

On Linear Algebra Education

Sinan AYDIN
Yüzüncü Yıl University, Faculty of Education

Abstract

Linear algebra is a basic course followed in mathematics, science, and engineering university departments. Generally, this course is taken in either the first or second year but there have been difficulties in teaching and learning. This type of active algebra has resulted in an increase in research by mathematics education researchers. But there is insufficient information on this subject in Turkish and therefore it has not been given any educational status. This paper aims to give a general overview of this subject in teaching and learning. These education studies can be considered quadruple: a) the history of linear algebra, b) formalism obstacles of linear algebra and cognitive flexibility to improve teaching and learning, c) the relation between linear algebra and geometry, d) using technology in the teaching and learning linear algebra. Mathematics education researchers cannot provide an absolute solution to overcome the teaching and learning difficulties of linear algebra. Epistemological analyses and experimental teaching have shown the learning difficulties. Given these results, further advice and assistance can be offered locally.

Keywords: *Linear algebra, formalism, cognitive flexibility, geometry, technology, vector space, representation*

SUMMARY

Linear algebra is an abstract area of mathematics which had been taught at master and graduate level up to 1960s. Since then it has appeared at undergraduate level. Educational researches were conducted first on calculus and have focused on elementary linear algebra in last twenty years (Dorier, 1995). These studies can be separated into three groups: a) historical analysis which are made to determine some special reasons of students' learning difficulties and to develop new educational programs, b) cognitive flexibility studies for stabilization of using geometry in linear algebra and for understanding of formal aspect of linear algebra, c) the effective using of geometry in linear algebra, d) evaluation of teaching linear algebra in which software is used.

Linear algebra students, sometimes, can feel that they walk on another plane out of this plane because of the conceptual structures of linear algebra. On the other hand, according to teachers, the problem is the inability of their students to understand abstract concepts that they themselves consider to be so simple (Duval, 2000). They see students' lack of knowledge on geometry, logic, set and function concepts as the reason of problem. Some experiments which involve using geometry, logic and function prior to the linear algebra course have not given the expected results (Dorier, 2000).

Purpose of the Study

The aim of this study is to give a general overview about the current situation by investigating the studies that have been made in teaching and learning linear algebra.

History of Linear Algebra

Matrices are first introduced by Sylvester (1848) and Cayley (1858) (Dorier, 2000c). Perron's textbook (1927) is known as the first linear algebra book. Also Van der Waerden's textbook (1936), "Algebra", is one of the first publications. Linear algebra is included in short chapters in both of these two-volume sets. Halmos' "Finite-Dimensional Vector Space" (1958), first published in 1942 and later in 1952, is an early and widely used textbook at master and graduate level in the US. In the 1970s, linear algebra takes place in undergraduate level at universities. "Matrices and Linear Algebra", published in 1968, is the first linear algebra textbook at the elementary level (Barker and Scheider, 1968). From the 1970s to nowadays, hundreds of elementary linear algebra textbooks have been published (Anton, 1973; Lay, 1994; Taşçı, 2001 and Uhlig, 2002).

Formalism and Linear Algebra

Formalism is a philosophical approach emerged among mathematicians in the middle of twentieth century. According to a modern formalist, mathematics is a game starting with arithmetic. A formalist defines mathematics as an absolute science of proof. In mathematics, one either has a proof or not. When one reaches to conclusions of proofs, mathematics is done. The level of success is evaluated with the number of proof. Whether the others have comprehended it or not, is not a mathematical concern. (Davis and Hersh, 1996).

Some diagnostic studies were conducted to find an answer to what some authors have defined as 'the obstacle of formalism' (Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, 2000a-b-c; Dorier, 1998; Robert 2000 and Rogalski, 1996). The main point of these studies which Dorier called 'meta level activities' is that linear algebra students have to use their previous knowledge and have to relate them with new formal concepts in linear algebra. In this point somebody may think that in order to teach linear algebra, one way would be to give up showing the formal theory of linear algebra. But, it is vital that students starting mathematics departments of universities need to have some idea about the formal concepts and axiomatic algebraic structures of which linear algebra is one of the most important.

Hillel (2000) classified three basis languages used in a linear algebra course; a) the abstract language of the general abstract theory, b) the algebraic language of the R^n theory, c) the geometric language of the two- and three- dimensional spaces. Duval (2000) defines semiotic representations as activities made by the use of signs belonging to a system of representation that has its special constraints of meaning. He thinks that using of semiotic representations is necessary in mathematics, because the objects of

mathematics cannot be directly understood and need to be represented. According to Hillel and Sierpiska (1994), a linear algebra course which is operated theoretically rather than computationally requires a level of abstract thinking. The difficulty of thinking at abstract level leads some students to try to produce a written text formally similar to the textbook or the lecture, but without understanding the meaning of the symbols. The research team (Sierpiska, Dreyfus ve Hillel, 1999) called this situation as “rote learning” and they designed an entry into linear algebra that would make this wrong learning method less likely for students.

A Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra

Uhlig (2003) developed the philosophical and pedagogical background for teaching an elementary Linear Algebra course. This approach is different from the general linear algebra teaching method that a linear algebra course should start concrete, practical and examples progress to the general concepts and theorems. According to Uhlig, Teaching Linear Algebra can be developed by finding a balance between the parts of the following diagram (Figure 1):

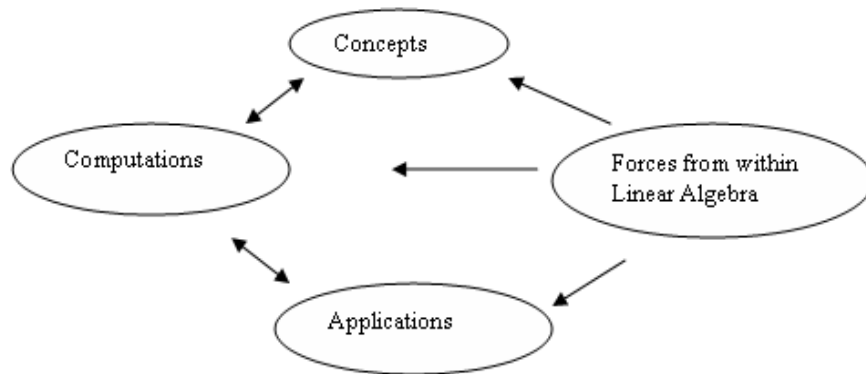


Figure 1. A Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra

The Level of Benefiting Geometry in Linear Algebra Course

Geometry is limited to three dimensions and therefore benefiting from geometry will be in a constructed perspective. Chartier (2000) analyzed an epistemological study of the connection between geometry and linear algebra using the evidence from the historical and modern linear algebra texts.

Technology and Linear Algebra

The benefiting from technology in mathematics at the collegiate level has been widespread. Some researchers clearly say that it effects and improves both student achievement and attitudes (Herrero, 2000; Sierpinska at all, 1999). Jean at al, (1994), stressed that the use of technological materials provided the students to improve their mathematical skills by directing them to focus on understanding the concepts. Students reach a higher level of achievement and an increase in positive attitudes when they are taught using technology (Quesada and Maxwell, 1994; Guckin and Morrison, 1991; Stiff et al., 1992). It is an important question for some researchers studying on linear algebra that how to incorporate computing effectively, how we will teach and how the students will learn (Carlson, Johnson, Lay, Porter, 1993; Dorier, 2002; Uhlig, 2003). Today, there are two main technological materials that we can use in our linear algebra teaching. These are mathematical software and web sites for teaching and learning.

CONCLUSIONS & DISCUSSIONS

Researches on teaching and learning linear algebra are not a manner to overcome all difficulties as all the other fields. The conducted studies have offered local remedies but, these works led to new questions (Rogalski, Robinet, Robert ve Dorier, 2000b). It is a fact that there is not a teaching and learning model which can solve the all problems. It will facilitate finding better learning and teaching methods when the researchers keep doing educational studies about linear algebra, which is the one of two basic areas of mathematics and known since the beginning of the abstract theory. Finally we can suggest that:

- a) The number of Turkish linear algebra textbooks is not sufficient. This number can be increased by translating from foreign literature or writing original works.
- b) More educational studies on the teaching and learning linear algebra should be done in our country.
- c) Many articles and books about teaching and learning linear algebra printed in the US, Canada and France should be translated in Turkish.

Lineer Cebir Eğitimi Üzerine

Sinan AYDIN

Yüzüncü Yıl University, Faculty of Education

Özet

Lineer cebir üniversitelerin fen, matematik ve mühendislik alanlarında okutulan temel bir matematik dersidir. Genelde bölümlerin bir veya ikinci sınıflarında verilen bu dersin öğretilmesi ve öğrenilmesinde zaman zaman zorluklar yaşanabilmektedir. Lineer cebir'in kullanım ve uygulama alanının geniş olması matematik eğitimi çalışanları üzerinde bu alanda çok sayıda çalışma yapmaları için etkili olmuştur. Ancak ülkemizde bu dersin eğitimsel yönü üzerinde hemen hemen hiç bir çalışma yapılmadığı gibi Türkçe ders kitabı olarak yazılmış veya Türkçeye çevrilmiş kaynak sayısının çok az veya yetersiz olduğu söylenebilir. Bu çalışmada, lineer cebir öğretimi ve öğrenimi üzerine yapılmış çalışmaların incelenmesiyle bir genel durum tespiti yapılmaya çalışılmıştır. Lineer cebir üzerinde yapılan eğitim çalışmaları; a) lineer cebir tarihi, b) lineer cebirdeki formalizm sorunu ve lineer cebir'in daha iyi öğretilmesi ve öğrenilmesi için bilişsel esneklik olarak adlandırılan çalışmalar, c) lineer cebir – geometri ilişkisi, d) lineer cebir öğretimi ve öğreniminde teknoloji kullanımı başlıkları altında gruplandırılabilir. Matematik eğitimi çalışmaları, lineer cebir öğretimi ve öğreniminin bütün zorluklarının üstesinden gelebilmek için mucizevi bir türden çözüm getiremez. Bu çalışmalar bazen yeni sorulara, problemlere ve zorluklara yol açmakla birlikte, öğrencilerin öğrenme zorluklarına epistemolojik analizlerle ve deneysel öğretimlerle kısmi çözümler getirmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Lineer Cebir, formalizm, bilişsel esneklik, geometri, teknoloji, vektör uzayı, temsil*

Lineer cebir, 1960'lara kadar üniversitelerde mastır ve doktora düzeyinde ve bu yıllardan sonra lisans düzeyinde de öğretilen matematiğin soyut ağırlıklı bir alanıdır. Lineer cebir matematik ve fen ağırlıklı öğretim programlarının analizle (calculus) birlikte iki temel derisini oluşturur. Eğitim araştırma çalışmaları ilk önce analiz üzerine başlamış ve son yirmi yılda da lineer cebir öğrenimi ve öğretimi üzerine yoğunlaşmıştır (Dorier, 1995). Bu çalışmalar: a) öğrencilerin öğrenme zorluklarının bazı sebeplerini ortaya çıkarmak ve yeni programlar geliştirmek için yapılan tarihsel incelemeler, b) lineer cebirde geometri kullanımını dengelemeyi amaçlayan ve lineer cebir'in formal yapısı gibi konular üzerinde yapılan bilişsel esneklik (cognitive flexibility) araştırmaları, c) yazılım programları ile yapılan lineer cebir öğretiminin değerlendirilmesi olarak gruplandırılabilir.

Lineer cebir dersini öğrenen öğrenciler, bu dersin yapısı ve kavramları itibariyle zaman zaman kendilerini bu alemin dışında başka bir dünyada hissedebilirler. Daha önce duymadıkları birçok yeni tanım ve kavramları ard arda öğrenmek onlara sıkıcı gelebilir. Bu yönüyle öğrenciler için lineer cebir dersi, analiz ve geometri gibi temel derslerden farklı konumdadır. Lineer cebir dersi öğretmenlerine göre ise sorun, basit olarak gördükleri kavramları öğrencilerin anlamada zayıf ve yetersiz kalmalarıdır (Duval, 2000). Öğrencilerin geometri, mantık, küme ve fonksiyon kavramlarındaki bilgi

eksikliğini de problemin nedeni olarak görürler. Bu sorunu gidermek için lineer cebir dersine geometri, mantık ve küme teorisiyle başlama şeklinde yapılan öğretim denemeleri tam anlamıyla beklenen sonucu vermediler (Dorier, 2000). Bu çalışmanın amacı, son gelişmeleri de dikkate alarak bu alanda yapılan eğitim çalışmalarını genel hatlarıyla değerlendirmektir.

Lineer Cebir Tarihi

Matris ve matris cebir'i kapsamlı bir şekilde ilk olarak Sylvester (1848) ve Cayley (1858) tarafından tanıtılmaktadır (Dorier, 2000c). Fakat matrislerin yaygın kullanımını 20.y.y.'ın başlarında olmuştur. O.Perron' un iki ciltlik "Algebra (cebir)" adlı eserinin birinci cildi ilk lineer cebir kitabı olarak bilinir (Peron, 1927). Ayrıca B.L.Vander Waerden'e ait 1936 da basılan iki ciltlik "Algebra"nın ikinci cildi yine ilkler arasında anılmaktadır (Waerden, 1936). P.R. Halmos'un ilk olarak 1942 ve daha sonra 1958 de tekrar basılan "Finite-Dimensional Vector Space (Sonlu boyutlu vektör uzayları)" adlı kitabı Amerika da mastır ve doktora düzeyinde okutulan zamanın yaygın kullanılan lineer cebir kitabıdır (Halmos, 1958). İçerik olarak somut hesaplamalara ve uygulamalara yer vermeyen oldukça soyut sayılabilecek bir formatta hazırlanmıştır. 1970'lerde lineer cebir, üniversitelerin lisans programlarında yer almaya başlamıştır.1968' de basılan "Matrices and Linear Algebra (Matrisler ve Lineer cebir)" adlı kitap elementer düzeydeki ilk lineer cebir ders kitabıdır (Barker ve Schneider, 1968). 1970'lerden günümüze yüzlerce elementer düzeyde lineer cebir kitabı yazılmıştır ve artık günümüzde her yıl basılan lineer cebir kitapları bir kişi tarafından takip edilemeyecek kadar çoktur (Anton, 1973; Lay, 1994; Taşçı, 2001 ve Uhlig, 2002).

Formalizm ve Lineer Cebir

Formalizm, yirminci y.y.'nin ortalarında matematikçilerde görülen felsefi bir yaklaşımdır. Çağdaş bir formaliste göre matematik aritmetikle başlayan sadece bir çıkarsama oyunudur. Bir formalist matematiği kesin bir ispat bilimi olarak tanımlar. Matematikte elinizde ya ispat vardır ya da hiçbir şey yoktur. Her matematiksel ispatın bir başlangıç noktası olmalıdır. Bundan dolayı matematikçinin başlangıç noktası, bazı bulunmamış terimler ve bu terimlere ait bazı ispatlanmamış ifadelerdir. Örneğin, düzlem geometrisinde "nokta" ve "doğru" gibi tanımlanmamış terimler ve "iki noktadan tek bir doğru geçer" aksiyomu vardır. Bir formalist bu ifadenin mantıksal anlamının ona atfedilen zihinsel resme bağlı olmadığına dikkat çeker. Bu ifade "iki farklı bipten tek bir nıp geçer" de olabilir. Formalist bakış açısıyla, varsayılanı ortaya atıp ispat yapmaya başlamadıkça matematik yapmaya başlanılmamıştır. Sonuçlara ulaşıldığında matematik biter. Başarının ölçüsü ne kadar ispat yapıldığıyla ölçülür. Başkalarının bunu anlayıp anlamadığı matematiksel bir sorun değildir (Davis ve Hersh, 1996).

Öğrencilerin lineer cebir'in formal yapısını anlamada yaşadıkları zorluklar, yalnızca formalizmle ilgili genel bir problem değil, daha çok formalizmin lineer cebir içinde özel kullanımının anlaşılmasıyla ilgilidir. Hemen hemen bütün öğrenci nesillerinde ve her çeşit öğretim modelinde ciddi bir problem olarak ortaya çıkan ve

“formalizm sorunu” olarak adlandırılan (Dorier, Robert, Robinet ve Rogalski, 2000 a) bu konu üzerinde çeşitli teşhis edici çalışmalar yapılmıştır (Dorier, 1998 ve Rogalski, 1996). Lineer cebir’in formal teorisini öğretmekten vazgeçmek bu sorun için bir çözüm olarak görülebilir. Bununla birlikte, üniversitelerin fen ve matematik ağırlıklı programlarında okuyan öğrenciler lineer cebir’in en önemlilerinden birisi olduğu aksiyomatik cebirsel yapılar hakkında temel bilgilere sahip olmalıdırlar. Lineer cebirdeki formal yapının anlaşılması için öğretim modellerinin geliştirildiği ve bazı aktiviteleri de içeren çalışmalar yapılmıştır (Dorier, 1995; Dorier, Robert, Robinet ve Rogalski, 2000b-c ve Robert, 2000). Dorier ve arkadaşlarının “meta level activities” olarak adlandırdıkları bu çalışmaların temel hareket noktası, öğrencilerin lineer cebir dersini öğrenmeye başlamadan önceki bilgilerini bu ders içinde kullanabilmeleri ve lineer cebir kavramlarını öğrenmede yeterli düzeye gelebilmeleri için belirli öğretim metotlarının kullanılmasının gerekli görülmesidir.

Lineer cebir öğrenmedeki temel zorluklardan bir tanesi de, lineer cebirde kullanılan dillerin çeşitliliği ve temsilin semiyotik ifadesi ile ilgilidir. Böyle bir durumda, öğrencilerin bir kavramın farklı şekillerde temsillerini birbirinden ayırt edebilmeleri gerekmektedir. Ayrıca, bir kavramı öğrenebilmeleri için bu kavramın farklı formları arasında birinden diğerine geçiş yapabilmelidirler. Bütün bu yetenekler “bilişsel esneklik (cognitive flexibility)” olarak adlandırılan bir bakış açısı çerçevesinde düzenlenebilir.

Lineer cebirde kullanılan diller, Hillel tarafından üç temel bölüme ayrılmıştır (Hillel, 2000); a) genel soyut teorisinin “soyut dili”, b) R^n teorisinin “cebirsel dili”, c) iki ve üç boyutlu uzayların “geometrik dili”. Ders esnasında öğrencilerini açık bir şekilde uyarmaksızın bir dilden diğerine geçen bir öğretmenin, temsillerin öğrenciler için bir sorun olduğunun farkında olmadığı söylenebilir. Ve öğrencilerin en çok karıştırdıkları ya da anlayamadıkları durum, R^n uzayında çalışırken soyut temsilden cebirsel temsile geçiştir. Örneğin, R^n uzayında her hangi bir tabandaki bir n-bileşenli vektörün başka bir tabanda başka bir n-bileşenli olarak ifade edilmesi gibi;

V bir F -uzay. β_1, β_2 V 'nin farklı iki tabanları ve $v \in V$ olmak üzere,

$$[v]_{\beta_1} = [T]_{\beta_1, \beta_2} [v]_{\beta_2}$$

dir. Burada $[v]_{\beta_1}$ ve $[v]_{\beta_2}$ sırasıyla v vektörünün β_1 ve β_2 tabanlarındaki koordinat vektörleri ve $[T]_{\beta_1, \beta_2}$ V 'nin β_1 tabanından β_2 tabanına geçiş matrisidir (Taşçı, 2001). Bu karışıklık, öğrencilerin bir tabana bağlı olarak bir matrisle ifade edilen bir lineer dönüşüm üzerinde çalışırken sürekli hata yapmalarına neden olmuştur (Hillel ve Sierpinska, 1994).

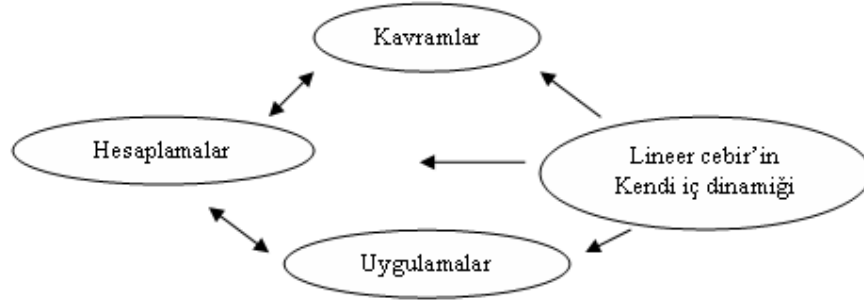
Duval semiyotik temsilleri, kendi özel anlam ve işlev sınırlarına sahip, özel bir temsil sistemine ait işaret ve simgelerin kullanılmasıyla yapılan işler (ürünler) olarak tanımlar. Duval’a göre matematik çalışmalarında semiyotik temsiller mutlaka gereklidir. Çünkü matematiğin nesnelere direkt olarak algılanamayabilir dolayısıyla temsil edilmeleri gerekmektedir. Ayrıca semiyotik temsiller, bilgi üretmek için gerekli oldukları kadar zihinsel temsillerin geliştirilmesi ve çeşitli bilişsel fonksiyonların

başarılması için de esaslı bir rol oynarlar. Burada vektörlerin üç farklı semiyotik ifadesi yapıldı; a- grafiksel temsil (oklarla) , b- tablo temsili (koordinatlardan oluşan kolonlar), c- sembolik temsil (vektör uzaylarının aksiyomatik ifadesi). Bir kavramın farklı semiyotik temsilleri, lineer cebir ders kitaplarında genelde yer almadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin, bir kavramla bu kavramın bir temsili (bir vektörle bu vektörün geometrik temsili gibi) birbirinden ayırt etmede ve bir temsilden başka bir temsile dönüştürmede bazı hatalar yaptıkları tespit edilmiştir (Duval, 2000).

Hillel ve Sierpinska'ya göre uygulama ağırlıklı düzeyden ziyade teorik seviyede yürütülen bir lineer cebir dersinin öğrencileri Piaget ve Garcia'nın "trans-object level of analysis" olarak adlandırdıkları ileri derecede bir düşünce seviyesinde olmaları gerekir (Hillel ve Sierpinska, 1994). Bu düşünme seviyesi, objelerin bireysel olarak algılanmaları dışında bu objeler üzerinden işlemler yapabilmeyi ve kavramsal yapılar geçiş yapabilmeyi ayrıca hem objeleri ve hem de işlemleri kullanarak dönüşümler kurabilmeyi içerir. Ancak buradaki problem, teorik seviyede yürütülen bir lineer cebir dersini anlayamayan öğrenciler kitaplarda var olan veya öğretmenlerin kullandığı sembollere ve terminolojiye aynen benzeyen yazılı bir metni anlamını kavramaksızın oluşturmaya çalışmalarıdır. Bu durumu ciddi bir problem olarak gören Sierpinska ve arkadaşları, öğrencilerin "ezbercilik" olarak adlandırılabilir bu yanlış yöntemlerini en aşgari seviyeye çekebilmek için lineer cebir dersine bir giriş bölümü tasarladılar (Sierpinska, Dreyfus ve Hillel, 1999). Ayrıca öğrencilerin yanlış anlamalarından ve belirli konulara yaklaşımlarından (özellikle bir tabanda verilen bir lineer dönüşümün bütün düzlemin bir lineer dönüşümüne genişletilmesi problem) kısmen sorumlu tutulabilecek "öğrenci düşünce modelinin" bazı özelliklerini tespit ettiler. Onlara göre bu düşünce tarzının özelliği, "teorikten" ziyade "pratiksel" düşünmeye eğilimli değildir (Sierpinska, 2000). Örneğin, Cabri programında grafiksel olarak verilen temsillerin görünüşünün bir adım ötesine gitmede zorlanıyorlar öyle ki önce gözlemliyorlar sonra verilenlere benzeyen bilgileri oluşturmaya çalışıyorlar (Henderson, 2004). Öğrencilerin pratiksel düşünce yapısına sahip olduklarının en aşikâr göstergesi, her hangi bir soyut kavramı onun tanımından ziyade "prototip örnekleri" üzerinden anlamaya eğilimli olmalarıydı. Özel olarak lineer dönüşümler, "kesmeler" ,"kaymalar" ve bunların bileşkesi olarak anlaşıldı. Bu şekilde bir anlama, bir lineer dönüşümün bir taban üzerindeki değeriyle nasıl belirleneceğini görmelerini çok zorlaştırdı. Ve son olarak öğrencilerin, bir lineer dönüşümün matrisi bilgileri yalnızca formalite düzeyinde kaldı.

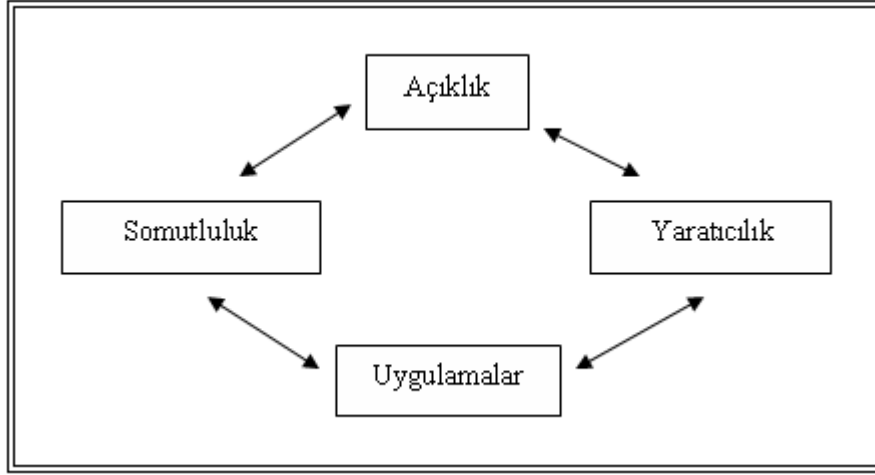
Lineer Cebir Öğretimine Kavramsal Bir Yaklaşım

F.Uhlig, elementer lineer cebir öğretimi için felsefik ve pedagojik bir yaklaşım geliştirdi. Bu yaklaşım, "bir lineer cebir dersi uygulamalarla ve somut örneklerle başlar ve daha sonra kavramlar üzerine yoğunlaşır" klasik anlayışından farklıdır. Uhlig'e göre bir lineer cebir dersi öğretimi aşağıdaki diyagramın bileşenleri arasında dengeli bir yaklaşım bulunmasıyla geliştirilebilir (Uhlig, 2003) ;



Şekil I: Dengeli ve kavramsal bir lineer cebir öğretimi için gerekli ilkeler

Ayrıca, öğrencinin en iyi şekilde matematik öğrenebilmesi ve öğretmenin öğretimini en güzel şekilde yapabilmesi için aşağıdaki pedagojik prensiplere uyulmalıdır (Uhlig, 2003) ;



Şekil II: Lineer cebir öğreniminin ve öğretiminin pedagojik prensipleri

Bu diyagramda; yaratıcılık; bağımsız düşünebilmeyi harekete geçirmeyi, açıklık; öğrencilerin olgunlaşması ve lineer cebir dünyasına girmelerini sağlamayı, somutluluk; somut hesaplamaların kavramları güçlendirmesi ve kavramayı kolaylaştırmasını, uygulamalar; lineer cebir'in güzelliğini ve gücünü göstermeyi ifade eder.

Kavramsal alıştırmalar ve kavramların keşfedici türde tanıtılması lineer cebir'in soyut olarak anlaşılmasını mümkün kılar. Bu dersin incelikleri, somut örneklemeler yerine temel kavramlar üzerinden öğretilmelidir. Lineer cebir'in esasıyla ilişki kurmak oldukça kolaydır. Lineer cebir öğrencilere açık ve güçlü bir şekilde kendini ifade eder; yapılması gereken, öğretmenlerin lineer cebir'i kendilerine rehberlik

yaptığı gibi öğrencilere aktarmalarıdır. Ancak böyle bir yaklaşım bu dersi canlı ve faydalanılabilir yapar. Bu yaklaşımda bazı kavramların ve uygulamaların kavranılması biraz zaman alabilir. Lineer cebir öğretimine Uhlig'in getirmiş olduğu bu yeni yaklaşım yazmış olduğu lineer cebir ders kitabında kendini göstermektedir (Uhlig, 2002).

Lineer Cebir Dersinde Geometriden Faydalanma Düzeyi

Genelde lineer cebir ders kitapları geometrik ifadeler ve örnekler içerirler. Amaç, lineer cebir'in soyut olan kavramlarına somut anlam vererek formal yapıda anlaşılması zor olan kavramın anlaşılmasını kolaylaştırmaktır. Burada önemli olan geometriden faydalanmanın belirgin ve ölçülü bir şekilde yapılmasıdır. Vektör uzayı kavramının geometrik yorum ve örnekler ağırlıklı öğretilmesi, bu kavramın gerçek anlamda anlaşılmasına veya bazı karışıklıkların doğmasına sebep olabilir. Ayrıca üç boyutlu sınırlı olan geometrik gözlemden faydalanma sınırlı olacaktır (Fiedler, 2005). Dört boyutlu bir vektör uzayının lineer bağımlı iki vektörünün geometrik olarak gösterilemeyeceği gibi. Lineer cebir için geometrinin gerekliliği ders kitaplarında ve lineer cebir öğretmenleri tarafından genelde dile getirilir. Ama geometri kullanımı çoğu zaman yüzeysel kalmaktadır. Ayrıca böyle bir durumda lineer transformasyonlarla geometrik transformasyonların birbirine karıştırılması gibi bir sorunda ortaya çıkabilir.

Geometri ve lineer cebir arasındaki ilişkinin epistemolojik bir çalışması tarihi ve modern ders kitaplarından faydalanılarak yapılmıştır (Chartier, 2000). Öğretmenlerin ve lineer cebir ders kitaplarının geometriden faydalanmalarının sınırlı olduğunu gözlemleyen Chartier, öğrencilerinde geometrik temsilleri ve referansları kullanabildiklerini ancak çoğu zaman afin uzayı ile vektör uzayı yapısını birbirinden ayırt edemediklerini tespit etmiştir. Ayrıca bazı öğrenciler bir lineer transformasyonun bir geometrik transformasyon olamayacağını düşünememişlerdir. Diğer bir ifadeyle geometrik referanslar bazı öğrenciler için lineer cebir dersini anlamada bir sorun olarak ortaya çıkmıştır. Lineer cebir müfredat programı içerisinde öğrencilerin bir model olarak faydalanabileceği bir "geometrik bölüm" belirlemek mümkün müdür? sorusu araştırmaya açık ve üzerinde durulması gereken bir konudur.

Lineer Cebir Öğretimi ve Teknoloji

Üniversite öğretimi düzeyinde matematik derslerinde teknolojiden faydalanma oldukça yaygınlaşmaktadır. Bazı araştırmacılar çalışmalarında, teknolojinin lineer cebir dersinde kullanılmasının öğrenciler başarılarına ve gelişmelerine sağladığı katkıdan açık bir şekilde bahsetmektedirler (Herrero, 2000; Sierpiska, 1999). Jean ve arkadaşları, (1994), teknolojik materyal kullanımının, öğrencileri kavramları anlamaya yönlendirerek matematiksel yeteneklerinin gelişmesine katkı sağladığını vurgulamışlardır. Öğrenciler teknolojiyi kullanarak öğretildiklerinde yüksek seviyede başarıya ve derse karşı artan bir pozitif ilgi ve tutuma ulaşırlar (Quesada and Maxwell, 1994; Guckin and Morrison, 1991; Ragen and Smith, 1996).

Bilgisayarın etkin bir şekilde lineer cebir derslerinde nasıl kullanılacağı, bu dersi nasıl öğreteceğimiz ve öğrencilerin bu dersi nasıl öğreneceği bu ders üzerine çalışan araştırmacılar için önemli sorulardır ((Carlson, Johnson, Lay, Porter, 1993; Dorier, 2002; Uhlig, 2003). Bir öğretmen derslerinde bilgisayarı kullandığında, öğrenciler bilgisayar deneyimi konusunda daha çok güvene ve daha fazla pratiğe sahip olacaklar. Böylece, yukarıda bahsedilen sorulara bir yanıt olarak, öğrenciler temel matematik kavramlarını iyi anlamaları ve daha sonra bu kavramları bilgisayar aracılığıyla değişik matematiksel durumlara uygulayabilmeleri gerekmektedir.

Günümüzde, lineer cebir derslerinde kullanabileceğimiz iki tane temel teknolojik materyal vardır. Bunlar matematiksel yazılımlar ve öğretim ve öğrenim amaçlı web sayfalarıdır; Matlab, Mathematica, Derive, Maple ve Linalg, lineer cebirde kullanılacak en etkili yazılım programlarıdır. Ayrıca, lineer cebirde kullanılacak eğitimsel materyalleri ve aktiviteleri içeren dünyanın her tarafından açılmış olan birçok lineer cebir web sayfası vardır. Son olarak, teknolojik materyallerin kullanılması, öğretmenlere gerçek dünya ile ilgili birçok uygulamayı derslerinde göstermelerine ve öğrencilere lineer cebir'i daha kavramsal ve görsel olarak öğretmelerine olanak sağlayan bir faktördür.

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bütün alanlar üzerinde olduğu gibi lineer cebir öğretimi ve öğrenimi üzerine yapılan araştırma çalışmaları bütün zorluklara çözüm getirecek bir yapıda değildir. Yapılan bu çalışmalar kısmi çözümler sağlamakla birlikte, bazı çalışmalar daha önce olmayan bir takım sorunları doğurabilmektedir (Rogalski, Robinet, Robert ve Dorier, 2000b). Bütün problemleri aynı anda çözebilen ve hiçbir sorun içermeyen bir eğitim modelinin olamayacağı bir gerçektir. Dolayısıyla kısmi çözümlerle birlikte bir takım sorunların doğması bir başarısızlık olarak değerlendirilmemelidir. Matematik'in iki temel alanından biri olan ve soyut teorisinin başlangıcı olan lineer cebir üzerinde eğitimsel araştırma çalışmalarına devam edilmesi daha iyi öğrenim ve öğretim modellerinin bulunmasına olanak sağlayacaktır.

Bu çalışmadaki bilgiler göz önüne tutulduğunda aşağıdaki öneriler yapılabilir;

- a) Lisans düzeyinde Lineer cebir Türkçe ders kitabı sayısı oldukça azdır. Bu sayı, çeviri yöntemiyle veya bu alanda yeterli olan hocalarımızın kitap yazmalarıyla artırılabilir.
- b) Lineer cebir öğrenimi ve öğretimi üzerine eğitim çalışmaları, ülkemizde de yapılmalıdır. Bu dersin bazı soyut kavramlarının, özel öğretim stratejileri kullanılarak öğretilmesi ve birçok matematik bilgisayar programlarının bu derse uygulama çalışmaları yapılmalıdır.
- c) Lineer cebir dersi üzerine eğitim çalışmalarını 20–30 yıl önceden başlatan ve bu alanda birçok makale ve ders kitapları yazan Amerika, Kanada ve Fransa gibi ülkelerin çalışmaları Türkçeye kazandırılmalıdır.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

- Anton, H. (1973). *Elementary Linear Algebra*. New York: Wiley.
- Barker, G.P. & Schneider, H. (1968). *Matrices and Linear Algebra*. New York: Dover publications.
- Carlson, D., Johnson, C.R., Lay, D., Porter, D., Watkins, A. & Watkins, W. (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*. The Mathematical Association of America; USA.
- Chertier, G. (2000). Using geometry to teach and learn linear algebra. In J.L.Dorier. (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 262-264. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Davis, P.J., R. & Hersh, R. (1996). *Matematiğin Seyir Defteri*. İstanbul: Doruk Yayıncılık.
- Dorier, J.L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 29(2), 175-197.
- Dorier, J.L. (1998). The role of Formalism in the Teaching of the Theory of Vector Spaces. *Linear Algebra and its Applications*, Vol.27 (5), 141-160.
- Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000a). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In J.L.Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 85-94.Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L.,Robert, A., Robinet,J. & Rogalski, M. (2000b). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Algebra in First Year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, Vol.31, 27-35.
- Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000c). The Meta Lever. In J.L.Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 151-176. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J.L., (2002). Teaching Linear Algebra at University. *In the Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, V. 3, 875-884. China.
- Duval, R. (2000). Coordination of Semiotic Representation Registers. In J.L.Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 247-264. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fiedler, M. (2005). Matrices and Graphs in Euclidean Geometry. *Electronic journal of linear of linear algebra*, Vol.14, 51-58. <http://www.emis.de/journals/ELA/adresinden> 15, 08,2007 tarihinde edinilmiştir.
- Guckin, A.M. & Morrison, D. (1991). Math Logo: A Project to Develop Proportional Reasoning in College Freshmen. *School Science and Mathematics*, 2, 77-81.
- Halmos, P.R. (1958). *Finite- Dimensional Vector Space*. Van Nostrand: Princeton.
- Henderson, J. (2004). Using MATLAB in Mathematics Teaching. *Seminar for Visiting Chinese Scholars*, the University of Sydney.
- Herrero, M.P. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematics Education and Science Technology*, 31(2), 181-186.

- Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.L.Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 191-207. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hillel, J. & Sierpiska, A. (1994). On One Persistent Mistake in Linear Algebra. *The Proceedings PME 18*, Vol.2, 65-72. Lisbon.
- Jean, B., Shaw, N. & Peck, R. (In Press). A Statistical Analysis on the Effectiveness of using a Computer Algebra System in a Developmental Algebra Course. *School Science and Mathematics*.
- Lay, D.C. (1994). *Linear Algebra and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, MA
- Perron, O. (1927). *Algebra vols.1&2*. Berlin: Göschens Lehrbücherei.
- Quesada, A. R. & Maxwell, M. E. (1994). The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students' Performance in Precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 205-215.
- Ragan, T., & Smith, P. (1996). Soft technologies: Instructional and informational design research. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational telecommunications and technology* (pp. 541-569). New York: MacMillan.
- Rogalski, M. (1996). Teaching Linear Algebra: Role and Nature of Knowledge in logic and Set Theory which Deal with some Linear Problems. *The Proceedings PME 20*, Vol.4, 211-218. Valencia.
- Sierpiska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In J.L.Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, 209-246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpiska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19 (1), 7-40.
- Taşçı, D. (2001). *Lineer Cebir*. Konya: Selçuk Üniversitesi Yayınları-9.
- Uhling, F. (2002). *Transform Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River.
- Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 36(1), 147-159.
- Waerden, V.B.L (1936). *Algebra Vols. 1&2*. Berlin: Springer.

İletişim/Correspondence

Yrd. Doç. Dr. Sinan AYDIN
Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Van/TÜRKİYE
Tel: +90 507 2616572
E-Mail: sinanaydin1704@yahoo.com

