)$$

tarafından belirlenir. Her iki taraf da kompleks lineerlik ile g den kompleks tanjant vektörlerine genişler. Herhangi j, k için Hermitian durumu,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) = 0$$

eşitliğini sağlar. Bununla beraber $g_{j\bar{k}}$ açısından

$$g = \sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\left(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j\right)$$

yazılabilir. Burada $g_{j\bar{k}}$ gösteriminde $\bar{k}$, holomorfik ve antiholomorfik bileşenlerin arasındaki ayrım için kullanılır [4].

g Hermitian metriği, herhangi X, Y için $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ eşitliği vardır. Burada ω, X, Y de anti-simetriktir ve bu ω yolundaki (1,1)-tipinin bir reel 2- formunu tanımlar [4].

Tanım 2.2.2. M üzerinde g bir Hermitian metrik olmak üzere 2- formu ω kapalı yani $d\omega = 0$ ise g Kâhler metrik ve ω Kâhler formu olarak isimlendirilir [4].

Kapalı $(1,1)$- formu ω bir Kâhler metrik belirleyebilir. ω, $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ anlamında J ile bağdaşık olsun. Bu durumda

$$g(X, Y) = \omega(X, JY)$$

tarafından tanımlanan $(0,2)$-tensör, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Bu nedenle g metriği Kâhlerdir [5].

g nin simetriği $\overline{g_{j\bar{k}}} = g_{k\bar{j}}$ şeklinde gösterilir. g nin pozitif olması $g_{j\bar{k}}$ nin her noktada pozitif tanımlı Hermitian matrisinin var olduğu anlamına gelir. Bağlantılı 2- form için

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

yazılabilir. Her i, j, k için

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial z^j} g_{i\bar{k}}$$

eşitliği yazılabilirse g Kâhlerdir [4].

Örnek 2.2.1. $\omega = \sqrt{-1}\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j$ tarafından belirlenen metrik ile $\mathbb{C}^n$ kompleks manifoldu Kâhlerdir [5].

ω Kâhler formu, kapalı bir reel form olduğundan $H^2(M; \mathbb{R})$ de, $[\omega]$ kohomoloji sınıfı tanımlar. Sabit bir kohomoloji sınıfında Kâhler metrikleri reel değerli fonksiyonlar tarafından parametrelendirilir. Ayrıca bir temel sonuç olarak kompakt bir manifold üzerinde gösterilen $\partial\bar{\partial}$-lemmasıdır [4].

Lemma 2.2.1 ($\partial\bar{\partial}$-lemma). M bir kompakt Kâhler manifold olsun. Eğer ω ve η aynı kohomoloji sınıfında iki reel $(1,1)$- form ise $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon vardır öyle ki

$$\eta = \omega + \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}f$$

tir [4].

Önerme 2.2.1 (Normal Koordinatlar). Eğer g bir Kâhler metrik ise herhangi $p \in M$ noktasında var olan $z^1, \dots, z^n$ holomorfik koordinatlar seçilebilir öyle ki

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

birim matris olmak üzere p noktasında g nin bileşimi,

$$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk}$$

eşitliğini sağlar ve

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0$$

dır [4].

2.3. Holomorfik Doğru Demetleri

Tanım 2.3.1. M bir kompleks manifold olsun. M üzerinde bir holomorfik doğru demeti, $L = \bigcup_{p \in M} L_p$ ayrık birleşimi üzerinde bir kompleks manifoldun yapısı ile birlikte 1- boyutlu kompleks vektör uzayının $\{L_p\}_{p \in M}$ ailesinden oluşur öyle ki $\pi: L \longrightarrow M$ doğal projeksiyon fonksiyonu holomorfiktir. Her $p \in M$ noktası için M de p nin bir U açık komşuluğu vardır. Ayrıca $\mathrm{proj}_1: U \times \mathbb{C} \longrightarrow U$ birinci faktörü üstündeki projeksiyonu olmak üzere $\pi = \mathrm{proj}_1$ projeksiyon fonksiyonu ile değişen ve $p \in U$ için her L_p lifi üzerinde lineer olan $\varphi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}$ bir biholomorfizm vardır [5].

Tanım 2.3.2. $s: M \longrightarrow L$ düzgün kesit olmak üzere kompleks manifoldun bir fonksiyonu olarak holomorfik ise s düzgün kesiti holomorfik olarak adlandırılır. Holomorfik kesitlerin uzayını $H^0(M, L)$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.3.3. L, M üzerinde holomorfik doğru demeti ise her L_p^{-1} lifi, L_p dual vektör uzayı olmak üzere L nin duali, M üzerinde L^{-1} holomorfik doğru demetidir. Eğer $g_{\alpha\beta}$, L için öteleme fonksiyonları ise L^{-1} için öteleme fonksiyonları $g_{\alpha\beta}^{-1}$ ile gösterilir [5].

Örnek 2.3.1. M, n-boyutlu ise holomorfik kotanjant demetin $K_M := \wedge^n \Omega^{1,0} M$ en üst dış kuvveti M nin kanonik demeti olarak adlandırılan M üzerinde holomorfik doğru demetidir. Lokal olarak M üzerinde $(z^1, \dots, z^n)$ kompleks koordinatlar olmak üzere K_M nin aşikarlaştırması $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ tarafından verilir [5].

Tanım 2.3.4. h, L holomorfik doğru demeti üzerinde hermitian metriği h_p, L nin s_1, s_2 lokal düzgün kesitlerinin her çifti için düzgün olan L_p üzerinde bir iç çarpım olmak üzere; hermitian iç çarpımının $\{h_p\}_{p \in M}$ ailesinden oluşur. $p \longmapsto h_p(s_1(p), s_2(p))$ lokal $\mathbb{C}$- değerli fonksiyonu düzgündür. Metriği

$$\langle s_1, s_2 \rangle_h = h(s_1, s_2)$$

şeklinde de yazılır. Ayrıca $\|s\|_h^2 = \langle s, s \rangle_h$ dir [5].

Tanım 2.3.5. M, h hermitian metriği ile holomorfik doğru demeti olsun. (L, h) nin eğriliği**,** L nin lokal sıfır olmayan holomorfik bir s kesiti için

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log\|s\|_h^2$$

lokal ifadesi ile M üzerinde $(1,1)$- formudur [5].

Açıklama 2.3.1. Eğrilik, iyi tanımlıdır. Eğer s', sıfır olmayan başka bir holomorfik kesit ise bir lokal holomorfik f fonksiyonu vardır öyle ki $s' = fs$ dir. Böylece $\|s'\|_h^2 = |f|^2 \|s\|_h^2$ dir. Buradan

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log\|s'\|_h^2 = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log\|s\|_h^2 - \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log f - \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial} \log \bar{f}$$

dir. f holomorfik olduğundan log(f) ve sağ taraftaki ikinci terim sıfırdır. $\bar{f}$, anti- holomorfik olduğundan $\log(\bar{f})$ ve üçüncü terim

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{f} = \sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\bar{f} = 0$$

dır. Böylece

$$-\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log h(s') = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log h(s)$$

dir. Bu da eğriliği s nin sıfır olmayan holomorfik kesitlerinin seçimi bağımsızdır [5].

Tanım 2.3.6. $(X, Y) \longmapsto \alpha(X, JY)$ ile tanımlanan 2- tensör pozitif tanımlı ise M üzerinde α $(1,1)$-formu pozitiftir denir. Negatif $(1,1)$-formu da benzer yolla tanımlanır [5].

Tanım 2.3.7. L holomorfik doğru demeti, pozitif eğrilik formuna karşılık gelen bir hermitian metriğe sahipse L, pozitif olarak adlandırılır. Negatif doğru demeti kavramı benzer şekilde tanımlanır [5].

2.4. Birinci Chern Sınıfı

Tanım 2.4.1. L bir holomorfik doğru demeti olsun. L nin $c_1(L)$ birinci Chern sınıfı, L üzerinde bazı h hermitian metrik ve L nin bazı lokal holomorfik sıfır olmayan s kesiti için

$$\frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|_h^2$$

şeklinde lokal ifadesi ile $(1,1)$-form tarafından belirlenen kohomoloji sınıfıdır [5].

Açıklama 2.4.1. Birinci Chern sınıfı, hermitian metriğin seçimine bağlı değildir. Eğer h', L üzerinde başka bir hermitian metrik ise bazı pozitif lokal λ fonksiyonu için

$$\|s\|_{h'}^2 = \|s\|_h^2$$

dir. Buradan

$$\frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|_{h'}^2 = \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\,\bar{\partial}\log\|s\|_h^2 - \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\,\bar{\partial}\log\lambda$$

hesaplanabilir. Bu eşitlikte ikinci terim $\partial\,\bar{\partial}\log\lambda = (\partial + \bar{\partial})\,\bar{\partial}\log\lambda = d(\bar{\partial}\log\lambda)$ olarak tamdır [5].

Açıklama 2.4.2. $c_1(L)$, integral kohomoloji sınıfıdır. Yani $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ dir. Daha açık yazılırsa birinci Chern sınıfının yorumu aşağıdaki gibidir. M üzerinde demet yapan tam dizisi,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{e} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0$$

şeklinde kohomolojide uzun tam dizisini oluşturur. Birinci homomorfizm,

$$c_1 : H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

biçimindeki onun birinci Chern sınıfı için alınan bir doğru demeti dönüşümüdür. Burada M üzerinde holomorfik doğru demetinin izomorfizm sınıfının grubu ile birlikte $H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ tanımlanır. Bununla c_1,

$$c_1(L \otimes L') \simeq c_1(L) + c_1(L')$$

ve L^*, L nin duali olmak üzere

$$c_1(L^*) = -c_1(L')$$

ifadelerini sağlar [5].

Şimdi Lemma 2.2.1. ($\partial\bar{\partial}$-lemma) nin $c_1(L)$ ile ilgili bir sonuç şöyledir:

Sonuç 2.4.1. Eğer η, $c_1(L)$ kohomoloji sınıfını gösteren bir reel $(1,1)$-formu ise L üzerinde h' metriği vardır öyle ki $2\pi\eta$, h' nün eğriliğidir [5].

Tanım 2.4.2. Eğer $c_1(L)$, pozitif $(1,1)$-formu ile gösterilirse $c_1(L)$ birinci Chern sınıfı pozitiftir denir [5].

Lemma 2.4.1. L bir doğru demetidir ancak ve ancak $c_1(L)$, pozitiftir [5].

Tanım 2.4.3. Bir kompleks manifold M için K_M kanonik demetine dual doğru demetine anti-kanonik demet denir ve K_M^{-1} şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$c_1(M) = c_1(K_M^{-1})$$

kuralı tarafından M nin birinci Chern sınıfı ile tanımlanır [5].

2.5. Kovaryant Türev

(M, ω) bir Kâhler manifoldu olmak üzere farklılaşan tensör alanları için ∇ şeklinde gösterilen Levi- Civita koneksiyonu kullanılır. Burada $\nabla g = \nabla\omega = \nabla J = 0$ durumu sağlanır. $z^1, \dots, z^n$ lokal holomorfik koordinatlar açısından farklı türevleri için

$$\nabla_i = \frac{\nabla\partial}{\partial z^i}, \quad \nabla_{\bar{\imath}} = \frac{\nabla\partial}{\partial \bar{z}^i}, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad \partial_{\bar{\imath}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

eşitlikleri kullanılır. Koneksiyonu

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

tarafından verilen Γ_{jk}^i Christoffel sembolü ile belirlenir. Bu eşitlik aynı zamanda Kâhler şartı

$$\nabla_{\bar{\imath}} \frac{\partial}{\partial z^k} = 0$$

olduğunu göstermek için kullanılabilir [4].

Levi- Civita koneksiyonu simetriktir (serbest torsion). Bu nedenle $\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{kj}$ dir. Herhangi bir T tensörü için $\nabla_{\bar{\imath}} T = \overline{\nabla_{\imath}\overline{T}}$ dir. Tensör alanının kovaryant türevleri, fonksiyonlar üzerinde kovaryant türevler kısmi türevler aynı olduğundan türevler için çarpım kuralını kullanarak hesaplanabilir [4].

Örnek 2.5.1. dz^{k} formunun kovaryant türevlerini bulmak için δ^{k}_{j} birim matris olmak üzere

$$dz^{k}\left(\frac{\partial}{\partial z^{j}}\right) = \delta^{k}_{j}$$

dır.

$$\left(\nabla_{i}\, dz^{k}\right)\frac{\partial}{\partial z^{j}} = -\Gamma^{k}_{ij}$$

hesaplamasından

$$\left(\nabla_{i}\, dz^{k}\right)\frac{\partial}{\partial z^{j}} + dz^{k}\left(\nabla_{i}\frac{\partial}{\partial z^{j}}\right) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\nabla_{i}\, dz^{k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{j}} = 0$$

bulunur. Böylece

$$\nabla_{i}\, dz^{k} = -\sum_{j}\Gamma^{k}_{ij}\, dz^{j}$$

elde edilir [4].

Şimdi tekrarlı indeksler üzerinde toplama anlamına gelen toplama işlemini kullanarak her tekrarlı indeks en üstte ve en altta bir kez görünür. Genellikle $a_{i\bar{j}}$ için $a_{i\bar{j}}\, dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j}$ $(i, j$ üzerinde toplama$)$ şeklinde bir tensör yazılır. Fakat Γ^{i}_{jk} , koordinatların değişimi altında değişmediğinden bir tensör değildir [4].

Örnek 2.5.2. Toplama kuralını kullanarak $a_{i\bar{j}}\, dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j}$ tensörünün kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{p}}\left(a_{i\bar{j}}\, dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j}\right) &= \left(\partial\bar{p}\, a_{i\bar{j}}\right) dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j} + a_{i\bar{j}}\left(\nabla_{\bar{p}}\, dz^{i}\right) \otimes d\bar{z}^{j} + a_{i\bar{j}}\, dz^{i} \otimes \left(\nabla_{\bar{p}} d\bar{z}^{j}\right) \\
&= \left(\partial\bar{p}\, a_{i\bar{j}}\right) dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j} - a_{i\bar{j}}\, dz^{i} \otimes \left(\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{p}\ell}\, d\bar{z}^{\ell}\right) \\
&= \left(\partial\bar{p}\, a_{i\bar{j}} - \Gamma^{\bar{\ell}}_{\bar{p}\bar{j}}\, a_{i\bar{\ell}}\right) dz^{i} \otimes d\bar{z}^{j}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ya da

$$\nabla_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} = \partial \bar{p}\, a_{i\bar{j}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{j}}^{\bar{\ell}}\, a_{i\bar{\ell}}$$

formülü kullanılır. Daha genel tensörler için benzer formüller kolaylıkla elde edilebilir [4].

Lemma 2.5.1. $g_{j\bar{k}}$ metriği açısından Christoffel sembolü $g^{i\bar{\ell}}$, $g_{i\bar{\ell}}$ nün ters matrisi olmak üzere

$$\Gamma_{jk}^{i} = g^{i\bar{\ell}}\, \partial_i\, g_{k\bar{\ell}}$$

dir [4].

2.6. Eğrilikler
Kovaryant türevlerde genellikle değişme özelliği yoktur. Değişme özelliğinin olmaması eğrilik tarafından ölçülür. Eğriliği, örnek olarak $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = g_{p\bar{j}}\, R_{i\,k\bar{\ell}}^{p}$ (indeksin durumu önemlidir) metriği kullanılan artacak veya daha azalacak olan $R_{i\,k\bar{\ell}}^{j}$ 4- tensörüdür [4].

∇_k, ∇_ℓ ile, $\nabla_{\bar{k}}$, $\nabla_{\bar{\ell}}$ ile değişirken eğriliği

$$(\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k)\, \frac{\partial}{\partial z^i} = R_{i\,k\bar{\ell}}^{j}\, \frac{\partial}{\partial z^j}$$

tarafından tanımlanır. Christoffel sembolü açısından

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = -\,\partial_k\, \partial_{\bar{\ell}}\, g_{i\bar{j}} + g^{p\bar{q}} \left(\partial_k\, g_{i\bar{j}}\right)\left(\partial_{\bar{\ell}}\, g_{p\bar{j}}\right)$$

metriğini bulunduğundan

$$R_{i\,k\bar{\ell}}^{j} = -\,\partial_{\bar{\ell}}\, \Gamma_{ki}^{j}$$

eşitliğini hesaplanabilir [4].

Eğrilik çeşitli tanımları sağlar. Ricci eğriliği, daralması için

$$R_{i\bar{j}} = g^{k\bar{\ell}}\, R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}$$

ve skalar eğrilik

$$R = g^{i\bar{j}}\, R_{i\bar{j}}$$

olarak tanımlanır [4].

Lemma 2.6.1. Lokal koordinatlarda Ricci eğriliği,

$$R_{i\bar{j}} = -\,\partial_i\, \partial_{\bar{j}} \log \det\left(g_{p\bar{q}}\right)$$

dir [4].

(M, g), n boyutlu bir Kâhler manifold olsun. g, $\mathrm{T}^{1,0}\mathrm{M}$ holomorfik tanjant demeti üzerinde bir metrik olmak üzere $\mathrm{K}_{\mathrm{M}}^{-1} = \Lambda^{\mathrm{n}}\mathrm{T}^{1,0}\mathrm{M}$ anti-kanonik demet üzerinde $\det(\mathrm{g})$ bir metrik olarak elde edilir [5].

Tanım 2.6.1. (M, g) nin Ricci eğriliği, $\mathrm{K}_{\mathrm{M}}^{-1}$ üzerinde $\det(\mathrm{g})$ nin eğriliğidir ve

$$\mathrm{Ric}\ (\mathrm{g}) = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\det(\mathrm{g})$$

şeklinde ifade edilir [5].

Başka bir deyişle Ric (ω) Ricci formu, lokal koordinatlarda kapalı reel $(1,1)$- form olan

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}\ (\omega) &= \sqrt{-1}\,\mathrm{R}_{\mathrm{i}\bar{\mathrm{j}}}\,\mathrm{dz}^{\mathrm{i}} \wedge \mathrm{d}\bar{\mathrm{z}}^{\mathrm{j}} \\ &= -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\det(\mathrm{g})\end{aligned}$$

ile tanımlanır [4].

Eğer M üzerinde ω Kâhler formu verilirse g, uygun Kâhler metriği olmak üzere Ric (g) gösterimi yerine Ric (ω) yazılabilir [5].

Eğer h, M üzerinde başka bir Kâhler metrik ise

$$\frac{\det(\mathrm{h})}{\det(\mathrm{g})}$$

genel olarak tanımlanan fonksiyondur. Böylece Ricci formlarının farkı

$$\mathrm{Ric}\ (\mathrm{h}) - \mathrm{Ric}\ (\mathrm{g}) = -\sqrt{-1}\,\partial\,\bar{\partial}\log\frac{\det(\mathrm{h})}{\det(\mathrm{g})}$$

tam formudur. Buradan $[\mathrm{Ric}\ (\mathrm{g})]$ kohomoloji sınıfı, Kâhler metrik seçiminden bağımsızdır. M nin birinci Chern sınıfı

$$\mathrm{c}_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}\ (\mathrm{g})] \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{R})$$

kohomoloji sınıfı olarak tanımlanır. $\mathrm{c}_1(\mathrm{M})$ bu normalleştirme ile bir integral kohomoloji sınıfıdır [4].

Kâhler manifoldunun Ricci eğriliği hakkında temel sonucu Calabi varsayımının Yau çözümüdür [4].

Teorem 2.6.1 (Calabi-Yau Teoremi). (M, ω) bir kompakt Kâhler manifold ve α, $\mathrm{c}_1(\mathrm{M})$ temsil eden bir reel $(1,1)$-formu olsun. $[\eta] = [\omega]$ ile birlikte M üzerinde bir tek η Kâhler metriği vardır öyle ki

$$\mathrm{Ric}\ (\eta) = 2\pi\alpha$$

dır [4].

Sonuç 2.6.1. Eğer özellikle $c_1(M) = 0$ ise her Kâhler sınıfı, bir tek Ricci flat metrik içerir [4].

Sıfır birinci Chern sınıfına sahip bir Kâhler manifoldu, Calabi-Yau manifoldu olarak adlandırılır [6].

Teorem 2.6.2. M, k Gauss eğriliği ile birlikte kompakt bir Riemann yüzeyi ve ϕ hacim formu olmak üzere

$$\mathrm{Ric} = k.\phi$$

dir [5].

Tanım 2.6.2. Eğer bir (M, ω) bir Kâhler manifold, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

ise Kâhler- Einstein'dır denilir ve buradaki λ sabitine de Einstein sabiti denir [5].

Başka bir ifadeyle Kâhler metriğinin, Kâhler Einstein metrik olması için gerek ve yeter koşul Kâhler Einstein metriğinin Ricci formu, Kâhler metriğinin sabit bir katıdır [7].

Kompleks bir manifold üzerinde bir Kâhler- Einstein metriği, bir Riemann metriğidir. Ayrıca bu metrik hem Kâhler metriği hem de Einstein metriğidir.

ω Kâhler metriği ile verilen $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ ifadesinde λ nın işaret durumu önemlidir. Burada $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ olmak üzere

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \omega, \qquad \mathrm{Ric}(\omega) = 0, \qquad \mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$$

şeklinde 3 farklı durumu bulunur. Bir Kâhler metriğinin Ricci formu, M üzerinde ω Kâhler metriğinden bağımsız olduğu

$$c_1(M) = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(\omega)]$$

şeklinde birinci Chern sınıfı denilen bir karakteristik sınıfı tanımlar. λ nın işaret durumuna göre birinci Chern sınıfının işaret durumu belirlenir. Birinci Chern sınıfı λ ile aynı işaretlere sahiptir [4].

M bir Kâhler manifoldu ve M üzerinde bir Kâhler- Einstein metriği bulmak için ya $c_1(M) < 0$ ya $c_1(M) = 0$ ya da $c_1(M) > 0$ olmalıdır [4], [8].

Bu durumlar şöyle gösterilir:

1) $c_1(M) < 0$ için Aubin ve Yau birbirinden bağımsız olarak Kâhler- Einstein metriğinin varlığını ispatlamışlardır [9].

$c_1(M) < 0$ durumu ile ilgili bazı teoremler:

Teorem 2.6.3 (Aubin- Yau Teoremi). $c_1(M) < 0$ sınıfına sahip kompakt bir Kâhler manifoldu M, $\lambda = -1$ Einstein sabitine sahip tek bir Kâhler Einstein metriği vardır [9].

Teorem 2.6.4. Negatif birinci Chern sınıfı ile birlikte kompakt bir Kâhler manifoldu M olsun.

$$\omega \in -2\pi c_1(M)$$

bir tek Kâhler metrik vardır öyle ki $\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$ dır [4].

Teorem 2.6.5. M, $c_1(M) < 0$ sınıfı ile birlikte bir kompakt Kâhler manifoldu ise negatif skalar eğriliğe sahip bir Kâhler- Einstein metrik vardır. Bu metrik ölçeklemeye kadar tektir [7].

2) $c_1(M) > 0$ için herhangi bir Kâhler sınıfındaki Kâhler- Einstein metriğinin varlığını ispatlamaya çalışan Calabi' nin varsayımı, Yau tarafından çözüldü [8], [10].

Tanım 2.6.7. Pozitif birinci Chern sınıfına sahip Kâhler manifoldu Fano manifoldu olarak adlandırılır [11].

Fano manifoldları üzerinde genellikle Kâhler- Einstein metrikleri var olmazlar. Bunun nedeni Futaki invaryantıdır [12].

3) $c_1(M) = 0$ için $\mathrm{Ric}(\omega) = 0$ dır. Bu durumda Kâhler- Einstein metrikleri bulunabilir [8].

Tanım 2.6.3. Sıfır Ricci eğriliğine sahip Kahler- Einstein metrikleri Calabi- Yau metrikleri olarak adlandırılır [8].

Calabi- Yau metrikleri sicim kuramında büyük rol oynar [8].

3. POZİTİF BİRİNCİ CHERN SINIFI

Birinci Chern sınıflarının negatif ve sıfır oluğu durumda Kâhler-Einstein metriğin bulunabildiğini önceki bölümde belirtilmiştir. Fakat birinci Chern sınıfı pozitif olduğunda Kâhler- Einstein metrik bulunabilmesi için gerekli sınırlandırmalardan bahsedilecektir.

Bu bölümde holomorfik vektör alanı terimini, $L_\nu J = 0$ için TM tanjant demetin bir kesiti anlamında kullanılmaktadır. Bu şekilde verilen bir vektör alanı, genel anlamda $\nu^{(1,0)}$, $T^{1,0}M$ nin holomorfik kesitidir. Benzer şekilde verilen $T^{1,0}M$ nin bir holomorfik kesiti, onun reel kısmı ν, $L_\nu J = 0$ özelliğine sahiptir [6].

Teorem 3.1. Pozitif birinci Chern sınıfına sahip herhangi M kompakt Kâhler manifoldu için otomorfizmlerine kadar

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

eşitliğini sağlayan en çok bir metrik vardır [13].

Tanım 3.1. M kompakt bir Kâhler manifold ve $\eta(M)$, M nin holomorfik vektör alanlarının uzayı olsun. ω, $[\omega] = \Omega$ ya sahip bir Kâhler metriği olmak üzere herhangi bir Kâhler sınıfı Ω ve $\nu \in \eta(M)$ için Futaki invaryantı,

$$f_{M,\Omega}: \eta(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\nu \longmapsto f_{M,\Omega}(\nu) = \int_M \nu(h)\, \omega^n$$

ile tanımlanan $\eta(M)$ nin bir $f_{M,\Omega}$ karakteridir [14].

$s(\omega)$, ω nın skalar eğriliği ve μ de skalar eğriliğin

$$\mu = \frac{c_1(M).\Omega^{n-1}([M])}{\Omega([M])}$$

şeklindeki ortalaması olmak üzere h,

$$s(\omega) - \mu = \Delta_\omega$$

ile belirtilir ve buradan

$$\int_M \left(e^h - 1\right) \omega^n = 0$$

dir [14].

Sonuç 3.1. M, sabit skalar eğriliğe ve $[\omega] = \Omega$ ya sahip bir Kâhler metriği kabul ederse $f_{M,\Omega} \equiv 0$ dır [14].

Teorem 3.2. $f_{M,\Omega}$ Futaki invaryantı, ω nın seçimine bağlı değildir [6].

Lemma 3.1. Eğer $\vartheta, \nu \in \eta(M)$ ise $f_{M,\Omega}([\vartheta, \nu]) = 0$ dır. Başka bir deyişle $f_{M,\Omega}$, $\eta(M)$ nin bir karakteridir [6].

Eğer M bir Fano manifold ise $\Omega = 2\pi c_1(M)$ ve kolaylık olması açısından $f_{M,\Omega}$ yerine f_M yazılabilir. Sadece Futaki invaryantı $f_M \equiv 0$ ise M bir Kâhler-Einstein metriğine sahiptir. Futaki invaryantı sıfır olmayan Fano manifoldu örnekleri vardır ve bunlar Kâhler-Einstein metriği kabul etmezler [14].

Teorem 3.3. $c_1(M) > 0$ a sahip bir kompleks M yüzeyi bir Kâhler-Einstein metriğine sahiptir ancak ve ancak M nin Futaki invaryantı sıfırdır [15].

Tanım 3.2. M, $n-$ boyutlu kompakt kompleks manifold olsun. $\mathrm{Oto}(M)$ kompleks Lie grubu, M nin tüm biholomorfik otomorfizlerinden oluşur. Onun Lie cebiri olan $\eta(M)$, M üzerindeki tüm holomorfik vektör alanlarından oluşur [16].

Eğer $\eta(M)$, $\mathrm{Oto}(M)$ nin kompakt alt grubunun Lie cebirinin kompleksleşmişi ise $\eta(M)$ redüktiftir [16].

Teorem 3.4. M, bir Kâhler-Einstein metriğine sahiptir ancak ve ancak M üzerinde holomorfik vektör alanının Lie cebiri, redüktif (bir kompakt reel alt cebirin kompleksleşmişi) tir [14], [15].

Örnek olarak $c_1(M) > 0$ a sahip 3- boyutlu M Kâhler manifoldunda $\eta(M)$ redüktiftir ve $f_M \neq 0$ dır. Bu durumda M, herhangi bir Kâhler-Einstein metriğini kabul etmez [17].

Teorem 3.5. M, $\eta(M) = \{0\}$ a sahip ve Kâhler-Einstein metrik kabul eden bir Fano manifold ise M, K-kararlıdır [14], [18].

Sabit skalar eğrilikli Kâhler metriği, skalar eğriliği sabit olan bir kompleks manifold üzerinde bir Kâhler metriktir. Özel bir durumu, Kâhler-Einstein metrikleri ve daha genel durumu ise extremal Kâhler metrikleridir.

Teorem 3.6. Eğer M, sabit skalar eğriliğe sahip bir Kâhler-Einstein metriğe sahip ise $\eta(M)$, reductivedir [19].

Teorem 3.7. Eğer M, sabit skalar eğrilikli Kâhler-Einstein metriğe sahip ise $f_M \equiv 0$ dır [20].

Teorem 3.8. M, $[\omega] = 2\pi c_1(L)$ iken sabit skalar eğrilikli bir ω Kâhler metriği ve $\eta(M) = \{0\}$ eşitliği var ise (M, L), K-kararlıdır [14], [21].

KAYNAKÇA

[1] Pragacz, P., (2012), Characteristic Classes with Applications yo Geometry, Topology and Number Theory, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Poland.

[2] Ozan, Y., (2016), Türevlenebilir Manifoldlara Giriş, ODTÜ, Ankara.

[3] Hatcher, A., (2002), Algebraic Topology, Cambridge University Press, England.

[4] Szekelyhidi, G., (2013), Introduction to Extremal metrics Preliminary Version.

[5] Faulk, M., (2016), First Chern Classes of Kahler Manifolds, Columbia University, New York.

[6] Fine, J., (2012), A rapid introduction to Kähler geometry, Chapter 2: Holomorphic line bundles, preprints, Université Libre de Bruxelles, Belgique.

[7] Santoro, B., (2009), Introduction to Evolution Equations in Geometry, Nacional de Matematica Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.

[8] Li, C., (2012), Kahler-Einstein Metrics and K-Stability, PhD thesis, Princeton University.

[9] Moroianu, A., (2007), Lectures on Kahler Geometry, Cambridge University Press, Paris.

[10] Tian, G., (2000), Kahler-Einstein Manifolds of Positive Scalar Curvature, İnternational Press.

[11] Wang, X. J., Zhu, X., (2004), Kahler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, Advances in Mathematics 188, 87-103.

[12] Spotti, C., (2016), Compact moduli spaces of Kahler-Einstein Fano varieties, Cambridge of University, England.

[13] Bando, S., Mabuchi, T., (1987), Uniqueness of Einstein Kahler metrics modulo connected group actions, Algebraic Geometry, Adv. Studies in Pure Math., 10.

[14] Tian, G., (2014), Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds, Japanese Journal of Mathematics, Volume 10, Issue 1, pp 1–41.

[15] Tian, G., (1990), Kahler-Einstein on algebraic manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II ,587-598, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[16] Tsuboi, K., (2009), On the existence of Kahler metrics of constant scalar curvature, Tohoku Math. J., vol. 61(2), 241-252.

[17] Tian, G., (1991), Lectures on Einstein Manifolds: Kahler-Einstein Manifolds and Positive Scalar Curvature, Mathematics Subject Classification. Primary 53C20, İnternational Press.

[18] Tian, G., (1997), Kahler-Einstein metrics with positive scalar curvature. Invent. Math., 130, 1-39.

[19] Matsushima, Y., (1957), Sur la structure du group homeomorphismes analytiques d'une certain variete, Kaehlerienne, Nagoya Math. J., 11, 145-150.

[20] Futaki, A., (1983), An obstruction to the existence of Kahler-Einstein metrics, Inv. Math., 73, 437-443.

[21] Stoppa, J., (2009), K-stability of constant scalar curvature Kahler manifolds. Adv. in Math., 221, 1397-1408.

[22] Yetim, C., (2018), Kahler-Einstein Metrik Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, 70s.