

# VERİLEN PROJE SÜRESİ İÇİNDE DÜZGÜN KAPASİTE İHTİYAÇ DAĞILIMINI AMAÇLAYAN BİR TAMSAYILI PROGRAMLAMA MODELİ ÖNERİSİ ve BUNA YÖNELİK UYGULAMA

Aykut TOP

Marmara Üniversitesi, İ.İ.B.F., İşletme Bölümü, Profesör Dr.

*Zusammenfassung: Die Kapazitätsplanung befasst sich damit, die beschränkt verfügbaren Einsatzmittel optimal auf die einzelnen Vorgänge des Projektes zu verteilen. Gegenstand des vorliegenden Beitrages ist es, eine gleichmässige Kapazitätsauslastung bei vorgegebener Projektdauer mit Hilfe einem ganzzahligen Optimierungsmodell zu erzielen. Gleichmässige Kapazitätsauslastung bedeutet minimale Kapazitätsverwendung und deswegen minimale Kost in einer vorgegebenen Projektdauer.*

*Die Einsatzmittelarten wie Arbeitskräfte oder Maschinen, haben verschiedene Prioritäten für jedes Unternehmen. Beim Einführen der Gewichtungsfaktoren in die Zielfunktion des vorliegenden Modells werden die unterschiedliche Gewichtungen der Einsatzmittelarten bewertet.*

*Nach der Formulierung des Modells wird es an einem Beispiel angewendet und die Lösungen für verschiedene Gewichtungen der Kapazitätsarten erhalten. Der Nachteil des Modells, dass die Anzahl der Variablen zu hoch ist, kann durch die schnelle Entwicklung in der Computertechnologie beseitigt werden.*

## I. GİRİŞ

Bir proje öncelikle kapasite kısıtları dikkate alınmadan CPM veya PERT gibi teknikler yardımıyla zamanlama açısından planlanır. Böylece projenin normal şartlarda tamamlanma süresi ile her faaliyetin en erken ve en geç başlama ve bitiş zamanları belirlenir. Zaman planlamasını maliyet ve kapasite planlaması takip eder.

Her faaliyetin gerçekleştirilebilmesi için işgücü, makine ve malzeme gibi kaynaklara ihtiyaç duyulur. Kaynakların her zaman kısıtlı olması bunların en ekonomik ve optimal bir şekilde dağıtılıp, kullanılmasını gerektirmektedir. Kapasite planlaması, tüm farklı kapasite ihtiyaçları göz önünde bulundurularak faaliyetlerin başlama ve bitiş zamanlarının saptanması ve her dönem için kapasite ihtiyaçlarının belirlenmesidir.

Kapasite planlamasında iki farklı amaç olabilir. Bunlar; eldeki kısıtlı kaynakları veri kabul ederek proje süresini minimize etmek veya verilen bir proje süresi içinde kaynak ihtiyacının mümkün olduğu kadar düzgün bir şekilde dağılmasını sağlamaktır [1]. Bu çalışmada kaynakların optimal kullanımını hedefleyen ikinci amaç esas alınmıştır. Böylelikle, projenin yürütülmesi sırasında kaynak ihtiyaçlarının aşırı dalgalanmaları önlenecek ve en az kaynakla, verilen süre içinde projenin tamamlanması mümkün olacaktır.

Düzgün bir kapasite ihtiyaç dağılımı, kritik olmayan faaliyetlerin gevşeklik sınırları içinde zamansal olarak kaydırılmaları suretiyle elde edilir. Mevcut çözüm yöntemlerinin büyük bir kısmı sistematik denemelere dayanan hüristik yöntemler şeklindedir [2]. Bu yöntemler mümkün zamansal kombinasyonları belli kurallar içinde deneyerek iyi ve kullanılabilir çözümler elde etmeyi hedefler. Deneme yönteminin söz konusu olduğu durumlarda bilgisayarlardan büyük ölçüde yararlanılabilmektedir. Piyasada kullanılan çeşitli paket programların karşılaştırılması Kolisch'in (1999) makalesinde görülebilir. ASTRA, GRASP ve MILORD gibi birçok programda standart proje planlama paketine kapasite planlama modülü de eklidir [3].

Bu alanda yapılan bilimsel çalışmalar, Alvarez-Valdez ve Tamarit'in (1989) hüristik çalışmasında, Demeulemeester ve Herroelen (1992) veya Mingozzi ve Maniezzo'nun (1998) optimizasyon çalışmalarında olduğu gibi genellikle birinci amacı, diğer bir deyişle proje süresinin minimizasyonunu hedeflemiştir. Drexl (1997) ve Neumann (1993)'in düzgün kapasite dağılımını amaçlayan tamsayı optimizasyon modelleri vardır. Aşağıda önerilen modelin bu modellerden farkı, değişik kapasite ihtiyaçlarını her kapasite türünün (işgücü, makine vs.) işletme için taşıdığı öneme göre ağırlıklandırılarak modele dahil edilmesi ve faaliyetlerin kesiksiz olarak yürütülmesi gerekliliğinin farklı bir şekilde formüle edilmesindedir.

## II. MODELİN FORMÜLASYONU

Aşağıda, projenin tamamlanma süresini veri kabul ederek, düzgün bir kapasite ihtiyaç dağılımı sağlayan bir tamsayı optimizasyon modeli sunulmaktadır. Kapasite ihtiyacının düzgün dağılımı, amaç fonksiyonunda her dönemin kapasite ihtiyacı ile ortalama kapasitenin farkları toplamı minimize edilerek gerçekleştirilmektedir. Ortaya çıkacak farkların, ihtiyacın ortalamanın altında olması durumunda negatif de olabileceği dikkate alınarak farkların kareleri alınmış, böylelikle mutlak değer olarak amaç fonksiyonuna dahil edilmeleri sağlanmıştır.

Kapasite sınırlamaları dikkate alınmadan yapılan zaman planlaması sonucu elde edilen değerler, her faaliyetin en erken başlama EB(j), en erken sona erme ES(j), en geç başlama GB(j) ve en geç sona erme GS(j) zamanları ve projenin tamamlanma süresi (T) veri olarak alınmakta ve modelin parametrelerini oluşturmaktadır.

Model aşağıdaki varsayımlara dayanmaktadır :

1. Problem deterministik olup,  $j = 1,2,\dots,n$  faaliyetten oluşur.

2. Faaliyetler  $d_j$  süresinde kesintisiz tamamlanmalıdır.

3. j Faaliyetinin başlatılabilmesi için tamamlanması gereken faaliyetler kümesi  $V(j)$  ile ifade edilirler.

4. Her faaliyetin hangi kapasite türüne ne miktarda ihtiyaç duyduğu bilinmektedir. j Faaliyeti her dönem k kaynağından  $r_{jk}$  birim kapasiteye ihtiyaç duyar. ( $k=1,\dots,K$ )

5. Faaliyetleri gerçekleştirmek için gerekli kaynakların sınırsız miktarda elde bulunduğu varsayılır.

6. Faaliyetlerin kaynak ihtiyaçları faaliyetin başlangıcından sonuna kadar düzgün bir şekilde devam eder.

$G_{tk}$  : t Döneminde k türü kapasiteye duyulan toplam ihtiyaç.

$MG_k$  : k türü kapasiteye duyulan ortalama ihtiyaç

$W_k$  : k türü kapasitenin ağırlık faktörü

Karar değişkenleri ;  $X_j$  , j faaliyetinin başlama zamanı,

0-1 Değişkenler :

$Z_{jt} \in \{0,1\}$  , eğer j faaliyeti t döneminin başında başlarsa  $Z_{jt} = 1$  , aksi takdirde 0.

$Y_{jt} \in \{0,1\}$  , eğer j faaliyeti t döneminde yürütülüyorsa  $Y_{jt} = 1$  , aksi takdirde 0.

Yukarıdaki varsayım ve notasyonlar ile matematiksel model :

$$\text{Amaç fonksiyonu, Min. } \sum_{k=1}^K \sum_{t=0}^{T-1} W_k (G_{tk} - MG_k)^2$$

Teknik sınırlamalar

$$(1) X_j = \sum_{t=EB(j)}^{GB(j)} t Z_{jt} \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$(2) \sum_{t=EB(j)}^{GB(j)} Z_{jt} = 1 \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n$$

(1) ve (2) 'inci teknik sınırlamalar her faaliyetin EB ve GB zamanları arasında bir zamanda başlatılmasını sağlar.

$$(3) \sum_t^{t+d_j-1} Y_{jt} \geq d_j - M(1 - Z_{jt})$$

tüm  $t = EB(j), EB(j)+1,\dots,GB(j)$  ve  $j = 1,2,\dots,n$  için.

Her faaliyetin sadece bir adet başlangıç zamanı olduğundan ( $Z_{jt}$ ), her faaliyet için yazılan (3)'no lu sınırlamalardan bir tanesi geçerli olur. Böylelikle faaliyetin yürütüldüğü sürece Y 0-1 değişkenlerinin 1 değeri alması sağlanır.(M büyük bir sayı)

$$(4) X_j \geq X_i + d_i \quad ; \quad \forall i \in V(j)$$

(4)'üncü sınırlama her faaliyetin, takip zorunda olduğu faaliyetlerin tamamlanmasından sonra ancak başlatılabileceği şartını sağlar.

$$(5) G_{tk} = \sum_{j=1}^n r_{jk} Y_{jt}$$

tüm  $t = 0,1,2,\dots,T-1$  ve  $k = 1,2,\dots,K$  için

$$(6) MG_k = \frac{\sum_{j=1}^n r_{jk} d_j}{T} \quad ; \quad k = 1,2,\dots,K$$

### III. UYGULAMA

Modelin uygulanarak doğruluğunun test edileceği beş faaliyetten ve iki farklı kapasite türüne ihtiyaç duyulan basit bir problem geliştirilmiştir. Faaliyetlerin öncelik ilişkileri, süreleri, kapasite ihtiyaçları ve faaliyetlerin hesaplanmış erken ve geç başlama ve bitiş zamanları aşağıda görülmektedir.

Faaliyet	Öncelik	Süre	1.kap.(r <sub>1j</sub> )	2.kap.(r <sub>2j</sub> )
1. A	-	1	2	3
2. B	-	2	2	5
3. C	-	4	5	6
4. D	A	3	3	2
5. E	C	2	4	1

Faaliyet	EB(j)	ES(j)	GB(j)	GS(j)
1. A	0	1	2	3
2. B	0	2	4	6
3. C	0	4	0	4
4. D	1	4	3	6
5. E	4	6	4	6

Projenin tamamlanma süresi  $T = 6$

Birinci kapasite türü için ortalama ihtiyaç  $MG_1 = 43/6 = 7.17$ ,

İkinci kapasite türü için ortalama ihtiyaç  $MG_2 = 45/6 = 7.5$  bulunur.

Problem önce elle deneme yöntemi ile çözülmüştür. B faaliyeti D faaliyeti tamamlandıktan sonra başlatılacak şekilde 4. Zaman birimine kaydırıldığı takdirde her iki kapasite türü için de düzgün bir ihtiyaç dağılımı elde edilmiştir ( $G_{11}: 7,8,8,8,6,6$ ;  $G_{12}: 9,8,8,8,6,6$ ).

Bir başka çözüm de A ve onu takip eden D faaliyetlerini B faaliyetinden sonraya kaydırmak şeklindedir ( $G_{11}: 7,7,7,8,7,7$ ;  $G_{12}: 11,11,9,8,3,3$ ). Bu çözüme göre 1. Kapasite türü için birinci çözüme göre daha iyi bir dağılım elde edilmesine rağmen, ikinci kapasite türü için ihtiyaç miktarı 3 ile 11 arasında değişim göstermektedir.

Problemin daha sonra matematiksel modeli kurulmuştur (Bkz. Ek C). Toplam 38 değişkenden ( $X_j$ , 5 adet ;  $Z_{jt}$ , 13 adet ;  $Y_{jt}$ , 20 adet) ve 25 adet teknik sınırlamadan oluşan model Excel programının Solver alt programı ile çözülmüştür. Çözüm önce amaç fonksiyonunda her iki kapasite türünün ağırlıkları eşit alınarak ( $W_1=W_2$ ) bulunmuştur (Bkz. Ek A). Bu çözüme göre daha önce elle bulunan çözüme uygun olarak B faaliyeti 4.zaman biriminde başlamaktadır ( $X_2=4$ ). Diğer faaliyetlerin başlangıç zamanlarının da, A: 0, C: 0, D: 1 ve E: 4 olduğu görülmektedir.

Aynı model daha sonra 1. tür kapasitenin ağırlığını arttırmak suretiyle tekrar çözülmüştür ( $W_1=20$ ). Bu durumda ikinci tür kapasitenin önemi kalmamış, elle çözümden olduğu gibi B faaliyetini başa alıp, A ve D'yi kaydırmak birinci tür kapasite için daha düzgün bir kapasite ihtiyaç dağılımının elde edilmesini sağlamıştır. Bu çözüme göre de faaliyetlerin başlangıç zamanları A: 2, B: 0, C: 0, D: 3 ve E: 4 şeklinde bulunmuştur (Bkz. Ek B).

### IV. SONUÇ

Proje yönetiminde kapasite ihtiyacının düzgün dağılması gerek yönetim kolaylığı, gerekse maliyetleri düşürmek açısından işletmeler için büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada kapasite imkanları sınırsız kabul edilerek mümkün olduğu kadar düzgün bir ihtiyaç dağılımını hedefleyen bir tam sayılı programlama modeli geliştirilmiştir. Kapasitenin yetersiz kalması durumunda, proje tamamlanma süresini uzatarak, dolayısıyla her faaliyetin GS zamanlarını da aynı miktarda arttırarak modeli tekrar çalıştırmak ve yeni duruma uygun optimal çözümler üretmek mümkündür.

Modelin getirdiği yeniliklerden en önemlisi farklı kapasite türlerinin değişik ağırlıklarla amaç fonksiyonunda ifade edilmesidir. Yapılan uygulama sonucunda da görüldüğü gibi kapasite türlerinin ağırlıkları değiştiğinde farklı çözümlere ulaşılmaktadır. Modelin çözümü sonucu elde edilen değerlerin, elle çözüm sonucu elde edilen değerlerle aynı olması modelin geçerliliğini göstermektedir.

Modelin dezavantajını oluşturan değişken sayısının yüksek olması

$$[(n + \sum_{j=1}^n GS(j) - EB(j) + 1)]$$

sayıda 0-1 değişken] büyük çaplı problemlerde sorun yaratabilir. Ancak, bilgisayar teknolojisindeki hızlı ilerleme sayesinde bu dezavantajın ortadan kalkabileceği mümkün görülmektedir.

#### YARARLANILAN KAYNAKLAR

- [1] WASCHECK, G.; WECKERLE, E., **Die Praxis der Netzplantechnik**, Verlag für Unternehmensführung Dr.Max Gehlen, 1967, s.326.
- [2] SCHWARZE, J., **Netzplantechnik: Eine Einführung in das Projektmanagement**, 7.Auflage, Verlag Neue Wirtschafts- Briefe, Berlin, 1994, s.206.
- [3] ZIMMERMANN, W., **Quantitative Methoden zur Entscheidungsvorbereitung**, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1992, s.36.

ALVEREZ-VALDES, E.; TAMARIT, J.M., **Heuristic Algorithms for Resource- Constrained Project Scheduling: A Review and an Empirical Analysis**, Advances in Project Scheduling. Elsevier. Amsterdam. 1989.

DEMEULEMEESTER, E.; HERROELEN, W., "*A Branch- and- Bound Procedure for the Multiple Resource- Constrained Project Scheduling Problem*", **Management Science**, Vol.38., 1992.

DREXL, A., "*Scheduling of Project Networks by Job Assignment*", **Management Science**, Vol.37, No.12, 1991.

DREXL; DOMSCHKE; SCHILD; SCHOLD; VOSS, **Operations Research**, Springer Verlag, Berlin, 1997.

DREXL, A.; KOLISH, R.; SALEWSKI, F., "*Projektmanagement bei flexiblen Arbeitszeiten*", **Zeitschrift für Planung**, Vol.10, 1999.

KOLISH R., "*Resource Allocation Capabilities of Commercial Project Management Software Packages*", **Interfaces**. Vol. 29. 1999.

MINGOZZI, A.; MANIEZZO, V.; RICCIARDELLI, S.; BIANCO, V., "*An Exact algorithm for the Resource- Constrained Project Scheduling Problem Based on a New Mathematical Formulation*", **Management Science**, Vol.44, No.5, 1998.

NEUMANN, K.; MORLOCK, M., **Operations Research**, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1993.

## EK A. Kapasite Türleri Eşit Ağırlıklı Çözüm

Microsoft Excel 8.0 Yanıt Raporu  
Çalışma Sayfası: [ganzzahlige.xls]Sayfa1  
Yaratılan Rapor: 14.09.2001 15:49:32

Hedef Hücre (En Küçük)

Hücre	İlk Değer	Son Değer
\$A\$3	92,9734	12,2934

Ayarlanabilir Hücreler

Hücre	İlk Değer	Son Değer
\$A\$1	0	0 :X1
\$B\$1	0	4 :X2
\$C\$1	0	0 :X3
\$D\$1	0,99999999	1 :X4
\$E\$1	4	4 :X5
\$F\$1	1	1 :Z10
\$G\$1	0	0 :Z11
\$H\$1	0	0 :Z12
\$I\$1	1	0 :Z20
\$J\$1	0	0 :Z21
\$K\$1	0	0 :Z22
\$L\$1	0	0 :Z23
\$M\$1	0	1 :Z24
\$N\$1	1	1 :Z30
\$O\$1	0,999999998	1 :Z41
\$P\$1	0	0 :Z42
\$Q\$1	0	0 :Z43
\$R\$1	1	1 :Z54
\$S\$1	1	1 :y10
\$T\$1	0	0 :y11
\$U\$1	0	0 :y12
\$V\$1	1	0 :y20
\$W\$1	1	0 :y21
\$X\$1	0	0 :y22
\$Y\$1	0	0 :y23
\$Z\$1	1	1 :y24
\$AA\$1	1	1 :y25
\$AB\$1	1	1 :y30
\$AC\$1	1	1 :y31
\$AD\$1	1	1 :y32
\$AE\$1	1	1 :y33
\$AF\$1	1	1 :y41
\$AG\$1	1	1 :y42
\$AH\$1	1	1 :y43
\$AI\$1	0	1 :y44
\$AJ\$1	0	1 :y45
\$AK\$1	1	1 :y54
\$AL\$1	1	1 :y55

## Ek B. Birinci Kapasite Türü Ağırlıklı Çözüm

Hücre	İlk Değer	Son Değer
\$A\$3	104,1680001	84,168

Hücre	İlk Değer	Son Değer
\$A\$1	5,32907E-10	2 :X1
\$B\$1	4	0 :X2
\$C\$1	0	0 :X3
\$D\$1	1,000000667	3 :X4
\$E\$1	4	4 :X5
\$F\$1	1	0 :Z10
\$G\$1	0	0 :Z11
\$H\$1	2,66454E-10	1 :Z12
\$I\$1	0	1 :Z20
\$J\$1	0	0 :Z21
\$K\$1	0	0 :Z22
\$L\$1	0	0 :Z23
\$M\$1	1	0 :Z24
\$N\$1	1	1 :Z30
\$O\$1	1	0 :Z41
\$P\$1	-6,66667E-07	0 :Z42
\$Q\$1	6,66667E-07	1 :Z43
\$R\$1	1	1 :Z54
\$S\$1	0,999999987	0 :y10
\$T\$1	0	0 :y11
\$U\$1	0	1 :y12
\$V\$1	0	1 :y20
\$W\$1	0	1 :y21
\$X\$1	0	0 :y22
\$Y\$1	0	0 :y23
\$Z\$1	1	0 :y24
\$AA\$1	1	0 :y25
\$AB\$1	1	1 :y30
\$AC\$1	1	1 :y31
\$AD\$1	1	1 :y32
\$AE\$1	1	1 :y33
\$AF\$1	1	0 :y41
\$AG\$1	1	0 :y42
\$AH\$1	1	1 :y43
\$AI\$1	0	1 :y44
\$AJ\$1	0	1 :y45
\$AK\$1	1	1 :y54
\$AL\$1	1	1 :y55

### EK C. Uygulama Probleminin Matematiksel Modeli

Amaç fonksiyonunda kullanılacak değişkenlerle ifade edilen her dönem ve her iki kapasite türü (k=1 ve k=2) için toplam kapasite ihtiyaçları :

(5)

k=1 için;

$$G_{01} = 2Y_{10} + 2Y_{20} + 5Y_{30}$$

$$G_{11} = 2Y_{11} + 2Y_{21} + 5Y_{31} + 3Y_{41}$$

$$G_{21} = 2Y_{12} + 2Y_{22} + 5Y_{32} + 3Y_{42}$$

$$G_{31} = 2Y_{23} + 5Y_{33} + 3Y_{43}$$

$$G_{41} = 2Y_{24} + 3Y_{44} + 4Y_{54}$$

$$G_{51} = 2Y_{25} + 3Y_{45} + 4Y_{55}$$

k=2 için;

$$G_{02} = 3Y_{10} + 5Y_{20} + 6Y_{30}$$

$$G_{12} = 3Y_{11} + 5Y_{21} + 6Y_{31} + 2Y_{41}$$

$$G_{22} = 3Y_{12} + 5Y_{22} + 6Y_{32} + 2Y_{42}$$

$$G_{32} = 5Y_{23} + 6Y_{33} + 2Y_{43}$$

$$G_{42} = 5Y_{24} + 2Y_{44} + Y_{54}$$

$$G_{52} = 5Y_{25} + 2Y_{45} + Y_{55}$$

$$(4) \quad X_4 \geq X_1 + 1$$

$$X_5 \geq X_3 + 4$$

Amaç fonksiyonu :

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & W_1 ((2Y_{10} + 2Y_{20} + 5Y_{30} - 7.17)^2 + (2Y_{11} + 2Y_{21} \\ & + 5Y_{31} + 3Y_{41} - 7.17)^2 + (2Y_{12} + 2Y_{22} + 5Y_{32} + 3Y_{42} - \\ & 7.17)^2 + (2Y_{23} + 5Y_{33} + 3Y_{43} - 7.17)^2 + (2Y_{24} + 3Y_{44} + \\ & 4Y_{54} - 7.17)^2 + (2Y_{25} + 3Y_{45} + 4Y_{55} - 7.17)^2) + W_2 ((3Y_{10} \\ & + 5Y_{20} + 6Y_{30} - 7.5)^2 + (3Y_{11} + 5Y_{21} + 6Y_{31} + 2Y_{41} - 7.5)^2 \\ & + (3Y_{12} + 5Y_{22} + 6Y_{32} + 2Y_{42} - 7.5)^2 + (5Y_{23} + 6Y_{33} + \\ & 2Y_{43} - 7.5)^2 + (5Y_{24} + 2Y_{44} + Y_{54} - 7.5)^2 + (5Y_{25} + 2Y_{45} + \\ & Y_{55} - 7.5)^2) \end{aligned}$$

$$(1) \quad X_1 = Z_{11} + 2Z_{12}$$

$$X_2 = Z_{21} + 2Z_{22} + 3Z_{23} + 4Z_{24}$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = Z_{41} + 2Z_{42} + 3Z_{43}$$

$$X_5 = 4Z_{54}$$

$$(2) \quad Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} = 1$$

$$Z_{20} + Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{24} = 1$$

$$Z_{30} = 1$$

$$Z_{41} + Z_{42} + Z_{43} = 1$$

$$Z_{54} = 1$$

$$(3) \quad Y_{10} \geq 1 - M(1 - Z_{10})$$

$$Y_{11} \geq 1 - M(1 - Z_{11})$$

$$Y_{12} \geq 1 - M(1 - Z_{12})$$

$$Y_{20} + Y_{21} \geq 2 - M(1 - Z_{20})$$

$$Y_{21} + Y_{22} \geq 2 - M(1 - Z_{21})$$

$$Y_{22} + Y_{23} \geq 2 - M(1 - Z_{22})$$

$$Y_{23} + Y_{24} \geq 2 - M(1 - Z_{23})$$

$$Y_{24} + Y_{25} \geq 2 - M(1 - Z_{24})$$

$$Y_{30} + Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} \geq 4 - M(1 - Z_{30})$$

$$Y_{41} + Y_{42} + Y_{43} \geq 3 - M(1 - Z_{41})$$

$$Y_{42} + Y_{43} + Y_{44} \geq 3 - M(1 - Z_{42})$$

$$Y_{43} + Y_{44} + Y_{45} \geq 3 - M(1 - Z_{43})$$

$$Y_{54} + Y_{55} \geq 2 - M(1 - Z_{54})$$