Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **20** (2020) 051303 (819-823) AKU J. Sci.Eng.**20** (2020) 051303 (819-823)

DOI: 10.35414/akufemubid.678551

Araştırma Makalesi / Research Article

Verilen Bir Eğri Boyunca Gauss Eğriliği Sabit Olan Yüzeyler

Ergin BAYRAM[1*]

[1] *Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun*

[*] *Sorumlu yazar e-posta: erginbayram@yahoo.com ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2633-0991*

Geliş Tarihi: 22.01.2020 Kabul Tarihi: 05.10.2020

Anahtar kelimeler
Eğri; Yüzey; Gauss eğriliği; Frenet çatısı

Öz

Bu çalışmada, verilen bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca Gauss eğriliği sabit olan yüzeyler elde edildi. Verilen eğrinin Frenet vektör alanları kullanılarak bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak ifade edildi. Ayrıca, verilen eğriden geçen ve Gauss eğriliği sabit regle yüzeyler için yeterli şartlar verildi. Bazı örnekler verilerek elde edilen yöntem görsel hale getirildi.

Surfaces With Constant Gaussian Curvature Along a Given Curve

Keywords
Curve; Surface; Gaussian curvature; Frenet frame

Abstract

In this study, we find surfaces with constant Gaussian curvature along a given curve. The parametric representation of the surfaces possessing the given curve expressed using the Frenet vector fields of the curve. Also, we give conditions for ruled surfaces passing through the given curve and having constant Gaussian curvature. We present some illustrative examples validating the presented method.

1. Giriş

Yüzey eğrilerinin sınıflandırılması hemen hemen bütün diferansiyel geometri kitaplarında kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Ters problem olarak bilinen, verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi asimptotik eğri, eğrilik çizgisi, geodezik gibi özel eğri kabul eden yüzeyler bulma problemi son yıllarda çalışılan önemli konular arasında yer almaktadır. Bu alandaki ilk problem Wang vd. (2004) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada, verilen eğrinin Frenet çatısı yardımıyla bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak ifade edilerek eğrinin bu yüzeyler üzerinde geodezik olması için yeterli koşullar verilmiştir. Li vd. (2011) ise Wang vd. (2004) tarafından kullanılan eğriyi eğrilik çizgisi ile değiştirerek bir eğrinin yüzey ailesi üzerinde ortak eğrilik çizgisi olması için yeterli şartları sunmuştur. Li vd. tarafından yapılan çalışma, Ergün vd. (2014) tarafından 3 boyutlu Minkowski uzayına taşınmıştır. Bayram vd. (2012) verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak asimptotik eğri kabul eden yüzey ailesi için yeterli şartları elde etmiştir. Güler vd. (2018) ortak asimptotik eğrili yüzey ailesini kullanarak bu yüzey ailesinin paralel yüzeyi üzerinde görüntü eğrisinin asimptotik eğri olma şartını elde etmiştir. Bu çalışmada ise verilen bir eğri boyunca Gauss eğriliği sabit yüzeyler elde edilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan kavramlar tanıtılacaktır.

$\gamma : I \to IR^3$, $s \to \gamma(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna eğri denir. $\gamma' \neq 0$ ise eğriye regüler eğri, $\|\gamma'\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri denir. Birim hızlı γ eğrisi için $\gamma'' \neq 0$ ise $T(s) = \gamma'(s)$,

$N(s)=\dfrac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$, $B(s)=T(s)\times N(s)$ şeklinde tanımlanan vektör alanlarına, sırasıyla, eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanı denir (O'neill 1966). Eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, $\kappa(s)=\|\gamma''(s)\|$, $\tau(s)=\langle N'(s),B(s)\rangle$ dir. $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ortonormal sistemine eğrinin Frenet çatısı denir. γ eğrisinin eğriliği $\kappa>0$ ve burulması τ olmak üzere $T'=\kappa N,\ N'=-\kappa T+\tau B,\ B'=-\tau N$ dir. $M\subset\mathbb{R}^3$ bir yüzey, S ise M nin şekil operatörü olsun. $K=\det S$ reel değerli fonksiyonuna M nin Gauss eğriliği denir (O'neill 1966).

Önerme : $M\subset\mathbb{R}^3$ bir yüzey, S, M nin şekil operatörü, $\hat{n}$ ise M nin birim normal vektör alanı olsun.

$$l=\left\langle S\left(\frac{\partial M}{\partial s}\right),\frac{\partial M}{\partial s}\right\rangle=\left\langle \hat{n},\frac{\partial^2 M}{\partial s\partial s}\right\rangle,$$

$$m=\left\langle S\left(\frac{\partial M}{\partial s}\right),\frac{\partial M}{\partial t}\right\rangle=\left\langle \hat{n},\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial s}\right\rangle,$$

$$n=\left\langle S\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right),\frac{\partial M}{\partial t}\right\rangle=\left\langle \hat{n},\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial t}\right\rangle,$$

$$E=\left\langle \frac{\partial M}{\partial s},\frac{\partial M}{\partial s}\right\rangle,\ F=\left\langle \frac{\partial M}{\partial s},\frac{\partial M}{\partial t}\right\rangle,\ G=\left\langle \frac{\partial M}{\partial t},\frac{\partial M}{\partial t}\right\rangle$$

olmak üzere M nin Gauss eğriliği $K=\dfrac{ln-m^2}{EG-F^2}$ dir (O'neill 1966).

3. Bulgular

$\gamma(s)$, $L_1\le s\le L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri olsun. $\gamma(s)$ den geçen yüzeyler

$$M(s,t)=\gamma(s)+f(s,t)T(s)+g(s,t)N(s)+h(s,t)B(s), \tag{1}$$

$L_1\le s\le L_2,\ T_1\le t\le T_2$ ile verilir. Burada, $f(s,t)$, $g(s,t)$, $h(s,t)$ sapma fonksiyonları olarak adlandırılan, C^2 sınıfından fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların her farklı seçilişiyle birlikte $\gamma(s)$ eğrisinden geçen yeni yüzeyler elde edilir. $M(s,t)$ yüzeyinin $\gamma(s)$ eğrisi boyunca Gauss eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar elde edilecektir.

İşlem kolaylığı sağlaması açısından $\gamma(s)$ eğrisinin yüzey üzerinde parametre eğrisi olduğu kabul edilsin. Bunun için yeterli şart

$f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)\equiv 0,\ L_1\le s\le L_2,$

olacak şekilde sabit bir $t_0\in[T_1,T_2]$ olmasıdır.

Şimdi de, eğri boyunca Gauss eğriliğinin sabit olması için yeterli şartlar bulunacaktır. M yüzeyinin $\gamma(s)$ eğrisi boyunca birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial s}(s,t)=&\left(1+\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)-\kappa(s)g(s,t)\right)T(s)\\&+\left(\kappa(s)f(s,t)+\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)-\tau(s)h(s,t)\right)N(s)\\&+\left(\tau(s)g(s,t)+\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right)B(s)\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial M}{\partial t}(s,t)=\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)T(s)+\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)N(s)+\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)B(s)$$

olmak üzere

$$\hat{n}(s,t_0)=\left(\frac{\partial g}{\partial t}B(s)-\frac{\partial h}{\partial t}N(s)\right)\left(\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}(s,t_0)$$

dır. Ayrıca

$$E(s,t_0)=\left\|\frac{\partial M}{\partial s}(s,t_0)\right\|^2=1,$$

$$F(s,t_0)=\left\langle \frac{\partial M}{\partial s}(s,t_0),\frac{\partial M}{\partial t}(s,t_0)\right\rangle=\frac{\partial f}{\partial t}(s,t_0),$$

$$\begin{aligned}G(s,t_0)&=\left\langle \frac{\partial M}{\partial t}(s,t_0),\frac{\partial M}{\partial t}(s,t_0)\right\rangle\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,t_0)\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial t}(s,t_0)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial t}(s,t_0)\right)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l(s,t_0)&=\left\langle \hat{n}(s,t_0),\frac{\partial^2 M}{\partial s\partial s}(s,t_0)\right\rangle\\&=-\kappa(s)\left(\frac{\partial h}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)(s,t_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(s,t_0)&=\left\langle \hat{n}(s,t_0),\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial s}(s,t_0)\right\rangle\\&=\left(\tau(s)\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}-\kappa(s)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}\right.\\&\left.+\tau(s)\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial s}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left(\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}(s,t_0),\end{aligned}$$

$$n(s,t_0)=\left\langle \hat{n}(s,t_0),\frac{\partial^2 M}{\partial t\partial t}(s,t_0)\right\rangle$$

$$=\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial t\partial t}\dfrac{\partial g}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial t\partial t}\dfrac{\partial h}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial t}\right)^2}}\right)(s,t_0)$$

dir. Eğri boyunca Gauss eğriliği

$$K(s,t_0)=\left[\kappa(s)\left(\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)\right.$$
$$-\left(\tau(s)\left(\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right)-\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}\right.\tag{2}$$
$$\left.\left.-\kappa(s)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial s}\right)^2\right]\left(\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\right)^{-2}(s,t_0)$$

dir.

Teorem 1 : $\gamma(s)$, $L_1\le s\le L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin (1) yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması ve yüzeyin bu eğri boyunca Gauss eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul

a) $$\begin{cases} f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)=\dfrac{\partial h}{\partial t}(s,t_0)\equiv 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t}(s,t_0)=\text{sabit}\neq 0,\ \tau(s)=\text{sabit} \end{cases}$$

veya

b) $$\begin{cases} f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)=\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t_0)\equiv 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(s,t_0)\neq 0\equiv\dfrac{\partial g}{\partial t}(s,t_0),\ \tau(s)=\text{sabit} \end{cases}$$

olmasıdır.

İspat : a) Sapma fonksiyonları

$$\begin{cases} f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)=\dfrac{\partial h}{\partial t}(s,t_0)\equiv 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t}(s,t_0)=\text{sabit}\neq 0,\ \tau(s)=\text{sabit} \end{cases}$$

olarak seçilirse (1) denkleminden $M(s,t_0)=\gamma(s)$ olacağından eğri, yüzey üzerinde parametre eğrisi olur. Ayrıca, bu sapma fonksiyonları için Gauss eğriliği sabit olup ispat tamamlanır. b) durumu için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2 : $\gamma(s)$, $L_1\le s\le L_2$, birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı olan bir eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin (1) yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması ve yüzeyin bu eğri boyunca Gauss eğriliği sabit olan regle yüzey için yeterli koşul

$f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)=t-t_0$, $2\tau(s)-\kappa(s)=\text{sabit}$

olmasıdır.

Eğer $2\tau(s)-\kappa(s)=0$ olursa (1) yüzeyi açılabilir regle yüzey olur.

İspat : Sapma fonksiyonları $f(s,t_0)=g(s,t_0)=h(s,t_0)=t-t_0$ olarak seçilirse (1) denkleminden

$$M(s,t)=\gamma(s)+(t-t_0)\left[T(s)+N(s)+B(s)\right]$$

regle yüzeyi elde edilir. (2) denkleminden bu regle yüzeyin Gauss eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul

$$2\tau(s)-\kappa(s)=\text{sabit}$$

olmasıdır. Son eşitlik sıfır olursa yüzeyin Gauss eğriliği sıfır olacağından yüzey açılabilir olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 1

$\gamma(s)=\left(-\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}s,-\dfrac{1}{2}\sin\sqrt{2}s,\dfrac{\sqrt{2}}{2}s\right)$ birim hızlı eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet elemanları

$$T(s)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\sqrt{2}s,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$N(s)=\left(\cos\sqrt{2}s,\sin\sqrt{2}s,0\right)$$

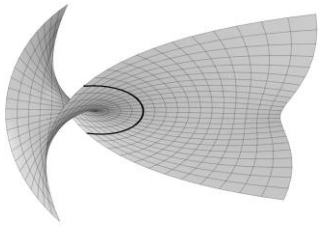
$$B(s)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}s,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\sqrt{2}s,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\kappa(s)=\tau(s)=1$$

dir. Sapma fonksiyonları $f(s,t)=st$, $g(s,t)=t$, $h(s,t)=st^2$ ve $t_0=0$ olarak seçilirse Teorem 1 sağlanır ve γ eğrisi boyunca Gauss eğriliği 1 olan

$$M_1(s,t)=\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\cos\sqrt{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}st(1-t)\sin\sqrt{2}s,\right.$$
$$\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin\sqrt{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}st(1-t)\cos\sqrt{2}s,$$
$$\left.\frac{\sqrt{2}}{2}s\left(1+t+t^2\right)\right),$$

$-1\le s\le 1$, $-1\le t\le 1$ yüzeyi elde edilir (Şekil 1).

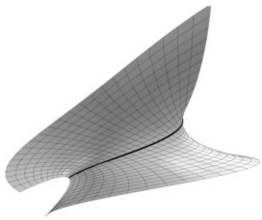


Şekil 1. $\gamma(s)$ eğrisinden geçen ve bu eğri boyunca Gauss eğriliği bir olan M_1 yüzeyi

Aynı eğri için sapma fonksiyonları $f(s,t)\equiv 0$, $g(s,t)=st^2$, $h(s,t)=e^s t$ ve $t_0=0$ olarak seçilirse Teorem 1 sağlanır ve γ eğrisi boyunca Gauss eğriliği 1 olan

$$M_2(s,t)=\Bigg(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}t\left(st-e^s\right)\sin\sqrt{2}s,\ -\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}t\left(e^s-st\right)\cos\sqrt{2}s,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(s+st^2+e^s t\right)\Bigg),$$

$-1\le s\le 1,\ -1\le t\le 1$ yüzeyi elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2. $\gamma(s)$ eğrisinden geçen ve bu eğri boyunca Gauss eğriliği bir olan M_2 yüzeyi

Örnek 2

$$\gamma(s)=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos s,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin s,-\frac{\sqrt{5}}{5}s\right)$$ birim hızlı eğrisini ele alalım. Eğrinin Frenet elemanları

$$T(s)=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin s,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos s,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

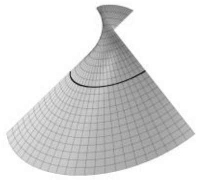
$$N(s)=\left(-\cos s,\sin s,0\right)$$

$$B(s)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin s,-\frac{\sqrt{5}}{5}\cos s,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$\kappa(s)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tau(s)=\frac{\sqrt{5}}{5}$ dir. Sapma fonksiyonları $f(s,t)=g(s,t)=t-t_0$ $h(s,t)=t-t_0$ ve $t_0=0$ olarak seçilirse Teorem 2 sağlanır ve γ eğrisi boyunca Gauss eğriliği sıfır olan

$$M_3(s,t)=\Bigg(-\frac{\sqrt{5}}{5}t\sin s+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}-t\right)\cos s,\ -\frac{\sqrt{5}}{5}t\cos s+\left(t-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\sin s,-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(s-3t\right)\Bigg),$$

$-1\le s\le 1,\ -1\le t\le 1$ açılabilir yüzeyi elde edilir (Şekil 3).



Şekil 3. $\gamma(s)$ eğrisinden geçen ve bu eğri boyunca Gauss eğriliği bir olan M_3 açılabilir yüzeyi

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, verilen bir eğriden geçen ve eğri boyunca Gauss eğriliği sabit olan yüzeyler elde edildi. İlk olarak, verilen herhangi bir birim hızlı eğrinin Frenet çatısı yardımıyla yüzeyler parametrik olarak ifade edildi. Daha sonra, eğri boyunca elde edilen yüzeylerin sabit Gauss eğriliğe sahip olması için yeterli şartlar verildi. Son olarak, bu tip bir yüzeyin regle yüzey ve açılabilir olması koşulu ele alınarak örnekler verildi.

Teşekkür

Editör ve hakemlere, makalenin daha anlaşılır olmasını sağlayan görüş ve önerileri için teşekkürü bir borç biliriz.

5. Kaynaklar

Bayram, E., Güler, F. and Kasap, E., 2012. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. *Computer Aided Design*, **44**, 637-643.

Ergün, E., Bayram, E. and Kasap, E., 2014. Surface pencil with a common line of curvature in Minkowski 3-

space. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 30**,** **12**, 2103-2118.

Güler, F., Bayram, E. and Kasap, E., 2018. Offset surface pencil with a common asymptotic curve. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15, **11**, 1850195.

Li, C.Y., Wang, R.H. and Zhu, C.G., 2011. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. *Computer Aided Design*, 43, **9**, 1110-1117.

O'Neill, B., 1966. Elementary differential geometry. Academic Press, New York, 59-231.

Wang, G.J., Tang, K. and Tai, C.L., 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. *Computer Aided Design*, 36, **5**, 447-59.