Bursa Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
Dergisi

Araştırma Makalesi
https://dx.doi.org/10.19171/uefad.679338
Başvuru/Received: 08.01.2019 Kabul/Accepted: 22.04.2019

Lise Öğrencilerinin Yansıma Dönüşümü Hakkındaki Matematiksel Söylemlerinin Öğretim Bağlamında Gelişimi[1]

Elçin EMRE AKDOĞAN
Dr. Öğr. Üyesi, TED Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, elcin.akdogan@tedu.edu.tr, OrcID: 0000-0002-6521-9287

Beste GÜÇLER
Doç. Dr., University of Massachusetts Dartmouth, bgucler@umassd.edu, OrcID: 0000-0003-2683-8525

Ziya ARGÜN
Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, ziya@gazi.edu.tr, OrcID: 0000-0001-8101-7215

ÖZET

Bu araştırmanın amacı, lise öğrencilerinin yansıma dönüşümü ile ilgili matematiksel söylemlerinin gelişimini ve söylem gelişiminin öğretimle olan ilişkisini ortaya koymaktır. Durum çalışması desenine sahip olan araştırmanın katılımcıları iki 10. sınıf öğrencisi ve bir öğretmendir. Araştırmanın verileri, öğretmen ve öğrencilerle yapılan görev temelli görüşmeler ve sınıf gözlemleri aracılığıyla sekiz haftada toplanmıştır. Verilerin analizi ise matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisine göre yapılmıştır. Matematiksel bilişe iletişimsel

[1] Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ve University of Massachusetts Dartmouth tarafından desteklenmiştir.

yaklaşım teorisi bize öğretim ve öğrenme ile ilgili önemli perspektifler sunmuştur. Öğrencilerin yansıma dönüşümündeki söylemlerinin gelişiminin sınıfta öğretmenin kullandığı söylem ile karşılaştırmalı analizleri sonucunda, öğretmenin kullandığı söylemin, öğrencilerin söylemlerinin gelişimsel seviyesinin üstünde olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen ve öğrencilerin söylemleri arasında farklılıkların olduğu gözlemlenmiştir. Öğretmenin söylemlerinin açık ve anlaşılır olması durumunda öğrencilerin öğretmen söylemini kendilerine adapte edebildikleri, fakat öğretmenin söyleminde belli ögelerin üstünün örtük kaldığı durumlarda öğrencilerin söylemlerini öğretmenin söylemine adapte etmekte zorluk yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır. Sınıf içerisindeki matematiksel iletişimi geliştirmek ve öğrencilerin söylemsel gelişimlerini desteklemek için öğretmenlerin, öğrencilerin söylemlerinin gelişimsel süreçlerinin farkında olması ve söylemlerini daha açık ve net bir hâle getirmeleri gerekmektedir.

Anahtar Kelimeler: Lise matematik eğitimi, matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisi, matematiksel söylem gelişimi, yansıma dönüşümü.

High School Students’ Development of Mathematical Discourses on Geometric Reflections in Relation to Instruction

ABSTRACT

The purpose of this study is to explore the development of high school students’ mathematical discourses on the concept of reflection in relation to instruction. Participants of this case study were two 10th grade high school students and a mathematics teacher. The data for the study were collected over eight weeks, and consisted of classroom observations and task-based interviews conducted with the students and teacher. We analyzed the data from the perspective of the commognitive framework. Our analysis of the students’ discursive development in relation to instruction showed that the teacher’s discourse in the classroom was at a higher level than the students’ discourses, and the discourses of the teacher and his students differed from each other. The students adopted the teacher’s discourse when his discourse was transparent and explicit for them, but the students did not adopt the teacher’s discourse on reflection when particular elements in his discourse remained implicit for them. In order to enhance mathematical communication in the classrooms and support the discursive development of students, teachers need to be aware of their students’ development and make the elements of their discourses transparent in the classroom.

Key Words: Commognitive theory, development of mathematical discourse, high school mathematics education, reflection.

GİRİŞ

Geometrik dönüşümler, öğrencilerin örüntüleri ve basit izometrileri keşfetmelerine, genellemeler yapmalarına ve görsel becerilerini geliştirmelerine olanak sağlamaktadır (Clements, Battista, Sarama ve Swaminathan, 1997; Portnoy, Grundmeimer ve Graham, 2006). Geometrik dönüşümler ayrıca öğrencilerin fonksiyonlar, benzerlik, eşlik gibi matematikle ilgili önemli kavramları düşünmelerine ve muhakeme seviyelerini artırıp farklı temsil biçimlerini kullanmalarına yardımcı olmaktadır (Hollebrands, 2003). İlkokuldan liseye birçok geometri müfredatında, öğretim programında ve matematik eğitimi araştırmalarında dönüşümler önemli bir yere sahiptir (Flagan, 2001; Jones, 2000; Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2010, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Yanik, 2006). MEB 10. sınıf lise geometri programı amaçları arasında öğrencilerin "şekillerde eşlik, benzerlik, yansıma, öteleme ve dönme hareketlerini kavramaları ve uygulamalar yapmaları" yer almaktadır (MEB, 2010, s.13). NCTM standartları ise lise öğrencilerinden (9. sınıf-12. sınıf) öteleme, dönme ve yansıma dönüşümlerinin gösterimlerini anlamaları ile birlikte onların bileşke dönüşümlerini anlamalarına yardımcı olması için farklı temsilleri kullanmalarını beklemektedir (NCTM, 2000). Öğrencilerin dönüşüm geometrisini hareket-bazlı olarak algılamalarının yanı sıra, dönüşümleri fonksiyon olarak da görebilmeleri oldukça önemlidir (Flagan, 2001). Dönüşüm geometrisinden özel olarak yansıma dönüşümü, yarattığı örüntülerle geometriyi, doğayı ve şekilleri anlamlandırmamıza yardımcı olan geometrinin önemli bir konusudur (Knuchel, 2004). Yansıma, ayrıca örüntülerin nasıl oluştuğu ve şekillerin değişmeden uzayda nasıl hareket ettiği ile ilgili fikirler verir (Knuchel, 2004).

Literatürde matematik öğretmen adaylarının yansıma ile ilgili pedagojik yaklaşımlarını, bilgilerini ve anlamalarını (Hacısalihoğlu-Karadeniz, Baran, Bozkuş, ve Gündüz, 2015; Son, 2006; Son ve Sinclair, 2010; Tatar, Akkaya, ve Kağizmanli, 2014); ve ilköğretim öğrencilerinin düşüncelerini (Xioustri, 2007; Xistouri, ve Pitta-Pantazi, 2006) inceleyen çalışmalar tespit edilmiştir. Ayrıca, lise öğrencilerinin yansıma ile ilgili ispat yapma sürecinde (Miyakawa, 2004); problem çözme sürecinde (Leikin, Berman and Zaslavsky, 2000); teknolojik ortamlarda (Hoyles, and Healy, 1997); günlük bilgi ile formal bilgiyi karşılaştırırken (Mhlolo and Schäfer, 2014); farklı temsil biçimlerini kullanırken (Panoura ve diğ., 2009); ve farklı kavramlarla ilişkilendirmede (DeJarnette, Gonzalez, Deal ve Rosado Lausell, 2016) düşüncelerini inceleyen çalışmalar belirlenmiştir. Yapılan çalışmalar lise öğrencilerinin yansıma kavramıyla ilgili güçlükler yaşadıklarını göstermektedir (Bulf, 2010; Hoyles ve Healy, 1997; Mhlolo and Schäfer, 2014). Küchemann (1981), öğrencilerin yansıma ve dönme dönüşümü ile ilgili kavramsal bilgilerinde eksiklikler olduğu ve bu sebeple bu dönüşümleri kullanmada zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir. Yansıma ekseni dik veya yatay verildiğinde öğrencilerin zorluk yaşamadıkları fakat eğik verildiğinde öğrencilerin şeklin yansımasını bulmada zorluk yaşadıkları belirlenmiştir (Hollebrands, 2004; Hoyles ve Healy, 1997; Mhlolo ve Schäfer, 2014; Panaoura, Elia, Stamboulides ve Spyrou, 2009; Xioustri, 2007). Öğrencilerin yaşadıkları bu zorluğun temelinde, onlara verilen problemlerde yansıma ekseninin çoğunlukla dik ve yatay verilmesinden dolayı bu şekilde yansıma yapmaya eğilimli olmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir (Panaoura, Elia, Stamboulides ve Spyrou, 2009; Son ve Sinclair, 2010; Xioustri, 2007). Yansıma ekseni eğik iken, öğrenciler yansıma eksenine dik doğru almada zorlandıkları için, öğrencilerin güçlük yaşadığı yapılan araştırmalarda tespit edilmiştir (Hoyles ve Healy, 1997; Xioustri, 2007). Öğrencilerin yansıma ekseni eğik verildiğinde zorluk yaşamalarının ve yaşanan kavramsal zorluğun temelinde ise uzaklık kavramı yer almaktadır (Hoyles ve Healy, 1997). Yansıma ekseni eğik verildiğinde, öğrencilerin uzaklığı bir doğruya en kısa ve dik olan mesafe şeklinde düşünmediklerinden dolayı yansıma kavramıyla ilgili zorluklar yaşadıkları söylenebilir (Hoyles ve Healy, 1997). Ayrıca öğrencilerin yansıma kavramını geometrik şekillerin hareketi olarak ele aldıkları fakat fonksiyon olarak ele almada zorluk yaşadıkları görülmektedir (Edwards, 2003). Yansımanın geometrik şekillerin dinamik hareketi olarak görülmesi süreç (process) bakış açısı, düzlem üzerindeki tüm noktaların eşleşmesi (mapping) yani fonksiyon olarak görülmesi ise nesne (object) bakış açısı olarak adlandırılmaktadır (Edwards, 2003).

Son (2006) çalışmasında, ilkokul, ortaokul ve lise öğretmen adaylarının yansıma dönüşümü ile ilgili kavramsal anlamalardan ziyade işlemsel anlamalara odaklandıklarını yansıma ve dönmeyi birbirine karıştırdıklarını tespit etmiştir. Hacısalihoğlu-Karadeniz, Baran, Bozkuş ve Gündüz, (2015) yaptıkları araştırmada, öğretmen adaylarının simetri ve eşlik kavramlarıyla ile ilgili zorluklar yaşadıklarını belirlemişlerdir. Bu çalışmada, adayların bir geometrik cismin simetrisini alırken işlemsel süreçlerde zorluk yaşamadıkları, fakat yansıma ve simetri ekseni ile ilgili kavramsal zorluklar yaşamadıkları ortaya konulmuştur. Son ve Sinclair (2010), öğretmen adaylarının yansıma kavramı ile ilgili ders verirken ağırlıklı olarak işlemsel süreçlere odaklandıklarını, öğrencilerin yaşadıkları kavramsal zorlukları göz ardı ettiklerini tespit etmişlerdir.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin yansıma dönüşümü ile ilgili düşüncelerinin ağırlıklı olarak bilişsel teoriler aracılığıyla incelendiği görülmektedir. Çok az çalışma konuyu sosyo-kültürel bakış açısıyla ve öğrenimin gelişimini öğretimle birlikte ele almıştır (Emre-Akdoğan, Güçler ve Argün, 2018). Ayrıca doğal sınıf ortamında öğrencilerin öğrenmesini inceleyen çalışma sayısı da oldukça kısıtlıdır (Emre-Akdoğan, Güçler ve Argün, 2018). Doğal sınıf ortamında öğretmenlerin nasıl öğrettiklerini incelemek, öğretmen adaylarına öğretim ile ilgili verilebilecek önerileri zenginleştirme olanağı sağlamaktadır. Bunlara ek olarak, literatürde yansıma kavramını söylemsel olarak inceleyen çalışma yer almamaktadır, matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisi bize öğrenmenin gelişimini doğal sınıf ortamında öğretimle ile birlikte söylemsel olarak derinlemesine inceleme ve analiz etme fırsatı sunmaktadır. Bu çalışma, yansıma dönüşümü bağlamında öğrenmenin gelişiminin öğretim ile ilişkisini spesifik bir sosyo-kültürel teori perspektifinden incelemektedir. Yansıma literatüründe yukarıda bahsedilen boşlukları göz önüne alan bu araştırma, öğrenimin duruma ve sosyal iletişime bağlılığını, sınıf içerisinde iletişim sorunlarının matematiksel söylemle olan ilişkisini ve matematiksel iletişim sorunlarının öğretmen ve öğrencilerin söylemlerinde ne zaman ve nasıl oluştuğunu ortaya koyarak literatüre katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Araştırmanın genel amacı, lise öğrencilerinin yansıma dönüşümü ile ilgili matematiksel söylemlerinin gelişimini ve öğretimle olan ilişkisini ortaya koymaktır. Araştırmanın sorusu ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Sınıf ortamında iki lise öğrencisinin öğretmenin kullandığı matematiksel söylem bağlamında yansıma dönüşümü ile ilgili matematiksel söylemlerinin gelişimi nasıldır?

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Matematiksel bilişe iletişimsel yaklaşım teorisi

Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisi, Sfard (2008) tarafından oluşturulmuş söylemsel bir gelişim teorisidir. Bu teorinin ana özellikleri ve teknik terimlerinin tanımı Güçler (2016) tarafından Türkçeleştirilmiştir. Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım (Commognition) teorisi İngilizce olarak, iletişim (communication) ve biliş (cognition) kelimelerinin birleşiminden ortaya çıkmaktadır. Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisinin kökenleri sosyo-kültürel teorilere dayanmaktadır. Vygotsky (1978), düşünmeyi bireyler arası iletişimin bireyselleştirilmiş biçimi olarak ifade etmektedir. Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisi ise düşünmeyi kişinin kendisiyle olan iletişimi olarak tanımlayarak Vygotsky'ye göre bireysel seviyede gerçekleşen düşünmeyi iletişim gibi sosyal kökenleri olan bir olgu olarak ele almaktadır (Güçler, 2016). Bu teori, matematiksel bilişin sosyal ve iletişimsel boyutunu vurgulamaktadır. Sfard'a (2008) göre söylem, kişisel veya kişilerarası özel bir iletişim şeklidir, sözel olabilir veya olmayabilir ve konuma bağlı değişir. Sfard, matematiği söylem olarak tanımlamaktadır ve matematiksel söylem kelimelerle sınırlı değildir, eylemleri de kapsamaktadır (2008). Matematiksel söylemler dört bileşeni ile tanımlanmaktadır: sözcük kullanımı (word use), görsel aracılar (visual mediators), rutinler (routines), ve tasdik edilen anlatılar (endorsed narratives) (Sfard, 2008).

Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisi, matematiksel öğrenmeyi matematiksel söyleme iştirak etme biçimindeki sürekli değişim olarak ele almaktadır (Sfard, 2008). Gelişim ise matematiksel söylemlerdeki değişimdir (Sfard, 2012). Gelişim, psikolojide kullanılan gelişim kavramında olduğu gibi katılımcıdaki içsel değişim veya genel becerileri ile ilgili değildir, gelişim söylemsel aktivitelerdeki (aktivite kişilerarası iletişim veya kişisel iletişim olabilir) modifikasyondur (Sfard, 2012). Matematiksel söylemler, tıpkı ağaçlardaki yaş halkaları gibi, kendi gelişmelerine dair kolayca açıklanabilecek kanıtlar taşımaktadırlar (Caspi ve Sfard, 2012). Yaş halkalarındaki her katman kendisinden önceki katmanla ilgili bir söylemse, öğrencinin önceki katmanı tam öğrenmeden bir sonraki katmana geçmek, öğrencinin yeni söylemle ilgili hiçbir şey öğrenmemesi riskine girmek demektir (Caspi ve Sfard, 2012). Matematiksel söylemlerin gelişimi, anlamlı bir öğrenimi sağlamak için öğrencilerin alması gereken öğretimin gidişatı ile ilgili bize ipucu verir (Sfard, 2012). Bu bağlamda, "matematik eğitiminin ana amacı, öğrencilerin kendilerine özgü kullandıkları sözcükleri, görsel aracıları, rutinleri ve tasdik edilen anlatıları matematik konusundaki uzmanların (öğretmenler, matematikçiler gibi) söylemleri ile tutarlı hale getirmektir" (Güçler, 2016, s. 636).

Bu çalışmada, öğrencilerin ve öğretmenin matematiksel söylemlerini incelerken, yansıma dönüşümü bağlamında, matematiksel iletişim için kullandıkları, kelimelere, görsel aracılara, rutinlere, ve anlatılara odaklanılmıştır.

Sözcük kullanımı

Sözcük kullanımı, söylemlerin ayırıcı özelliklerinden biri olan, teknik anahtar kelimelerdir (Sfard, 2008). Okulda veya akademik ortamda kullanılan matematiksel söylemlerde bu sözcüklerin kullanımı, kullanılan alana özgüdür. Sözcük, başka anlamlarıyla eş değer olabileceğinden, bireyin matematiksel bir kelimeyi hangi anlamda kullandığının araştırılması matematiksel düşünmeyi incelemede oldukça önemlidir.

Sfard'a (2008) göre sözcük kullanımı gelişimi dört hiyerarşik aşamadan oluşmaktadır: edilgen kullanım (passive use), rutin-bazlı kullanım (routine-driven use), tabir-bazlı kullanım (phrase-driven use) ve nesne-bazlı kullanım (object-driven use). Edilgen kullanım aşamasında, öğrenciler matematiksel sözcükleri sözel olarak dile getirememelerine rağmen, o sözcükleri başkalarından duyduklarında belli rutinleri uygulamaya başlayabilirler (Güçler, 2016). Bu aşamada, öğrenci "yansıma" kelimesini cümle içinde kullanamamaktadır. İkinci aşama olan rutin-bazlı sözcük kullanımında öğrenci belli matematiksel kelimeleri söyleminde kullanmaya başlamıştır, ancak bu kullanım sadece belirli eylemsel rutinlerle sınırlıdır (Sfard, 2008). Örneğin, bir öğrenciye "yansıma nedir?" diye sorulduğunda öğrenci "üçgeni buradan alıp buraya kaydırıyorum" diyerek yalnızca eylemlerine odaklanabilir. Üçüncü aşama olan tabir-bazlı sözcük kullanımında, matematiksel sözcüklerden ziyade o sözcüklerin içinde bulunduğu tabirler, öğrencinin söyleminde baskın bir hâl almaktadır; bu aşamadaki öğrenciler, matematiksel kelimeleri uyguladıkları rutinler yerine belirli tabirlerle eşleştirmektedirler (Sfard, 2008). Mesela bir öğrenciye yansımanın ne olduğu sorulduğunda "yansıma dendiği zaman şekli eksenin diğer tarafına kaydırıyoruz" gibi cevap veriyorsa, bu öğrenci yansıma kelimesini tabir-bazlı kullanmaktadır. Matematiksel sözcük kullanımının son aşaması olan nesne-bazlı kullanımda, öğrenci sözcükleri isim olarak kullanabilmektedir. Bu aşamada matematiksel kelimeler nesnelleştirilmiş ve kendi içlerinde anlam taşıyan somut matematiksel birimlere ve kavramlara dönüştürülmüştür (Sfard, 2008). Örneğin, "yansıma bir geometrik dönüşümdür" cümlesini kuran bir öğrenci yansıma kelimesini nesne-bazlı kullanmıştır.

Görsel aracılar

İletişim sürecinin önemli ögelerinden biri de görsel aracılardır (Sfard, 2008). Matematiksel söylemde görsel aracılar, matematiksel iletişim için yazılı ve sözlü olarak kullandığımız tüm görsel araçları kapsamaktadır. Tablolar, grafikler, semboller ve geometrik şekiller görsel aracılara birer örnektir (Güçler, 2016). Günlük dile ait olan söylemler, söylemler içinde yer alan nesnelerin günlük hayat resimleri ile ilişkilendirilirken, matematiksel söylemdeki nesneler daha çok iletişim amaçlı üretilen sembolik notasyonlarla ilişkilendirilirler.

Rutinler

Rutinler, matematiksel söyleme katılan bireylerin sürekli tekrarlayan üst seviyedeki kurallarını kapsamaktadır (Sfard, 2008). Bu örüntüler, katılımcıların eylemleri ile matematiksel söylemlerindeki diğer ögeleri yönlendirir. Rutinlerin incelenmesi, katılımcıların eylemlerinin analizi sonucunda mümkün olmaktadır. Söylem analizinde, eylemlerin incelenmesi, sadece kelime kullanımı ile sınırlandırılmış incelemenin sağlayacağından farklı perspektifler sunabilmektedir. Bu teoriye göre rutin, nasıl ve ne zaman gerçekleştiğine göre iki farklı şekilde incelenmektedir (Sfard, 2008). Rutinin nasıl gerçekleştiği, uygulanırken kullanılan eylemi; ne zaman gerçekleştiği ise eylemin hangi durumlarda ve koşullarda kullanıldığını ifade etmektedir (Güçler, 2016). Örneğin, bir öğrenci yansıma kavramı ile ilgili problemleri çözerken düzenli olarak, "şeklin her bir köşe noktasının yansıma eksenine olan uzaklığına eşit ve dik uzaklıkta olan noktalarını görsel olarak belirleyip yansıma dönüşümü sonrasında oluşan şekli çiziyor" ise bu eylemi öğrencinin yansıma ile ilgili söylemlerinde bir rutin oluşturmaktadır.

Tasdik edilen anlatılar

Tasdik edilen anlatılar, söylem içerisinde matematiksel kavramlar ve onların birbirleriyle ilişkileri ile ilgili katılımcıların doğru kabul ettiği argümanlardır (Sfard, 2008). Bu argümanlar, matematiksel söylemin diğer ögeleri olan sözcük kullanımı, görsel aracılar ve rutinler tarafından tasdik edilmektedir. Matematikçilerin tasdik edilen anlatıları arasında tanımlar, teoremler ve ispatlar yer almaktadır (Sfard, 2008).

Matematikçiler, öğretmenler ve öğrencilerin söylemlerinin temel karakteristiğini oluşturan örüntüleri, birbirinden farklı olabilir; bu sebeple öğrencilerin söylemlerinde bulunan bileşenlerdeki örüntülerin matematikte uzman katılımcıların söylemlerindeki örüntülere zaman içerisinde gösterdiği benzerliği ve farklılığı incelemek, Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisi kapsamında, öğrenmeyi incelemekle eş değerdir (Güçler, 2016).

METODOLOJİ

Katılımcılar

Bu araştırma nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması olarak tasarlanmıştır (Yin, 1994). Türkiye'de bir devlet lisesinin 10. sınıfında gerçekleştirilen araştırmanın katılımcıları iki 10. sınıf öğrencisi ve bir matematik öğretmenidir. Araştırmanın katılımcılarından olan Can öğretmen (takma ad), yüksek lisans derecesine sahip 8 yıl tecrübesi olan bir matematik öğretmenidir. Görüşme yapılan öğrenciler, çalışmanın başında tüm sınıfa uygulanan öteleme, dönme ve yansıma kavramlarının yer aldığı görev temelli problemler içeren tarama soruları, öğretmenle yapılan görüşmeler göz önünde bulundurularak belirlenmiştir. Eda ve Okan (takma adlar) çalışmaya katılmaya istekli olmakla birlikte düşüncelerini açık ve net bir şekilde ifade etmelerinden dolayı zengin veri verebilecekleri düşünüldüğünden amaçlı örnekleme yöntemine göre çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir (Patton, 2002).

Veri toplama araçları

Bu araştırmada, nitel araştırma yöntemine uygun olarak, süreçlere ilişkin veri toplaması yapılmıştır. Veri toplama sürecinde sınıf gözlemleri ile birlikte öğrenciler ve matematik öğretmeniyle yapılan görüşmelerden faydalanılmıştır. Can öğretmenin yansıma dönüşümü üzerine matematiksel söylemlerini incelemek için 2 ders saati gözlem ve yansıma dersinden sonra 30 dakika süren görev temelli yarı-yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Can öğretmen ile yansıma dersi sonrasında yapılan görüşme, öğretmenin gözlem verileri ile örtüşüp örtüşmediğini incelemek amacıyla veri üçlemesi (triangulation) için yapılmıştır (Patton, 2002).

Sınıf gözlemleri iki haftalık bir süreçte 45 dakikalık iki ders saati içinde yapılmıştır. Ders gözlemi ile ilgili notlar üç farklı sütunu içeren gözlem protokolü aracılığıyla alınmıştır. Birinci sütunda beşer dakikalık aralıklarla zaman bilgileri yazılmıştır. İkinci sütunda, öğretmen ve öğrencilerin matematiksel söylemleri ile ilgili notlar tutulmuştur. Üçüncü sütunda ise araştırmacının ek notları yer almıştır. Sınıf içinde gözlem yaparken araştırmacının rolü katılımcı gözlemcidir. Ders gözlemleri esnasında araştırmacı dersin akışına herhangi bir müdahalede bulunmamıştır. Can öğretmenle yapılan görüşme protokolünde, öğrencilerle yapılan son görüşmede yer alan yansıma kavramı üzerine 4 adet problemin çözümü ile ilgili olarak öğretmenin verdiği cevaplar doğrultusunda araştırmacı tarafından tetikleyici sorular yöneltilmiştir.

Eda ve Okan'ın yansıma dönüşümü üzerine matematiksel söylemlerini incelemek için ise üç adet görev temelli görüşme yapılmıştır. Görev temelli görüşmeler yansıma dersi öncesi, yansıma dersinden hemen sonra ve yansıma dersinden sekiz gün sonra yapılmıştır. Görev temelli görüşmeler ortalama olarak 25 dakika sürmüştür. Okan ve Eda ile yapılan üç görev temelli görüşmede de birbirinden farklı fakat kavramsal ve içerik olarak birbirine denk olan dört adet problem sorulmuştur. İlk problemde öğrencilerin yansıma ile ilgili izlenimlerini incelemek için bir örnek istenmiştir. Bu verilen örnek üzerinden daha detaylı konuşulması amacıyla hem geometrik hem de cebirsel notasyonlar içeren ikinci problemde, bir noktanın eğik bir doğruya göre yansımasını, bir üçgenin eğik bir doğruya göre yansımasını ve bir doğrunun bir noktaya göre yansımasını içeren problemler yöneltilmiştir. Üçüncü problemde ise bir şeklin eğik veya dik bir doğruya (birinci ve üçüncü görüşmede eğik, ikinci görüşmede dik doğruya) göre yansıması, dördüncü problemde ise verilen şekildeki tekrar eden figürlerin nasıl oluştuğu sorulmuştur.

Öğretmen ve öğrenciler ile yapılan görüşmeler sessiz bir ortamda video kamera ile kayıt altına alınmış ve problemler üzerinde öğrenci/öğretmen ile araştırmacı arasında dinamik bir süreç gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin dinamik olmasının sebebi ise, öğrencinin ya da öğretmenin verdiği cevapların nedenleri, araştırmacı tarafından anlaşılana kadar öğrenciye ya da öğretmene sorulmuş olmasıdır (Confrey, 1981). Ayrıca bu görüşme yapısı insanların gelişimsel ve öğrenimi ile ilgili aşamaların sosyal bir tabiata sahip olduğunu varsayan sosyokültürel teorilerle tutarlıdır (Güçler, 2016).

Görüşmede yer alan problemlerin matematiksel açıdan doğruluğuna, Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik programına (2010) ve öğrencilerin seviyesine uygunluğuna ve farklı temsil çeşitlerini içeren sorular (şekilli, sözel, vs.) olmasına dikkat edilmiştir. Ayrıca problemlerin geçerliliği -yani o kavramı sorgulatacak nitelikte olup olmadığı- ve denkliği açısından (Patton, 2002), iki matematik profesörü, iki matematik eğitimi alanında doktora öğrencisi ve bir matematik öğretmeni olmak üzere toplam beş kişiden uzman görüşü alınmıştır. Üç görüşme protokolünde yer alan yansıma sorularının soru tipi ve kavramsal açıdan denkliği için uzman görüşü formu hazırlanmıştır. Bu form aracılığıyla uzmanların soruların kavramsal açıdan geçerliliği ile denkliği ve lise öğrencilerin seviyelerine uygunluğu ile ilgili olarak görüşleri alınmıştır. Uzmanlardan alınan dönütler doğrultusunda soruların denkliği ve öğrenci seviyelerine uygunluğu ile ilgili olarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

Veri analizi

Ders gözlemleri, öğrencilerle ve öğretmenle yapılan görüşmelerin verilerini topladıktan sonra transkript edilmiştir. Görüşmelerin transkriptini hazırlarken katılımcıların eş zamanlı sözel ifadeleri, eylemleri ve görsel aracılarını belirtmek adına, “ne söylüyor?”, “ne yapıyor?” ve “ne çiziyor?” başlıklarının bulunduğu üç sütun oluşturulmuştur. “Ne söylüyor?” sütununda katılımcının sözel olarak ifade ettikleri, “ne yapıyor?” başlıklı sütununda gerçekleştirdikleri eylemler, “ne çiziyor?” sütununda ise çizdikleri görsel aracılar (geometrik çizimler, cebirsel notasyonlar gibi) yer almıştır. Sonrasında sırasıyla sözcük kullanımı, görsel aracılar, rutinler ve tasdik edilen anlatılarının analizi yapılmıştır.

Sözcük kullanımının analizi için yansıma kelimesinin geçtiği cümleler, bağlamıyla birlikte ya da bu kelimeler telaffuz edilmeden onlar hakkında konuşulan durumlar dikkate alınarak bir tablo oluşturulmuştur.

Daha sonra bu sözcük kullanımlarının dört hiyerarşik aşaması olan edilgen, rutin-bazlı, tabir-bazlı ve nesne-bazlı sözcük kullanımına göre analiz edilmiştir. Sözcük kullanımında ağırlıklı olarak kullanılanlar (örüntüler) belirlenerek katılımcıların sözcük kullanımları belirlenmiştir. Görsel aracıların analizi için transkript, araştırmacılar tarafından tekrar incelenerek, problemlerde verilen görsel aracılar ile katılımcıların kullandıklarının ayırt edilmesi amacıyla bir tablo oluşturulmuştur. Katılımcıların kullandıkları görsel aracılar veri analizinin diğer bileşenleri ile ilişkilendirilerek analiz edilmiştir. Sonrasında rutinler için katılımcıların kendini tekrar eden eylemlerinden oluşan genel rutin tablosu, her bir problem için eylemin nasıl gerçekleştirildiği ile birlikte oluşturulmuştur. Bu eylemler arasından katılımcılar tarafından düzenli olarak tekrarlananlar rutinler, rutinin ne olduğu, nasıl ve ne zaman gerçekleştirildiği açıklanarak verilmiştir. Son olarak tasdik edilen anlatıların analizi için transkript, detaylı bir şekilde incelenmiştir. Tespit edilen anlatılar, söylem içerisinde katılımcıların yansıma kavramı ile ilgili olarak doğru kabul ettiği argümanlardır. Katılımcıların anlatıları, sözcük kullanımlarında, rutinlerinde ve görsel aracılarında kullanılıp kullanılmadığı ve bu bileşenler tarafından da tasdik edilip edilmediği de incelenerek analiz edilmiştir.

Analizin doğruluk ve geçerliliği için matematiksel söylemlerin bileşenleri olan sözcük kullanımı, rutinler, görsel aracılar ve tasdik edilmiş anlatılar araştırmacılar tarafından önce ayrı ayrı analiz edilmiş ve sonrasında yapılan analizleri araştırmacılar birlikte incelemişlerdir (Creswell, 2007; Miles ve Huberman, 1994). Araştırmacılar tarafından ortak bir karara varılana kadar analizler üzerine tartışılmıştır ve incelenen analizler sonucunda %85 tutarlılık tespit edilmiştir.

BULGULAR

Bu bölümde, öğretmenin yansıma dönüşümüyle ilgili sınıf gözlemlerinden ortaya çıkarılan ve Okan ve Eda'nın yansıma dönüşümü ile ilgili ders öncesi (1. görüşme), dersin hemen sonrası (2. görüşme), ve yansıma dönüşümü tamamlandıktan sonra (3. görüşme) yapılan görüşmelerden elde edilen matematiksel söylemleri incelenmiştir. Bu matematiksel söylemlerin, sözcük kullanımı, görsel aracılar, rutinler ve tasdik edilen anlatılarına göre farklılıkları ve benzerlikleri ortaya çıkarılarak karşılaştırmalı bir analiz yapılmıştır. Analizin amacı, bu iki lise öğrencisinin yansıma dönüşümü ile ilgili matematiksel söylemlerinin gelişimini ve bu gelişimin öğretimle olan ilişkisini ortaya koymaktır.

Yapılan analizler sonucunda, öğretmenin söylemleri tanımlayıcı, öğrencilerin söylemleri ise gelişimsel olarak verilmiştir. Ayrıca Can öğretmen ile veri üçlemesi için yapılan görüşmedeki söylemleri ve gözlemdeki söylemlerinin birbiriyle örtüştüğü de ortaya çıkarılmıştır. Başka bir deyişle, Can öğretmenin görüşmesinde, sınıf gözlemlerinde olmayan ek söylemsel örüntüler bulunmamıştır. Örneğin, Can öğretmenin hem görüşmesinden hem de sınıf gözleminden elde edilen verilerde, yansıma ile ilgili sözcük kullanımının tabir-bazlı ve nesne-bazlı olduğu ve biri cebirsel diğeri geometrik olmak üzere iki aynı rutini kullandığı tespit edilmiştir.

Okan ile Can öğretmenin yansıma ile ilgili matematiksel söylemlerinin karşılaştırılması

Yapılan analizler sonucunda, Can öğretmen, Okan ve Eda'nın söylemlerinde edilgen-bazlı sözcük kullanımı tespit edilmemiştir. Can öğretmenin yansıma ile ilgili ders gözlemlerinde sözcük kullanımının ağırlıklı olarak nesne-bazlı (22 adet) ve tabir-bazlı (15 adet) olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Can öğretmenin az da olsa rutin-bazlı (6 adet) sözcük kullandığı tespit edilmiştir. Okan'ın ise yansımayla ilgili ders öncesindeki söylemlerinde sözcük kullanımı ağırlıklı olarak rutin-bazlı (14 adet) iken bunun yanı sıra tabir-bazlı (8 adet) ve nesne-bazlı (4 adet) sözcük kullanımı belirlenmiştir. Okan'ın ders sonrasındaki sözcük kullanımı ağırlıklı olarak tabir-bazlı (8 adet) iken bunun yanı sıra nesne-bazlı (4 adet) ve rutin-bazlı sözcük kullanımı (2 adet) tespit edilmiştir. Okan'ın son görüşmedeki matematiksel söylemlerindeki sözcük kullanımının ise ağırlıklı olarak nesne-bazlı (6 adet) iken bunun yanı sıra da tabir-bazlı (4 adet) ve rutin-bazlı (3 adet) olduğu tespit edilmiştir. Tablo 1'de, Okan ile Can öğretmenin sözcük kullanımlarına örnekler verilmiştir.

Tablo 1. Okan ile Can öğretmenin sözcük kullanımına dair örnekler

Rutin-bazlı sözcük kullanımı	**468.Okan (1. görüşme):** *C* noktasından bir yansıma alıyorum üçgenin yansımasını, *A* noktasının *C* ye olan uzaklığı *3* diyelim şuraya. Aynı eksende *3* daha gittim. *B*'nin de *C*'ye olan uzaklığını alıyorum. *B*'nin *C*'ye olan uzaklığı *5* birim. Yine aynı eksende *5* birim, burada *5* birim. *C* noktası yine *C*'de kaldı. *B* ile *C*'yi birleştiriyorum. Şurası B' bu arada şu iki uzaklık eşit, şu iki uzaklık eşit. *C* noktası gene *C*'de kaldı. Buna A' diyorum [$A'B'C'$ üçgenini çizdi]. Size noktaya olan uzaklık işte.
Tabir-bazlı sözcük kullanımı	**31.Öğretmen (Gözlem):** … Peki, formüle göre yapsak, dikkat şuradaki formülde, yansımasını aldığımız nokta *P* noktası, yansıma merkezi *M* noktası [$SM(P)=2M-P$ formülünde gösteriyor]… **201.Öğretmen (Gözlem):** …Bir cismin paralel iki doğruya göre yansıması, paralel doğrular arasındaki mesafenin iki katı kadar ötelenmesi demektir…
Nesne-bazlı sözcük kullanımı	**29.Öğretmen (Gözlem):** Tanım: Yansıma S. Peki yine bir fonksiyon tanımlayacağız, R^2 den R^2 ye olmak üzere [S_M: $IR^2 \rightarrow IR^2$], fonksiyonumuz şu, [$S_M(P)=2M-P$] şeklinde tanımlanan fonksiyona, P noktasının M noktasına göre, yansıma dönüşümü denir.

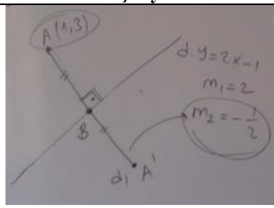
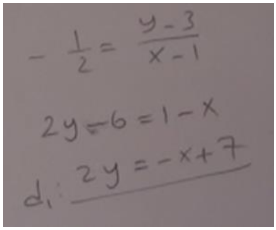
Can öğretmenin genel sözcük kullanımı nesnelleştirilmiş seviyede olmakla birlikte dersin başlangıcında verdiği cebirsel yansıma tanımı da göz önünde bulundurularak (Tablo 1), öğretiminde yansımayı bir fonksiyon olarak cebirsel yaklaşımla kullandığı gözlemlenmektedir. Okan'ın sözcük kullanımında ise ders sonrasında önemli değişiklikler gözlenmiştir. Okan'ın ilk görüşmedeki ağırlıklı rutin-bazlı sözcük kullanımı, ikinci ve üçüncü görüşmelerde ağırlıklı olarak tabir-bazlı ve nesne-bazlı sözcük kullanımına dönüşmüştür. Bu gelişim, öğretimle tutarlı olmasına rağmen Okan'ın tabir ve nesne-bazlı sözcük kullanımlarında yansımayı hiçbir zaman fonksiyon olarak ele almadığı ve yansımayı dinamik hareket olarak düşündüğü tespit edilmiştir.

Can öğretmenin görsel aracıları cebirsel notasyonlar, geometrik şekiller ve doğrulardan oluşmaktadır ve ağırlıklı olarak cebirsel yaklaşımı (16 adet) kullanmakla birlikte geometrik yaklaşımı (9 adet) da kullandığı belirlenmiştir. Okan'ın görsel aracıları ise geometrik şekiller ve cebirsel notasyonlardır. Okan'ın ders öncesi ağırlıklı olarak geometrik yaklaşımı (4 adet) izlediği, ders sonrasındaki görüşmede ise ağırlıklı olarak geometrik yaklaşımı (4 adet) kullanmakla birlikte az da olsa cebirsel yaklaşımı (1 adet) kullandığı ve son görüşmede de ağırlıklı olarak geometrik (4 adet) yaklaşımı izlediği tespit edilmiştir. Kısacası, Okan'ın görsel aracılarında kullandığı cebirsel yaklaşım, öğretimden etkilenmiş olarak kullanılsa da, bir örüntü teşkil etmemektedir ve Okan'ın genel söylemlerini etkilememiştir. Ders öncesinde yapılan görüşmede, Okan yansıma ekseni eğik verildiğinde bir cismin yansımasını almak için şeklin köşe noktalarının yansıma eksenine uzaklığını eşit fakat dik almadığı için zorluk yaşadığı tespit edilmiştir. Ders sonrasındaki ve son görüşmesindeki yansıma ekseninin eğik verildiği problemlerde ise, Okan'ın öğretmenin söylemiyle tutarlı olarak geometrik görsel aracılar kullandığı, şeklin köşe noktalarının yansıma eksenine uzaklığını eşit ve dik aldığı ve dolayısıyla zorluk yaşamadığı tespit edilmiştir.

Can öğretmenin biri cebirsel diğeri geometrik olmak üzere iki rutin kullandığı gözlemlenmiştir. Bu rutinler, "Cebirsel olarak verilen orta nokta formülü ile yansıma dönüşümü sonrasında oluşan şeklin köşe noktalarını buluyor ve şekli çiziyor (Can cebirsel rutin (C-CR))" ve "Şeklin her bir köşe noktasının yansıma ekseni/doğrusu/noktasına olan uzaklığına eşit ve dik uzaklıkta olan noktalarını görsel olarak belirleyip yansıma dönüşümü sonrasında oluşan şekli çiziyor (Can geometrik rutin (C-GR))"dır. Can öğretmenin kullandığı cebirsel rutine örnek olarak derste "$A(1,3)$ noktasının

$y=2x-1$ doğrusuna göre yansımasını bulunuz" problemini çözerken kullandığı yaklaşım Tablo 2'de verilmiştir.

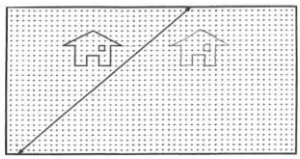
Tablo 2. Can öğretmenin derste kullandığı cebirsel rutine bir örnek

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?	Ne çiziyor?
103.Öğretmen(Gözlem): Şunu söyledik, eğimi ve bir noktası belli olan doğru nasıl bulunuyor, hatırlayın. Eğimi $-1/2$, bir noktası $(1,3)$ şöyleydi. y eksi 3 bölü x eksi 1, noktanın koordinatlarını sırayla çıkarıyorduk. İçler dışlar çarpımı yaptım. Buradan $2y=-x+7$ çıkmış oldu. Bakın bu, d_1 doğrusu yani şu doğru. Şimdi d_1 ve d_2 doğrularını biliyorum, bunların kesim noktası olan şu noktayı nasıl bulacaktım? Hatırlayın.	**103. Öğretmen:** Sınıf tahtasına d_1 ve d_2 doğrularını birbirine dik olacak şekilde çiziyor. Bir noktası $(1,3)$ ve eğimi $-1/2$, olan doğru denklemini hesaplamak için eğim formülünü yazıyor. İçler dışlar çarpımı yaparak doğru denklemini $2y=-x+7$ olarak buluyor. Sınıf tahtasına daha önceden çizdiği d_1 ve d_2 doğrularını gösteriyor.	 
104.Sınıf: Orta nokta. **105.Öğretmen (Gözlem):** Orta nokta, değil mi oradan çözülür. Yani $2y=-x+7$ ile $y=2x-1$ i ortak çözeceğim. En kolay yolu buradaki y değerini alıp, burada yerine yazmaktır. $x=3$, peki şurada x yerine 3 yazarsanız, y kaç çıkar? 5, işte bu bulduğum $(3,5)$ şu nokta. B noktası $(3,5)$. Bundan sonra işimiz kolay, A, B, A' noktaları orta nokta olduğuna göre, şuna a ve b değerleri verirsem, a ile 1 in toplamının yarısı 3 e eşit oldu, b ile 3 ün toplamının yarısı 5 e eşit oldu. Yani $a=5, b=7$. Dolayısıyla, A' noktası $(5,7)$	**105.Öğretmen:** $2y=-x+7$ ile $y=2x-1$ denklemlerini orta çözerek kesim noktası olan orta noktayı $B(3,5)$ olarak buluyor. $A(1,3)$ orta nokta olan $B(3,5)$iken orta nokta formülünü kullanarak A' noktasını $(5,7)$ olarak hesaplıyor.	

Okan'ın ders öncesindeki görüşmede "Şeklin her bir köşe noktasının yansıma ekseni/doğrusu/noktasına olan uzaklığına eşit uzaklıkta olarak algılanan noktalarını görsel olarak belirleyip yansıma dönüşümü sonrasında oluşan şekli çiziyor (Okan geometrik rutin O-GR1)" rutinini kullanmıştır. Okan ders sonrasında ve son görüşmede ise ikinci bir geometrik rutin (Okan geometrik rutin O-GR2 kullanmıştır (O-GR2 rutini ile C-GR rutini ayni rutinlerdir). Okan'ın ders öncesi kullandığı O-GR1 rutininde yer alan matematiksel hataların eğik bir doğruya göre yansıma alırken ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Fakat öğretimden sonra Okan'ın O-GR1 rutinini kullanmadığı, onun yerine matematiksel olarak doğru olan ve öğretmenin öğretimiyle tutarlı olarak O-GR2 rutinini kullandığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, Okan'ın söylemlerine öğretmenin kullandığı cebirsel rutini değil geometrik rutini adapte ettiği ve rutinlerinde geometrik yaklaşımı kullanmaya eğilimli olduğu gözlemlenmiştir.

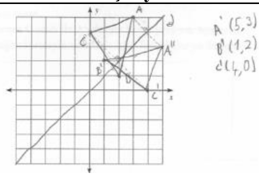
Okan'ın ders öncesindeki söylemlerinde yansıma ekseni eğik verildiğinde, bir cismin yansımasını almakta zorluk yaşadığı O-GR1 rutininde tespit edilmiştir. Örneğin, yansıma ekseni eğik verildiğinde, Okan bir cismin yansımasını alırken, şeklin bir köşe noktasının yansıma eksenine uzaklığını eşit fakat dik almadığı gözlemlenmiştir (Tablo 3).

Tablo 3. Okan'ın yansıma dersi öncesinde kullandığı GR1 rutinine örnek

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?	Ne çiziyor?
667.Okan(1.görüşme): 1-2-3-4. 1-2-3-4. Burası buraya gelecek.	**667.Okan:** Şeklin köşe noktalarının doğruya olan uzaklığına görsel olarak eşit algıladığı uzaklıkta diğer tarafında noktaların yerini belirliyor. Sonrasında şeklin belli özelliklerinin değişmeyeceği özelliğini kullanarak noktaların arasındaki uzaklıkları hesaplayıp, doğrunun diğer tarafına şeklin yansımasını çiziyor.	

Okan'ın O-GR2 geometrik rutinini örneklemek amacıyla ikinci görüşmede "Köşeleri $A(3,5), B(2,1), C(0,4)$ olan ABC üçgeninin $y = x$ doğrusuna göre yansıması olan şekli koordinat düzleminde çizerek gösteriniz." problemini çözerken kullandığı yaklaşım Tablo 4' de gösterilmiştir.

Tablo 4. Okan'ın ikinci görüşmede kullandığı geometrik rutine bir örnek

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?	Ne çiziyor?
68.Okan(2.görüşme): … Noktalarını yazayım *A* üçgeninin $(3{,}5)$ *A* noktası, *B* noktası $(2{,}1)$, *C* de $(0{,}4)$ **70.Okan(2.görüşme):** C. Evet, güzel. Şimdi x doğrusuna göre yansımasını alacağım. Şuna d doğrusu diyeyim . Alıyorum yansımasını. Yeni noktaları gösteriyorum, B' . Yazarım şimdi hatta. Önce göstereyim. […] A mız şuraya geldi. **71.Araştırmacı:** Nasıl belirledin A' ile B' yü? **72.Okan(2.görüşme):** A' ile B' nü d doğrusuna dik bir şekilde indirdim. A noktasına, geldiğim mesafe kadar bir mesafe daha gittim o noktaya geldim **73.Araştırmacı:** B' nü de aynı şekilde buldun? **74.Okan(2.görüşme):** Evet aynı şekilde. Neden dik indiriyorum? Çünkü en yakın noktası dik olduğu nokta. Daha uzak bir nokta alırsam hiçbir şey olmaz, saçma olur yani. Şimdi buradan da yine dik indireceğim, güzel. Yeni üçgen şu. Yazayım onları da, $1-2-3-4-5, 1-2-3$ $(5{,}3)$ B' miz $(1{,}2), C'$ de $(4{,}0)$.	**68. Okan:** A, B, C noktalarının yerlerini koordinat sisteminde işaretliyor. **70.Okan:** A, B, C köşe noktalarını birleştirerek ABC üçgenini oluşturuyor. $y = x$ doğrusunu d olarak isimlendiriyor. d doğrusuna göre yansımasını alarak B' noktasının yerini işaretliyor. d doğrusuna göre yansımanı alarak, A' noktasının yerini işaretliyor. **72.Okan:** A noktası ile d doğrusu arasındaki uzaklığı çiziyor, aynı uzaklık kadar devam edip A' noktasına geliyor. **74.Okan:** C' noktasının yerini işaretliyor. A' , B' , C' köşe noktalarını birleştirerek $A'B'C'$ oluşturuyor. Koordinat sisteminde noktanın koordinatlarını belirlemek için sayıyor $1-2-3-4-5, 1-2-3$ …, A', B', C' köşe noktalarını yazıyor.	

Okan O-GR2 rutininde verilen geometrik şeklin yansımasını alırken "en yakın noktası dik olduğu nokta" olduğunu belirterek, öğretim sonrası rutinlerinde kavramsal bir gelişim göstermektedir.

Can öğretmenin, derste kullandığı anlatılarından birisi Tablo 1'de verilen yansıma tanımıdır. Bu tanıma göre Can öğretmenin yansımayı cebirsel notasyonlar aracılığıyla bir fonksiyon olarak tanımladığı görülmektedir. Bu tanımla birlikte Can öğretmenin yansımayı "Yansıma, iki nokta arasındaki uzaklıktan ortaya çıkan bir formüldür" şeklinde cebirsel olarak ifade eden anlatılar kullanmasının yanı sıra , "Noktanın doğruya göre yansıması, noktanın doğruya olan uzaklığı kadar aynı oranda diğer tarafa alınması demektir" şeklinde geometrik yaklaşımlar içeren anlatılar da kullandığı tespit edilmiştir. Okan'ın ise öğretimde kullanılan geometrik yaklaşımlar içeren anlatıyla tutarlı olarak yansımayı geometrik yaklaşımlarla ifade eden anlatılar kullandığı görülmektedir. Okan'ın yansıma dersi öncesindeki anlatısı: "Yansıma, iki nokta arasındaki uzaklığı korur, alanı korur, çevreyi korur. Noktaların yansıma eksenine olan uzaklıklarını korur. Konumunu korumaz" dır. Okan'ın ders sonrasındaki ve son görüşmede kullandığı anlatılarından birisi ise "yansıma bir dönüşümdür." Can öğretmenin yansıma ile ilgili tasdik edilen anlatılarında yansımayı bir fonksiyon olarak ele aldığı ve ağırlıklı olarak cebirsel yaklaşımı kullandığı gözlemlenmiştir. Okan'ın ise yansımayla ilgili ders sonrasındaki ve son görüşmedeki tasdik edilen anlatılarının geometrik yaklaşımlar içerdiği tespit edilmiştir.

Tablo 5'te Can öğretmenin sınıf bağlamında yansıma ile ilgili söylemleri ile Okan'ın 1., 2. ve 3. görüşmesindeki yansıma ile ilgili söylemleri sözcük kullanımı, görsel aracılar, rutinler ve tasdik edilen anlatılarına göre karşılaştırılmalı bir şekilde verilmiştir.

Tablo 5. Can öğretmen ile Okan'ın yansıma ile ilgili söylemlerinin karşılaştırılması

	Can öğretmenin Söylemleri	Okan'ın Söylemleri		
		1.görüşme	2.görüşme	3.görüşme
Sözcük kullanımı	Tabir-bazlı ve nesne-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak rutin-bazlı sözcük kullanımı, bunun yanı sıra nesne-bazlı ve tabir-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak tabir-bazlı sözcük kullanımı, bunun yanı sıra nesne-bazlı ve rutin-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak nesne-bazlı sözcük kullanımı, bunun yanı sıra da tabir-bazlı ve rutin-bazlı sözcük kullanımı
Görsel aracılar	Cebirsel notasyonlar, doğrular ve geometrik şekiller (geometrik ve cebirsel yaklaşım)	Geometrik şekiller (geometrik yaklaşım)	Geometrik şekiller ve cebirsel notasyonlar (geometrik ve cebirsel yaklaşım)	Geometrik şekiller (geometrik yaklaşım)
Rutinler	C-CR, C-GR	O-GR1, O-GR2	O-GR2	O-GR2
Tasdik edilen Anlatılar	Yansıma tanımı (Tablo 1) "Yansıma, iki nokta arasındaki uzaklıktan ortaya çıkan bir formüldür." "Noktanın doğruya göre yansıması, noktanın doğruya olan uzaklığı kadar aynı oranda diğer tarafa alınması demektir."	"Yansıma, iki nokta arasındaki uzaklığı korur, alanı korur, çevreyi korur." "Noktaların yansıma eksenine olan uzaklıklarını korur. Konumunu korumaz."	"Yansıma bir dönüşümdür."	"Yansıma bir dönüşümdür."

Sonuç olarak, (öğretimden sonra) hem Okan hem de Can öğretmen yansımayı ağırlıklı olarak tabir ve nesne-bazlı ele alsa da yansıma kavramı, Okan için geometrik bir dönüşümü, Can öğretmen için ise cebirsel bir fonksiyonu temsil etmiştir. Can öğretmen, görsel aracılarında hem geometrik hem de cebirsel yaklaşımı kullanırken, Okan'ın ders öncesinde ve son görüşmelerde sadece geometrik yaklaşımı kullandığı fakat dersin hemen sonrasında yapılan görüşmede öğretimle tutarlı olarak geometrik şekiller ve söylemlerinde örüntü teşkil etmese de cebirsel notasyonlar içeren görsel aracılar kullandığı tespit edilmiştir. Can öğretmen matematiksel söylemlerinde geometrik (C-GR) ve cebirsel (C-CR) olmak üzere iki farklı rutin kullanırken, Okan'ın sadece geometrik rutin (O-GR1 ve O-GR2) kullandığı belirlenmiştir. Okan'ın ilk görüşmesinde kullandığı matematiksel olarak geçerli olmayan O-GR1 rutinini, öğretimden sonra yapılan ikinci ve üçüncü görüşmede kullanmadığı, bunun yerine öğretimden sonra Can öğretmenin geometrik rutiniyle tutarlı olarak O-GR2 rutinini kullandığı tespit edilmiştir. Türkiye'de kullanılan matematik öğretim programının spiral yapısından dolayı Okan 9. sınıfta yansıma kavramını geometrik yaklaşımlarla bir hareket olarak öğrenmiştir ve 10. sınıfta yansımanın cebirsel yaklaşımlarla bir fonksiyon olarak öğretimin, Okan'ın eski öğrenmelerini değiştirmediği görülmektedir.

Eda ile Can öğretmenin yansıma ile ilgili matematiksel söylemlerinin karşılaştırılması

Can öğretmenin sözcük kullanımında ağırlık olarak nesne-bazlı (22 adet) ve tabir-bazlı (15 adet) iken az da olsa rutin-bazlı (6 adet) sözcük kullandığı tespit edilmiştir. Eda'nın yansımayla ilgili ders öncesindeki söylemlerinde sözcük kullanımı ağırlıklı olarak rutin-bazlı (6 adet) iken bunun yanı sıra tabir-bazlı sözcük kullanımı (3 adet) ve nesne bazlı sözcük kullanımı (1 adet) belirlenmiştir. Ders sonrasındaki sözcük kullanımı ağırlıklı olarak tabir-bazlı (6 adet) iken bunun yanı sıra rutin-bazlı (5 adet) ve az da olsa nesne-bazlı sözcük kullanımı (1 adet) tespit edilmiştir. Son görüşmedeki sözcük kullanımı ağırlıklı olarak nesne-bazlı (5 adet) ve tabir-bazlı (5 adet) iken bunun yanı sıra rutin-bazlı sözcük kullanımı (2 adet) da belirlenmiştir. Tablo 6'da, Eda'nın sözcük kullanımları seviyelere göre örneklendirilerek verilmiştir. Can öğretmenin sözcük kullanımının nesnelleştirilmiş seviyede olduğunu daha önce konuşmuştuk, öğretmenin sınıfta Tablo 1'de verildiği gibi yansımayı nesne bakış açısıyla cebirsel bir fonksiyon olarak kullandığı gözlemlenmiştir. Eda'nın sözcük kullanımında ise ders öncesinde ağırlıklı olarak geometrik yaklaşımlar içeren rutin-bazlı kelimeler mevcutken, yansıma dersi sonrasında ise öğretimle tutarlı olarak sözcük kullanımında cebirsel yaklaşımı rutin ve tabir-bazlı sözcüklerle, üçüncü görüşmede ise ağırlıklı olarak tabir ve nesne-bazlı sözcüklerle kullandığı tespit edilmiştir.

Tablo 6. Eda'nın sözcük kullanımına dair örnekler

Rutin-bazlı sözcük kullanımı	**149.Eda (3.görüşme):** …. Ama hani şuraya bir nokta versem [koordinat sisteminin III. bölgesinde bir nokta işaretliyor], ve bu noktaya göre yansımasını alsak, gene aynı şekilde 1 birim, şurası 2 birim uzaksa, 2 birim uzak gene, şöyle çizilmiş olacak, B',A',C',D' [yansıma sonrası oluşan dikdörtgeni koordinat sisteminin III. bölgesinde çiziyor ve köşe noktalarını $B',A',\ C'$ ve D' olarak adlandırıyor].
Tabir-bazlı sözcük kullanımı	**117.Eda (3.görüşme):** Yansıma deyince hani aynada mesela yansımamızı görüyoruz. Aklıma direkt hani yansıma deyince ayna geliyor.
Nesne-bazlı sözcük kullanımı	**141.Eda (1.görüşme):** Yansıma, bir şeklin koordinat sistemindeki bir şeklin *x* ya da *y* doğrusuna göre aynı birim uzaklıktaki çizimi, görüntüsüdür.

Can öğretmenin görsel aracıları cebirsel notasyonlar, geometrik şekiller ve doğrulardan oluşmaktadır ve ağırlıklı olarak cebirsel yaklaşımı (16 adet) kullanmakla birlikte geometrik yaklaşımı (9 adet) da kullandığı belirlenmiştir. Eda'nın görsel aracıları ise geometrik şekiller, doğrular ve cebirsel notasyonlardan oluşmaktadır ve ağırlıklı olarak geometrik yaklaşımı ders öncesi (4 adet), ders sonrası (4 adet) ve son görüşmede (4 adet) izlediği tespit edilmiştir. Buna ek olarak öğretimden sonra Eda'nın cebirsel yaklaşımı da kullandığı gözlemlenmiştir. Eda'nın ikinci (3 adet) ve son görüşmesinde (1 adet) cebirsel doğru denklemlerini kullandığı belirlenmiştir. Eda'nın son görüşmesinde cebirsel notasyonları 1 kere kullandığı ve bunun söylemlerinde genel bir örüntü teşkil etmediği gözlemlenmiştir. Eda'nın ders öncesindeki söylemlerinde yansıma ekseni eğik verildiğinde, bir cismin yansımasını almak için zorluk yaşadığı görsel aracılarında tespit edilmiştir. Eda'nın ders öncesindeki görsel aracılarında, yansıma ekseni eğik verildiğinde bir cismin yansımasını alırken, şeklin köşe noktalarını yansıma eksenine uzaklığı eşit fakat dik almadığı gözlemlenmiştir. Fakat ders sonrasındaki söylemlerinde yansıma ekseni eğik verildiğinde, Eda'nın öğretimle tutarlı olarak öğretmenin derste kullandığı cebirsel doğru denklemini kullandığı ve bir cismin yansımasını almakta zorluk yaşamadığı tespit edilmiştir.

Can öğretmenin rutinlerinde, görsel aracılarıyla tutarlı olarak hem cebirsel hem de geometrik yaklaşımı benimsediği tespit edilmiştir. Bu rutinler, C-CR cebirsel rutini ve C-GR geometrik rutinidir. Eda'nın ise yansıma dönüşümüyle ilgili ders öncesi E-GR1 ve E-GR2 geometrik rutinlerini, ders sonrası geometrik rutin olan E-GR2 ve cebirsel rutin olan E-CR'yi ve son görüşmede ise sadece geometrik rutin olan E-GR2'yi kullandığı tespit edilmiştir. E-GR2 ile C-GR ve E-CR ile C-CR aynı rutinlerdir. Ayrıca Eda'nın ders öncesinde yansıma ekseni eğik verildiğinde bir cismin yansımasını almak için kullandığı ve matematiksel olarak geçerli olmayan E-GR1 rutinini, öğretimden sonra kullanmadığı onun yerine matematiksel olarak geçerli olan öğretmenin öğretimiyle tutarlı olarak E-GR2 rutinini kullanmayı tercih ettiği görülmektedir. Eda'nın kullandığı E-GR1 rutininin Tablo 3'te verilen Okan'ın O-GR1 rutinine benzer olduğu gözlemlenmiştir[2]. Eda'nın öğretimle tutarlı olarak ders sonrası öğretmenle aynı rutinleri (E-GR2 ve E-CR) kullandığı belirlenmiştir. Eda'nın ders sonrasında öğretmenin cebirsel rutinini kullansa da bu cebirsel rutini son görüşmede kullanmadığı tespit edilmiştir.

Eda'nın ders öncesinde kullandığı anlatıları: "Yansımada şeklin boyutunu koruyor, fakat şeklini korumuyor" ve "Yansıma, bir şeklin koordinat sistemindeki bir şeklin *x* ya da *y* doğrusuna göre aynı birim uzaklıktaki çizimi, görüntüsüdür."dir. Can öğretmenin, geometrik yaklaşım içeren "Noktanın doğruya göre yansıması, noktanın doğruya olan uzaklığı kadar aynı oranda diğer tarafa alınması demektir" anlatısına benzer olarak "Yansıma, bir şeklin koordinat sistemindeki bir şeklin *x* ya da *y* doğrusuna göre aynı birim uzaklıktaki çizimi, görüntüsüdür" anlatısını Eda'nın da birinci görüşmesinde kullandığı tespit edilmiştir. Eda'nın ders sonrasında kullandığı anlatısı ise "Yansımada, şeklin boyutu ve şeklini korur ama yönleri değişir"dir. Eda'nın son görüşmede kullandığı anlatısı ise "Yansıma, şeklin yönünü korumuyor; fakat şeklini ve boyutunu koruyor"dur. Can öğretmenin yansıma ile ilgili tasdik edilen anlatılarında yansımayı bir fonksiyon olarak nesne bakış açısıyla ele aldığı ve ağırlıklı olarak cebirsel yaklaşımı kullandığı gözlemlenmiştir. Eda'nın ise tasdik edilen anlatılarının Can öğretmenin geometrik yaklaşımlar içeren anlatısıyla benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Sonuç olarak, Eda yansımayı daha çok geometrik şekillerin hareketi olarak ele alırken, Can öğretmen yansımayı bir fonksiyon olarak ele almaktadır. Tablo 7'de Can öğretmenin yansıma ile ilgili söylemleri ile Eda'nın 1., 2. ve 3. görüşmedeki matematiksel söylemleri sözcük kullanımı, görsel aracılar, rutinler ve anlatılarına göre karşılaştırılmalı bir şekilde verilmiştir.

---

[2] Eda'nın kullandığı tüm rutinler Can öğretmenin ve Okan'ın rutinleri ile benzediği için ve Can öğretmen ile Okan'ın rutinlerini daha önce örneklendirdiğimiz için burada Eda'nın rutinleri için örnek sunmadık.

Tablo 7. Can öğretmen ile Eda'nın yansıma ile ilgili söylemlerinin karşılaştırılması

	Can öğretmenin Söylemleri	Eda'nın Söylemleri		
		1.görüşme	2.görüşme	3.görüşme
Sözcük kullanımı	Tabir-bazlı ve nesne-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak rutin-bazlı, bunun yanı sıra tabir-bazlı ve nesne-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak tabir-bazlı, bunun yanı sıra rutin-bazlı ve az da olsa nesne-bazlı sözcük kullanımı	Ağırlıklı olarak nesne-bazlı ve tabir-bazlı ve bunun yanı sıra da rutin-bazlı sözcük kullanımı
Görsel aracılar	Cebirsel notasyonlar, doğrular ve geometrik şekiller (geometrik ve cebirsel yaklaşım)	Geometrik şekiller (geometrik yaklaşım)	Geometrik şekiller ve cebirsel notasyonlar (geometrik ve cebirsel yaklaşım)	Geometrik şekiller ve cebirsel notasyonlar (geometrik ve cebirsel yaklaşım)
Rutinler	C-GR, C-CR	E-GR1, E-GR2	E-GR2, E-CR	E-GR2
Tasdik edilen Anlatılar	Yansıma tanımı (Tablo1) "Yansıma, iki nokta arasındaki uzaklıktan ortaya çıkan bir formüldür". "Noktanın doğruya göre yansıması, noktanın doğruya olan uzaklığı kadar aynı oranda diğer tarafa alınması demektir."	"Yansımada şeklin boyutunu koruyor, fakat şeklini korumuyor." "Yansıma, bir şeklin koordinat sistemindeki bir şeklin *x* ya da *y* doğrusuna göre aynı birim uzaklıktaki çizimi, görüntüsüdür."	"Yansımada, şeklin boyutu ve şeklini korur ama yönleri değişir."	"Yansıma, şeklin yönünü korumuyor; fakat şeklini ve boyutunu koruyor."

Sonuç olarak, (öğretimden sonra) hem Eda hem de Can öğretmen yansımayı ağırlıklı olarak tabir ve nesne-bazlı ele alsa da yansıma kavramı, Eda için geometrik bir dönüşümü, Can öğretmen için ise cebirsel bir fonksiyonu temsil etmiştir. Can öğretmen, görsel aracılarında hem geometrik hem de cebirsel yaklaşımı kullanırken, Eda'nın görsel aracılarında ders öncesindeki görsel aracılarında sadece geometrik yaklaşım kullanırken, ders sonrasında yapılan görüşmelerde hem geometrik hem de cebirsel yaklaşımı kullandığı tespit edilmiştir. Eda'nın öğretimle tutarlı olarak, yansıma dersi sonrasında Can öğretmenin söylemlerine benzer cebirsel notasyonlar içeren görsel aracılar kullandığı gözlemlenmiştir. Eda öğretim öncesi yansıma ekseni eğik verildiğinde matematiksel olarak geçerli olmayan E-GR1 rutinini kullanırken, öğretim sonrası öğretmenin rutinleriyle tutarlı olarak matematiksel olarak doğru olan E-GR2 rutinini kullandığı tespit edilmiştir. Ayrıca Eda öğretim öncesi cebirsel rutin kullanmazken, öğretmenin söylemlerindeki cebirsel rutini öğretimden hemen sonra kullandığı fakat son görüşmede kullanmayı tercih etmediği belirlenmiştir.

TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmanın amacı, iki lise öğrencisinin yansıma dönüşümü ile ilgili matematiksel söylemlerinin gelişimini öğretim bağlamında araştırmaktır. Çalışmanın sonuçları göstermiştir ki öğrenciler, Can öğretmenin belirli söylemsel bileşenlerini kendi söylemlerine adapte ederken, öğretmenin diğer söylemsel ögelerinin ya farkına varamamışlar ya da söylemlerine adapte etmeyi seçmemişlerdir. Bu bağlamda, öğretimin, bu iki öğrencinin gelişimine katkısı olmasına rağmen, bu gelişim öğrenciden öğrenciye süreç ve içerik olarak farklılıklar göstermiştir. Öğrencilerin yansıma dönüşümünü, geometrik dönüşümler öğrenme alanı içinde öteleme ve dönme dönüşümlerinden sonra öğrendiklerinden dolayı dönüşüm geometrisine aşina olduklarından ötürü söylemlerinin her üç görüşmede de benzerlik gösterdiği söylenebilir. Öğrencilerin öteleme ile ilgili söylemlerinde sözcük kullanımı ve rutinlerinde daha farklı bir gelişim izledikleri, üç görüşmedeki söylemlerinin farklılık gösterdiği ve nesnelleştirilmiş seviyeye ulaştıkları tespit edilmiştir (Emre-Akdoğan, Güçler ve Argün, 2018). Buradan da gelişimin konuma ve öğretim sürecine bağlı olarak farklılık gösterebileceği söylenebilir. Literatüre benzer olarak, yansıma ekseni dik veya yatay verildiğinde öğrencilerin zorluk yaşamadıkları fakat eğik verildiğinde öğrencilerin şeklin yansımasını bulmada zorluk yaşadıkları belirlenmiştir (Hollebrands, 2004; Hoyles ve Healy, 1997; Mhlolo ve Schäfer, 2014; Panaoura, Elia, Stamboulides ve Spyrou, 2009; Xioustri, 2007). Öğrencilerin ders sonrasındaki söylemlerinde, bir cismin yansımasını almak için yansıma eksenine/doğrusuna eşit uzaklığı dik olarak aldıkları için yansıma ekseni eğik verildiğinde literatürün aksine zorluk yaşamadıkları tespit edilmiştir. Can öğretmenin öğretiminde yansıma ekseninin eğik, yatay ve dikey bir şekilde verildiği farklı problemleri hem cebirsel hem de geometrik yaklaşımlarla vermesi, öğrencilerin kavramın zorluğunun üstesinden gelmelerine yardımcı olduğu tespit edilmiştir. Benzer şekilde, araştırmacılar da öğrencilere yansıma kavramı ile ilgili daha başarılı olmaları için geometrik şekilleri farklı perspektiflerden yansıtmaları için fırsatlar verilmesini önermektedir (Hoyles ve Healy, 1997; Son, 2006; Son ve Sinclair, 2010).

Can öğretmenin, yansıma dönüşümünü üst seviyede fonksiyon olarak öğrettiği gözlemlenmiştir. Bunun nedenlerinden biri, öğrencilerin dönüşümleri daha önceden fonksiyon olarak gördüklerini varsayması olabilir. Bir diğer açıklama ise, öğretmen 6., 7., 8. ve 9. sınıfta öğrencilerin dönüşümleri hareket olarak öğrendiğini bilmekte, fakat bu bilgisi öğretiminde öğrencileri yönlendirmesine yardımcı olamamaktadır. Can öğretmenin yansıma dönüşümünü fonksiyon olarak tanımladığı ve sınıf içinde kullandığı cebirsel ve geometrik rutinlerle yansıma dönüşümünü, hem cebirsel hem de geometrik olarak kullandığı görülmektedir. Öğrencilerin matematiksel söylemlerinin gelişimleri incelendiğinde, Okan'ın, öğretmenin yansımayı fonksiyon olarak tanımladığı cebirsel rutinini hiçbir zaman kendi söylemlerinde kullanmadığı, Eda'nın ise öğretim sonrası öğretmenin kullandığı cebirsel rutini kullanmasına rağmen son görüşmede tekrardan eski öğrenmelerinde yer alan geometrik rutinini kullandığı gözlemlenmiştir. Kısacası, Eda ve Okan'ın yansıma dönüşümünü öğretmenin söylemlerinde kullandığı şekilde fonksiyon olarak söylemlerine adapte edemedikleri ve matematiksel söylemlerinde yansımayı hareket olarak kullandıkları görülmektedir. Yapılan araştırmalar da göstermektedir ki, öğrencilerin dönüşümler geometrisini bir hareket olarak yorumlaması ile birlikte fonksiyon olarak ele alması oldukça önemlidir ve fonksiyonlar kavramı, dönüşümler öğrenme alanının öğrenilmesinde temel bir öneme sahiptir (Flagan, 2001). Öğrenciler, öğretimden önce bildikleri hareket-bazlı rutinlerin geçerliliklerini koruduğu durumlarda, Can öğretmenin cebirsel rutinlerini uygulayabilmelerine rağmen söylemlerine kalıcı bir şekilde adapte etmeyi seçmemiş olabilirler. Yani öğrencilerin daha önceki bilgi seviyesi bu bulguları açıklayan ögelerden biri olabilir (Lavie, Steiner ve Sfard, 2018). Bulguları açıklayan diğer nedenler ise öğretmenin yansıma kavramı üzerine matematiksel söylemlerinin öğrenciler için yeterince açık ve anlaşılır olmaması (Güçler, 2013) ve söylemde üstü kapalı kalabilecek ögeleri sınıf içinde öğrencilerle tartışmaması olabilir (Güçler, 2016). Öğretmenin, öğrencilerin eski öğrenmelerini göz ardı ettiği ve öğrencilere yansıma dönüşümünü hareket temelli öğrenmeden fonksiyon olarak öğrenmeye nasıl geçiş yapmaları konusunda yardımcı olamadığı görülmüştür. Benzer sonuçların Eda ve Okan'ın öteleme ile ilgili söylemlerinde ne tür zorluklara neden olduğu, daha önceki bir çalışmada ayrıntılı olarak ortaya konmuştur (Emre-Akdoğan, Güçler ve Argün, 2018).

Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım teorisi bu çalışma kapsamında öğretimin ve öğrenmenin durumsal ve söylemsel yapısı ile ilgili önemli perspektifler sunmuştur. Bu teori, öğretmen ve öğrencilerinin söylemlerinin nasıl farklılıklar gösterebileceğini ve hangi söylemsel bileşenlerin sınıfta iletişim eksikliğine işaret edebileceği konusunda gerekli analitik araçları temin etmiştir. Bu teori ayrıca sınıf ortamındaki matematiksel iletişimin öneminin altını çizmemize yardımcı olmuştur. Öğretmenlerin, öğrencilerin kavramlarla ilgili zorluk yaşamamaları için söylemlerini açık ve anlaşılır yapmaları oldukça önemlidir (Güçler, 2016). Bu çalışma göstermektedir ki, öğrenciler öğretmenin söylemlerinde açık ve anlaşılır buldukları ögeleri kendi söylemlerine adapte edebilmektedirler. Örneğin, hem Eda hem de Okan öğretmenin derste kullandığı matematiksel olarak doğru olan geometrik rutini, ders öncesi kullandıkları matematiksel olarak geçerli olmayan rutinin yerine adapte etmişlerdir. Fakat öğretmenin söylemlerindeki bileşenler öğrenciler için açık ve anlaşılır değilse, kendi söylemlerine adapte etmedikleri ortaya konulmuştur. Örneğin, Okan öğretmenin derste kullandığı cebirsel rutini yansıma ile ilgili genel söylemlerine adapte etmemiştir. Bu bağlamda, öğretmenler, sınıfta söylemlerini nasıl açık yapabilecekleri ve iletişimsel çelişkileri önleyebileceklerine dair eğitilebilirler. Öğrencilerin dönüşümlerle ilgili gelişim süreçlerini göz önünde bulundurularak dersler tasarlanıp öğrenme durumları uygulanabilir. Eğer bu çalışmalardan olumlu sonuçlar alınırsa bu konuda öğretmenleri eğitmeye yönelik çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

Bulf, C. (2010). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French secondary school. Proceedings of CERME, Volume 6 (pp. 726–735).

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research, 51–52,* 45–65.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., and Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *Elementary School Journal*, *98*(2), 171–186.

Confrey, J. (1981). *Using the clinical interview to explore student's mathematical understandings.* The annual meeting of the American Educational Research Association kongresinde sunulmuş bildiri, Los Angeles.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

DeJarnette, A. F., Gonzalez, G., Deal, J. T., & Rosado Lausell, S. (2016). Students' conceptions of reflective symmetry: Opportunities for making connections with perpendicular bisector. *Journal of Mathematical Behavior, 43,* 35–52.

Edwards, L. D. (2003). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science.* Paper presented at the Third Conference of European Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Emre-Akdoğan, E., Güçler, B., & Argün, Z. (2018). The development of two high school students' discourses on geometric translation in relation to the teacher's discourse in the classroom. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(5), 1605-1619.

Flanagan, K. A. (2001). *High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment*. Doktora Tezi, The Pennsilvanya State University, Pennsilvanya.

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 375-393.

Güçler, B. (2016). Matematiksel Bilişe İletişimsel Yaklaşım. Editör: E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat, *Matematik Eğitiminde Teoriler* (ss. 629-641). Ankara: Pegem.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 439-453.

Hacısalihoğlu-Karadeniz, M., Baran, T., Bozkuş, F. & Gündüz, N. (2015). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının yansıma simetrisi ile ilgili yaşadıkları zorluklar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(1), 117-138.

Hollebrands, K. F. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 55–72.

Hollebrands, K. F. (2004). High school students' intuitive understandings of geometric transformations. *Mathematics Teacher, 97*(3), 207–214.

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 2*(1), 27-59.

Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the geometry curriculum. B. Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education*. Auckland, New Zealand.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast, 1*(1), 3-8.

Küchemann D. (1981). Reflection and rotation. In Hart K (Ed.) *Children's understanding of mathematics* (pp. 137-157). London: John Murray.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, O. (2000). Applications of symmetry to problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 799-809.

Mhlolo, M. K., & Schäfer, M. (2014). Potential Gaps during the Transition from the Embodied through Symbolic to Formal Worlds of Reflective Symmetry. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 18* (2), 125-138.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: A sourcebook of new methods (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2010). *Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ortaöğretim geometri dersi (9-10.sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013). *Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ortaöğretim matematik dersi (9.-12.sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.

Miyakawa, T. (2004). Reflective symmetry in constructions and proving. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting ofthe international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3) (pp. 337–344).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.

Panaoura, A., Elia, I., Stamboulides, N., & Spyrou, P. (2009). Students' structure for the understanding of the axis of symmetry in mathematics. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 9*, 41-62.

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Portnoy, N., Grundmeimer, T. A., & Graham, K. J. (2006). Students’ understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 196–207.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3) 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse–Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51–52*, 1–9.

Son, J.-W., & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics, 11*(1), 31–46.

Son, J.-W. (2006). Investigating preservice teachers’ understanding and strategies on a student’s errors of reflective symmetry. In J. Novotná, H. Moraová,M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5) (pp.145–152).

Tatar, E., Akkaya, A. and Kağizmanli, T. B. (2014). Using dynamic software in mathematics: the case of reflection symmetry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45* (7), 980-995.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University.

Yanik, H. B. (2006). *Prospective elementary teachers’ growth in knowledge and understanding of rigid geometric transformations.* Doktora Tezi, Arizona State University, Arizona.

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Designs and methods.* Newbury Park, CA: Sage.

Xistouri, X. (2007). *Students' ability in solving line symmetry tasks*. Paper presented at the meeting of Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Department of Education, University of Cyprus, Cyprus.

Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, (pp. 425-432). Prague: PME.

EXTENDED ABSTRACT

Geometric transformations play significant roles in the Turkish curriculum, international curricula and mathematics education literature. Geometric transformations help students think about patterns and basic isometries and support generalization and mathematical visualization. Existing literature on reflection focuses on issues such as pre-service mathematics teachers' pedagogical approaches, knowledge; and elementary students' thinking. There are also studies on high school students' proof- and problem-solving processes; interactions in technological environments; comparison of everyday knowledge and formal knowledge; relations of reflection with other mathematical concepts; and use of different representations on the concept of reflection. Studies show that high school students struggle with the concept of reflection. In particular, when the reflection line is oblique, students have difficulties reflecting geometric shapes. Some researchers also argue that students mostly think about reflection as a process through dynamic motion and do not think about reflection as a function. Most of the existing literature on reflection is based on cognitive perspectives; studies exploring students' learning from a socio-cultural perspective are rare. The purpose of this study is to explore the development of high school students' mathematical discourses on the concept of reflection in relation to instruction. The specific question we address is how do two high school students' discourses on the concept of reflection develop in relation to the discourse of their teacher in the classroom?

The participants of this case study were two 10th grade (16-year-old) high school students and their teacher Mr. Can (a pseudonym). We selected Eda and Okan (pseudonyms) as students for our study, since they were willing to participate in the study, and they communicated their thinking in an expressive and reflective way; the selection of these students is a form of purposeful sampling for rich and in-depth data collection. The data for the study were collected over eight weeks, and consisted of classroom observations and task-based interviews conducted with the students and teacher. We analyzed the data from the perspective of the commognitive framework.

The commognitive perspective formulates thinking as self-communication and eliminates the dichotomy between thinking and communication. According to the commognitive perspective, mathematics is a discourse which can be identified

through word use, visual mediators, routines, and endorsed narratives. Word use refers to the mathematical words used in the discourse. Visual mediators refer to visual objects created for mathematical communication (e.g., graphs, algebraic notations, figures, and shapes). Routines are the collection of meta-level rules defining discursive patterns which recur in certain situations. Endorsed narratives are utterances about mathematical objects and their relations participants consider as true as substantiated by the other three elements of their discourses. From the commognitive perspective, learning is conceptualized as change in participants' discourses. In our analyses, we focused on the word use, visual mediators, routines, and endorsed narratives of the students and the teacher. We provided the development of students' discourses by paying attention to the changes in their discursive elements during the course of the study. We examined whether and how instruction shaped students' discourses by focusing on the discursive elements of the teacher and providing a cross-comparison of the students' discourses with the teacher's discourse in the classroom.

Our analysis of the students' discursive development in relation to instruction showed that the teacher's discourse in the classroom was at a higher level than the students' discourses and the discourses of the teacher and his students differed from each other. The students adopted the teacher's discourse when his discourse was transparent and explicit for them but the students did not adopt the teacher's discourse on reflection when particular elements in his discourse remained implicit for them. Mr. Can's mathematical discourse in the classroom was mainly based on an algebraic-formal approach as he defined reflection as a function. The students, on the other hand, viewed reflection as a dynamic movement of geometric shapes. Although the students developed a robust geometric view of reflection as a transformation by the end of the study, neither student realized reflection as a function. We also observed that the students adopted Mr. Can's discourse when the elements of his discourse were compatible with their own geometric thinking about reflection. The Turkish mathematics curriculum has a spiral structure; students learn about geometric transformations (including reflection) as dynamic motion through grades 6 – 9. It is likely that Mr. Can assumed his students already knew about reflection and was unaware of the transitions his students had to go through from a dynamic to an object view of reflection in his classroom. It is also possible that Mr. Can was aware of such transitions but the opportunities he provided for his students in the classroom were not explicit enough for the students to adopt his discourse on reflection as a function. Although instruction shaped these two students' thinking about reflection, our findings indicated that (a) these students' discursive development differed from each other, and (b) the extent to which instruction shaped the students' thinking depended on the students' prior thinking about reflections and whether the features of the teacher's discourse remained implicit or explicit to them. These results indicate the complexity of learning and highlight the idiosyncratic ways in which students may develop their mathematical discourses in relation to instruction. It also highlights the social nature of learning as demonstrated by the changes in the students' discourses so that their (geometric) thinking about the concept became more compatible with Mr. Can's geometric view about reflection.

We concur that students may struggle with reflections when the line of reflection is oblique (the students in our study initially had difficulties on such tasks) and thinking about reflection as a function. Although Mr. Can gave some opportunities in the classroom for his students to think about reflection as a function, he did not explicitly attend to the discursive shifts that are required to move from a motion-based view of reflection to a function-based view of the concept. To enhance mathematical communication and support discursive development of students, teachers need to be aware of their students' development and make the elements of their discourses transparent in the classroom.