

## E<sup>3</sup> te Verilen Bir Eğri Boyunca Sabit Ortalama Eğrilikli Yüzeylerin Oluşturulması

Hüsnü COŞANOĞLU<sup>1</sup>, Ergin BAYRAM<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup>Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 55139, Samsun, Türkiye

<sup>2</sup>Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55139, Samsun, Türkiye

(Alınış / Received: 30.01.2020, Kabul / Accepted: 04.11.2020, Online Yayınlanma / Published Online: 20.12.2020)

### Anahtar Kelimeler

Yüzey ailesi,  
Sabit ortalama eğrilik,  
3-boyutlu Öklid uzayı,  
Salkowski eğrileri,  
Antisalkowski eğrileri,  
Helis eğrileri

**Özet:** Bu çalışmada, 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğrilikli sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartlar elde edildi. Bunun için öncelikle verilen eğrinin Frenet çatısında yer alan teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı ile sapma fonksiyonları adı verilen  $C^1$  sınıfından, iki değişkenli, reel değerli fonksiyonlar yardımıyla bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak ifade edildi. Bu yüzeylerin, verilen eğri boyunca ortalama eğrilikli; eğrinin eğrilikli, burulması, sapma fonksiyonları ve bunların kısmi türevleri cinsinden hesaplandı. Verilen eğri boyunca ortalama eğrilikliğin sabit olması için yeterli şartlar elde edildi. Bazı örnekler verildi.

## Construction of Surfaces with Constant Mean Curvature along a Curve in E<sup>3</sup>

### Keywords

Surface family,  
Constant mean curvature,  
Euclidean 3-space,  
Salkowski curves,  
Antisalkowski curves,  
Helix curves

**Abstract:** In this study, the sufficient conditions are obtained to find surfaces that pass through any given curve in 3-dimensional Euclidean space and whose mean curvature is constant along this curve. For this purpose, firstly, surfaces passing through the given curve are expressed parametrically with the help of the tangent vector field, the principal normal vector field and the binormal vector field of the Frenet frame of the given curve, and the so called marching scale functions which are real valued  $C^1$  functions of two variables. The mean curvature of these surfaces along the given curve is calculated in terms of curvature and torsion of the given curve and, marching scale functions and their partial derivatives. Sufficient conditions are obtained to keep the mean curvature constant along the given curve. Some examples are given.

### 1. Giriş

Eğriler ve yüzeyler diferansiyel geometride uzun yıllardır çalışılan konulardır. Eğri ve yüzeyler birçok endüstriyel uygulamada kullanılmaktadır. Bu nedenle yüzey oluşturma problemleri, özel olarak, verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi özel eğri kabul eden yüzey bulma problemleri birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Wang ve ark. [1] bu tür problemi ilk olarak 2004 yılında ortaya atarak verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak geodezik kabul eden yüzeyleri elde etmiştir. Kasap ve ark. [2] ise Wang ve ark. [1] tarafından kullanılan sapma fonksiyonlarını genelleştirerek daha genel bir ortak geodeziğe sahip yüzey ailesi elde etmiştir. 2011 yılında ise Li ve ark. [3] ortak eğrilikli çizgili yüzey ailesi için yeterli şartları sunmuştur. Ergün ve ark. [4] ise Li ve ark. [3] tarafından yapılan çalışmayı 3 boyutlu Minkowski uzayına taşımıştır. Ortak asimptotik eğriye sahip yüzey ailesi Bayram ve ark. [5] tarafından tanımlanmıştır.

Diferansiyel geometride, sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin sınıflandırılması temel bir problemdir. Sabit ortalama eğrilikli bir yüzey, gerilim kuvvetlerinin ve dış basıncın dengelendiği bir yüzey olarak düşünülebilir. Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. 1951'de Hopf [6],  $R^3$ 'teki herhangi bir daldırılmış sabit ortalama eğrilikli yüzeyin bir küre olduğunu ispatlamıştır. Alexandrov [7],  $R^3$ 'teki herhangi bir kompakt gömülü sabit ortalama eğrilikli yüzeyin küre olduğunu göstermiştir. Meeks ve Tinaglia [8], sıfır olmayan sabit ortalama eğrilikli  $R^3$ 'e gömülü kompakt diskler için içsel eğrilik ve yarıçap tahminlerini türeterek bu tahminleri, sıfır olmayan sabit eğrilikli  $R^3$ 'e gömülü tam yüzeylerin küresel geometrisini incelemek için uygulamıştır.

Bu çalışmada ise yukarıdaki makaleler ışığında 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğrilikli sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartlar elde edildi.

## 2. Materyal ve Metot

İlk olarak, bu makalede kullanılacak kavramlar tanıtılacaktır.

$r: I \rightarrow E^3, r = (r_1, r_2, r_3)$  şeklinde bir eğri olsun.

$\forall s \in I$  için  $r'(s) \neq 0$  ise  $r$  ye regüler eğri denir [9].

$\forall s \in I$  için  $r(s) \in E^3$  noktasındaki

$$r'(s) = \left( \frac{dr_1}{dt}(s), \frac{dr_2}{dt}(s), \frac{dr_3}{dt}(s) \right)_{r(s)}$$

tanjant vektörüne  $r$  nin  $s$  noktasındaki hız vektörü denir [9].  $\lambda(s) = \|r'(s)\|$  ifadesine  $r$  eğrisinin  $s$  noktasındaki hızı denir [9].  $r(s)$  eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanı, sırasıyla,  $T(s) = \frac{r'(s)}{\|r'(s)\|}$ ,  $N(s) = B(s) \times T(s)$ ,  $B(s) = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$ , olmak üzere  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ortonormal sistemine eğrinin Frenet çatısı denir. Eğrinin eğrilik ve burulması, sırasıyla,  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$  olmak üzere Frenet çatısı için türev formülleri şu şekildedir [5]:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda\kappa & 0 \\ -\lambda\kappa & 0 & \lambda\tau \\ 0 & -\lambda\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (1)$$

$m \in \mathbb{R} - \left\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$  olmak üzere

$$r_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left( -\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin s, \right. \\ \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) - \frac{1}{2} \cos s, \frac{1}{4m} \cos(2ns) \right)$$

şeklinde tanımlanan eğriye Salkowski eğrisi denir. Burada  $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  dir [10].

$r(s)$  Salkowski eğrisi için  $\|r'_m(s)\| = \frac{\cos(ns)}{\sqrt{1+m^2}}$  dir.

Dolayısıyla eğri  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  aralığında regülerdir ve  $\kappa(s) = 1$  ve  $\tau(s) = \tan(ns)$  dir. Frenet elemanları ise

$$T(s) = \left( -\cos(s)\cos(ns) + n\sin(s)\sin(ns), \right. \\ \left. \cos(ns)\sin s - n\cos(s)\sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right)$$

$$N(s) = n \left( \frac{\sin(s)}{m}, \frac{\cos(s)}{m}, -1 \right)$$

$$B(s) = \left( n\sin(s)\cos(ns) - \cos(s)\sin(ns), \right. \\ \left. -n\cos(s)\cos(ns) - \sin(s)\sin(ns), \frac{n}{m} \cos(ns) \right)$$

şeklinde [10].

$\alpha(s)$  birim hızlı, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri olmak üzere  $r(s) = \int_{s_0}^s B^\alpha(u) du$  olsun.  $\alpha(s)$  ve  $r(s)$  nin Frenet elemanları, sırasıyla  $\{T^\alpha, N^\alpha, B^\alpha, \kappa^\alpha, \tau^\alpha\}$  ve  $\{T^r, N^r, B^r, \kappa^r, \tau^r\}$  olmak üzere  $T^r = B^\alpha, N^r = -N^\alpha, B^r = T^\alpha, \kappa^r = |\tau^\alpha|, \tau^r = \kappa^\alpha$  dir [11].

$\alpha(s)$  birim hızlı,  $\tau^\alpha = 1$  olan, eğriliği sıfırdan farklı bir eğri ve  $r(s) = \int_{s_0}^s B^\alpha(u) du$  olsun,

$$\alpha(s) = \left( \frac{n\cos s}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2+3\cos(2ns))) \right. \\ \left. + (2n^2+1)\sin s \sin(2ns), \right. \\ \left. \frac{n\sin s}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2+3\cos(2ns))) \right. \\ \left. - (2n^2+1)\cos s \sin(2ns), \right. \\ \left. \frac{n^2-1}{4n} (2ns + \sin(2ns)) \right)$$

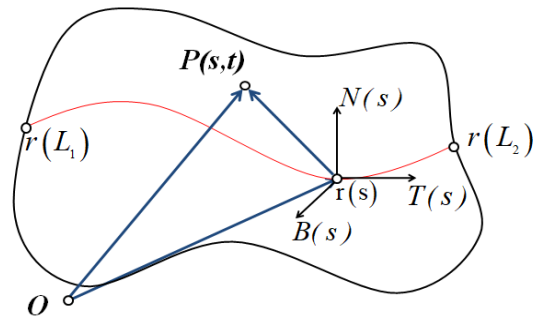
$n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  ise  $\kappa^r = 1$  olup  $r(s)$  Salkowski eğrisi,  $\alpha(s)$  eğrisi de Antisalkowski eğrisidir [12].

## 3. Bulgular

$r(s), E^3$  Öklid uzayında  $\kappa(s)$  eğrilikli,  $\tau(s)$  burulmalı, regüler bir eğri olsun. Ayrıca, her  $s$  için  $r''(s) \neq 0$  olduğunu kabul edelim.  $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ,  $r(s)$  eğrisinin Frenet çatısı olmak üzere bu eğriden geçen yüzeyler parametrik olarak

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s) \quad (2)$$

$L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2$ , ile verilir (Şekil 1. [1]).



Şekil 1.  $r(s)$  eğrisi ve bu eğriden geçen  $P(s, t)$  yüzey ailesi

$r(s)$  eğrisinin  $P(s, t)$  yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul

$$u(s, t_0) + v(s, t_0) + w(s, t_0) \equiv 0 \quad (3)$$

$L_1 \leq s \leq L_2$ , olacak şekilde  $\exists t_0 \in [T_1, T_2]$  bulunmasıdır.

$P(s, t)$  yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H(s, t) = \frac{(\det(P_{ss}, P_s, P_t)) \|P_t\|^2}{2(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t)$$

$$-\frac{\det(P_{st}, P_s, P_t) \langle P_s, P_t \rangle}{(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t) + \frac{\det(P_{tt}, P_s, P_t) \|P_s\|^2}{2(\|P_s\|^2 \|P_t\|^2 - \langle P_s, P_t \rangle^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t) \quad (4)$$

dir [13].

$r(s)$  eğrisinden geçen  $P(s, t)$  yüzeyinin bu eğri boyunca ortalama eğriliğini bulmak için gerekli olan aşağıdaki hesaplamaları yapalım. (2) denklemi göz önüne alınırsa

$$P_s = r' + u_s T + u_t T' + v_s N + v_t N' + w_s B + w_t B',$$

$$P_s = (\lambda + u_s - \lambda v_t) T + (\lambda u_t + v_s - \lambda w_t) N + (\lambda v_t + w_s) B,$$

$$P_t = u_t T + v_t N + w_t B,$$

$$P_s(s, t_0) = \lambda T,$$

$$P_{ss}(s, t_0) = \lambda' T + \lambda^2 \kappa N,$$

$$P_t(s, t) = u_t T + v_t N + w_t B,$$

$$P_{ts} = P_{st} = u_{ts} T + u_t T' + v_{ts} N + v_t N' + w_{ts} B + w_t B',$$

$$P_{ts} = P_{st} = (u_{ts} - \lambda \kappa v_t) T + (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) N + (\lambda \tau v_t + w_{ts}) B,$$

$$P_{tt}(s, t) = u_{tt} T + v_{tt} N + w_{tt} B,$$

$$\det(P_{ss}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} \lambda' & \lambda^2 \kappa & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix} = \lambda^3 \kappa w_t,$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} u_{ts} - \lambda \kappa v_t & \lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t & \lambda \tau v_t + w_{ts} \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix}$$

$$\det(P_{st}, P_s, P_t) = -\lambda [w_t (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) - v_t (\lambda \tau v_t + w_{ts})],$$

$$\det(P_{tt}, P_s, P_t) = \begin{vmatrix} u_{tt} & v_{tt} & w_{tt} \\ \lambda & 0 & 0 \\ u_t & v_t & w_t \end{vmatrix} = -\lambda (v_{tt} w_t - v_t w_{tt}),$$

$$\|P_t\|^2 = u_t^2 + v_t^2 + w_t^2,$$

$$\|P_s\|^2 = \lambda^2, \langle P_s, P_t \rangle = \lambda u_t \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki hesaplamalar (4) denklemine yerine yazılırsa  $r(s)$  eğrisinden geçen  $P(s, t)$  yüzeyinin bu eğri boyunca ortalama eğriliği

$$H(s, t_0) = \frac{(-\lambda \kappa w_t (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + 2u_t [w_t (\lambda \kappa u_t + v_{ts} - \lambda \tau w_t) - v_t (\lambda \tau v_t + w_{ts})] - \lambda (v_{tt} w_t - v_t w_{tt}))}{2\lambda (v_t^2 + w_t^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t_0) \quad (5)$$

olarak elde edilir.

**Teorem 1**  $P(s, t)$  yüzeyinin  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul,  $L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$  için

$$\begin{cases} u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) \neq 0, \\ u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = w_t(s, t_0) \equiv 0, \\ \tau(s) = s b t \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} u_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0, \\ u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = v_t(s, t_0) \equiv 0 \\ \tau(s) = s b t \end{cases}$$

olmasıdır.

**İspat:** Bir  $r(s)$  eğrisi verilsin. (3) denkleminden  $r(s)$  eğrisinin  $P(s, t)$  yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul  $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$  olmasıdır. Ayrıca  $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) \neq 0 \equiv w_t(s, t_0)$  olarak alınırsa (4) denklemi  $H(s, t_0) = \tau(s)$  denklemine dönüşür. O halde, eğri boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için  $\tau(s) = s b t$  olmalıdır. Anti-Salkowski eğrileri buna örnektir. Diğer durum için ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 2**  $P(s, t)$  yüzeyinin  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul  $L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$  için

$$\begin{cases} u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0, \\ u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) \equiv 0 \end{cases}$$

iken  $\tau(s) = \kappa(s) = s b t$  veya  $\kappa(s) = -4\tau(s)$  olmasıdır.

**İspat:** Bir  $r(s)$  eğrisi verilsin. (3) denkleminden  $r(s)$  eğrisinin  $P(s, t)$  yüzeyi üzerinde parametre eğrisi olması için yeterli koşul  $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$  olmasıdır. Ayrıca  $u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0$  olarak alınırsa (5) denklemi

$$H(s, t_0) = \frac{-\kappa(s) - 4\tau(s)}{4\sqrt{2}}$$

denkleme dönüşür. O halde, eğri boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için  $\tau(s) = \kappa(s) = s b t$  veya  $\kappa(s) = -4\tau(s)$  olmalıdır. Helis eğrileri buna örnektir.

**Teorem 3**  $P(s, t)$  yüzeyinin  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliğinin sabit olması için yeterli koşul  $L_1 \leq s \leq L_2, t_0 \in [T_1, T_2]$   $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = u_t(s, t_0) \equiv 0$  olmak üzere  $v_t(s, t_0) \neq 0 = w_t(s, t_0)$  veya  $\frac{v(s, t_0)}{w(s, t_0)} = s b t, \kappa(s) = s b t$  olmasıdır.

**İspat:**  $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = u_t(s, t_0) \equiv 0$  alınırsa  $P_s(s, t_0) \perp P_t(s, t_0)$  olur ve ortalama eğriliği fonksiyonu

$$H(s, t_0) = \frac{\kappa(s) w_t (v_t^2 + w_t^2) + v_{tt} w_t - v_t w_{tt}}{-2(v_t^2 + w_t^2)^{\frac{3}{2}}}(s, t_0) \quad (6)$$

şekline dönüşür.

$v_t(s, t_0) \neq 0 = w_t(s, t_0)$  (6) denkleminde yerine yazılırsa  $H(s, t_0) = 0 = sbt$  olur veya  $v_t(s, t_0) = w_t(s, t_0) \neq 0$  (6) denkleminde yerine yazılırsa  $H(s, t_0) = \frac{-\kappa(s)}{2\sqrt{2}}$  olur. Ortalama eğriliğin sabit olması için  $\kappa(s) = sbt$  olmalıdır. Salkowski eğrileri buna örnektir.

### Örnek 1

$r(s) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right), -2 \leq s \leq 2$  eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı

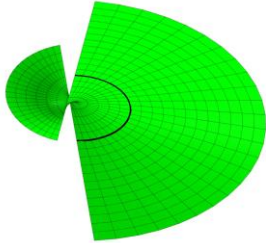
$$\begin{cases} T(s) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ N(s) = \left( -\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), 0 \right), \\ B(s) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s \right) \end{cases}$$

dır.

Eğer  $t_0 = 0$  ve sapma fonksiyonları  $u(s, t) = v(s, t) = w(s, t) = t$  olarak seçilirse Teorem 2 sağlanır. Böylece  $r(s)$  eğrisinden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan

$$P_1(s, t) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - t \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right) - t \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s + \sqrt{2}t \right)$$

$-2 \leq s \leq 2, -2 \leq t \leq 2$  yüzeyi elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2.  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabit olan  $P_1(s, t)$  yüzeyi

### Örnek 2

$$r(s) = \frac{3}{\sqrt{10}} \left( \frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \sin\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) - \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \sin\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) - \frac{1}{2} \sin s, \frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \cos\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) - \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \cos\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) + \frac{1}{2} \cos s, \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}s\right) \right)$$

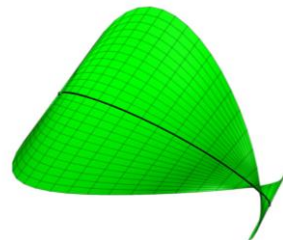
$-2 \leq s \leq 2$  eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$\begin{cases} T(s) = \left( -\text{coss} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sins} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), -\text{sins} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \text{coss} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \\ N(s) = \left( \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{sins}, -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{coss}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right), \\ B(s) = \left( \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sins} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{coss} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), -\frac{\sqrt{10}}{10} \text{coss} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{sins} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \end{cases}$$

dır. Eğer  $t_0 = 0$  ve sapma fonksiyonları  $u(s, t) = v(s, t) = w(s, t) = t$  olarak seçilirse Teorem 3 sağlanır. Böylece  $r(s)$  eğrisinden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan

$$P_2(s, t) = \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \left( \frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \sin\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) - \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \sin\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) - \frac{1}{2} \sin s \right) + t \left( \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{sins} + \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sins} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{coss} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \frac{3}{\sqrt{10}} \left( \frac{\sqrt{10}-10}{40+8\sqrt{10}} \cos\left(\frac{5+\sqrt{10}}{5}s\right) + \left(\frac{\sqrt{10}+10}{40-8\sqrt{10}}\right) \cos\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}s\right) + \frac{1}{2} \cos s \right) + t \left( -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{coss} - \frac{\sqrt{10}}{10} \text{coss} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{sins} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}s\right) + t \left( -\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \right)$$

$-2 \leq s \leq 2, -2 \leq t \leq 2$  yüzeyi elde edilir (Şekil 3).



Şekil 3.  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabit olan  $P_2(s, t)$  yüzeyi

**Örnek 3**

$$r(s) = \left( \frac{-\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{coss} + \frac{6}{5} \text{sinssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right), \right. \\ \left. \frac{-\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{sins} - \frac{6}{5} \text{cosssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right), \right. \\ \left. \frac{-9}{4\sqrt{10}} \left( \frac{2}{\sqrt{10}}s + \sin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right)$$

$-1 \leq s \leq 1$ , eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left( \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sinscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{cossin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{10}}{10} \text{cosscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{sinssin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \left. \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right), \\ N(s) = \left( -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{sins}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{coss}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right), \\ B(s) = \left( -\text{cosscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sinssin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \left. -\text{sinscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \text{cossin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right), \right. \\ \left. \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \end{array} \right.$$

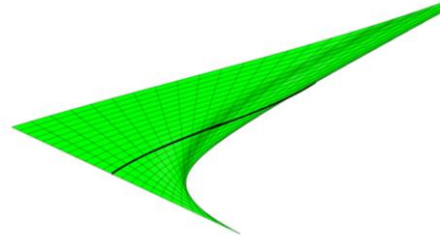
dır. Eğer sapma fonksiyonları  $u(s, t) = t, v(s, t) = t, w(s, t) = 0, s \in [-1, 1], t \in [-1, 1]$  olarak seçilirse Teorem 1 sağlanır.  $r(s)$  eğrisinden geçen yüzeyin denklemi

$$P_3(s, t) = \left( \frac{-\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{coss} + \frac{6}{5} \text{sinssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right. \\ \left. + t \left( \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sinscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{cossin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{sins} \right) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{sins}, \right. \\ \left. - \frac{6}{5} \text{cosssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right)$$

$$+ t \left( -\frac{\sqrt{10}}{10} \text{cosscos}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \text{sinssin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{coss} \right), \\ \frac{-9}{4\sqrt{10}} \left( \frac{2}{\sqrt{10}}s + \sin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \\ + t \left( \frac{3\sqrt{10}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

olur (Şekil 4).  $t_0 = 0$  için  $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$  dir. Yani (3) denklemden  $r(s)$  eğrisi  $P_3(s, t)$  yüzeyinin bir parametre eğrisidir.

$u_t(s, t_0) = v_t(s, t_0) = 1$  ifadeleri (6) denkleminde yerine yazılırsa  $H(s, t_0) = \frac{-2u_t v_t^2 \lambda \tau(s)}{2\lambda v_t^3} = -\tau(s)$  olur.  $\tau(s) = 1$  olduğundan  $P_3(s, t)$  yüzeyinin  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriligi sabittir.



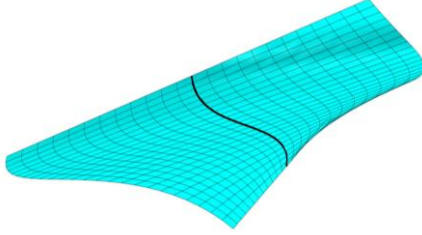
**Şekil 4.**  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriligi sabit olan  $P_3(s, t)$  yüzeyi

Aynı eğri için sapma fonksiyonlar  $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$  olarak seçilirse Teorem 1 sağlanır ve  $r(s)$  eğrisi eğrisi boyunca sabit ortalama eğrilikli

$$P_4(s, t) = \left( \frac{-\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{coss} + \frac{6}{5} \text{sinssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right. \\ \left. + t \left( \frac{\sqrt{10}}{10} \text{sins} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) - \text{coss} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \right) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{10}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \frac{3}{5} + 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \right) \text{sins}, \right. \\ \left. - \frac{6}{5} \text{cosssin}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right) \right) \\ + t \left( \frac{\sqrt{10}}{10} \text{coss} \left( \sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\sin\left(\sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right)\right), \\
& \frac{-9}{4\sqrt{10}}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s + \sin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}s\right)\right) \\
& +t\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}s\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

yüzeyi elde edilir (Şekil 5).



**Şekil 5.**  $r(s)$  eğrisi boyunca ortalama eğriliği sabit olan  $P_4(s, t)$  yüzeyi

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler bulmak için yeterli şartlar elde edildi. İlk olarak 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğriyi parametre eğrisi kabul eden yüzeyler Frenet çatusı yardımıyla parametrik olarak ifade edildi. Daha sonra 3 boyutlu Öklid uzayında alınan herhangi bir eğriden geçen ve bu eğri boyunca ortalama eğriliği sabit olan yüzeyler elde etmek için yeterli şartlar verildi. Son olarak bu şartlara uygun bazı örnekler verildi.

#### Etik Beyanı

*Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.*

#### Kaynakça

[1] Wang, G. J., Tang, K., Tai, C. L. 2004. Parametric representation of a surface pencil with a

common spatial geodesic. Computer-Aided Design, 36(5), 447-459.

[2] Kasap, E., Akyıldız, F. T., Orbay, K. 2008. A generalization of surfaces family with commonspatial geodesic. Applied Mathematics and Computation, 201, 781-789.

[3] Li, C. Y., Wang R. H., Zhu C. G. 2011. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. Computer-Aided Design, 43(9), 1110-1117.

[4] Ergün, E., Bayram, E., Kasap, E. 2014. Surface pencil with a common line of curvature in Minkowski 3-space. Acta Mathematica Sinica, English Series, 30(12), 2103-2118.

[5] Bayram, E., Güler, F., Kasap, E. 2012. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. Computer-Aided Design, 44, 637-643.

[6] Hopf, H. 1989. Differential geometry in the large, Volume 1000 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition.

[7] Alexandrov, A. D. 1956. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. Vestnik Leningrad University Mathematical, 11(19), 5-17.

[8] Meeks, W. H., Tinaglia, G. 2016. The geometry of constant mean curvature surfaces in  $R^3$ . arXiv, 1609.08032v1.

[9] O'Neill, B. 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press Inc., New York.

[10] Salkowski, E. 1909. Zur Transformation von Raumkurven. Mathematische Annalen, 66(4), 517-557.

[11] Nurkan, S. K., Güven, İ. A., Karaca, M. K. 2019. Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 89(1), 155-161.

[12] Monterde, J. 2009. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. Computer Aided Geometric Design, 26, 271-278.

[13] Abbena, E., Salamon, S., Gray, A. 1998. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica. Third Edition.