



POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)

URL: <http://dergipark.org.tr/politeknik>



Profil kaydırmalı silindirik evolvent dişli çarkların matematik modellenmesi

Mathematical modelling of profile-shifted cylindrical involute gears

Yazar (Author): Mahmut Cüneyt FETVACI

ORCID: 0000-0002-1622-1583

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz (To cite to this article): Fetvacı, M.C., "Profil kaydırmalı silindirik evolvent dişli çarkların matematik modellenmesi", *Politeknik Dergisi*, 23(4): 1339-1346, (2020).

Erişim linki (To link to this article): <http://dergipark.org.tr/politeknik/archive>

DOI: 10.2339/politeknik.570841

Profil Kaydırmalı Silindirik Evolvent Dişli Çarkların Matematik Modellenmesi (TR)

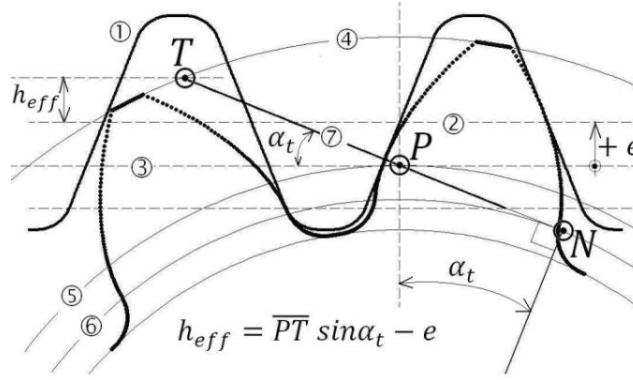
Mathematical Modelling of Profile-Shifted Cylindrical Involute Gears (EN)

Önemli Noktalar (Highlights)

- ❖ Eş zamanlı pinyon-çark profil oluşturma / Simultaneous pinion-wheel profile generation
- ❖ Asimetrik profilli dişliler ve profil kaydırma / Asymmetric gears and addendum modification
- ❖ Efektif evolvent üst parametre limiti / Effective upper limit for involute parameter

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bu çalışmada kremayer takımla imal edilen helisel dişli çarkların matematik modeli ele alınmıştır. Evolvent parametresinin üst limitinin tayini için bir analitik metot geliştirilmiştir. / This paper studies the mathematical models of helical gears generated by rack-type cutters. An analytical method for determining effective upper limit of involute parameter is proposed.



Şekil. Alın kesitte dişli geometrisi / Figure. Gear geometry at transverse section

Amaç (Aim)

Bu çalışmada kremayer takımla imal edilen evolvent profilli dişli çark mekanizmalarının modellenmesi ele alınmıştır. / This paper studies the equations of involute gears manufactured by rack-type cutters.

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Dişli teorisi ve imalat metodundan hareketle profil kaydırmalı pinyon ve çarkın tam matematik modeli verilmiştir. / Based on the gear theory and production method a complete mathematical model of a profile-shifted gear pair is given.

Özgünlük (Originality)

Profil kaydırma takımın vektör modeline uygulanmıştır. / The amount of profil shift is represented in the vector model of the rack cutter.

Bulgular (Findings)

Bir bilgisayar programı geliştirilerek profil kaydırmanın imal edilen dişli geometrisindeki etkileri incelenmiştir. / A computer simulation program is developed to investigate the effect of profile shifting on the generated teeth surfaces.

Sonuç (Conclusion)

Sayısal uygulamalar matematik modelin ve programlamanın doğruluğunu ve geçerliliğini göstermiştir. / Numerical examples demonstrate the verification and validation of the simulation model.

Etik Standartların Beyanı (Declaration of Ethical Standards)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The author(s) of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Profil Kaydırmalı Silindirik Evolvent Dişli Çarkların Matematik Modellenmesi

Araştırma Makalesi / Research Article

Mahmut Cüneyt FETVACI*

Mühendislik Fakültesi, Makina Müh. Bölümü, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Türkiye

(Geliş/Received : 28.05.2019 ; Kabul/Accepted : 29.11.2019)

ÖZ

Bu çalışmada kremayer takımla imal edilen evolvent profilili dişli çark mekanizmalarının modellenmesi ele alınmıştır. Dişli teorisi ve imalat metodundan hareketle profil kaydırmalı pinyon ve çarkın tam matematik modeli verilmiştir. Asimetrik diş profile de göz önüne alınmıştır. Bir bilgisayar programı geliştirilerek profil kaydırmanın imal edilen dişli geometrisindeki etkileri incelenmiştir. Sayısal uygulamalar matematik modelin ve programlamanın doğruluğunu ve geçerliliğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Evolvent profil, profil kaydırmalı dişliler, kremayer takım.

Mathematical Modelling of Profile-Shifted Cylindrical Involute Gears

ABSTRACT

This paper studies the equations of involute gears manufactured by rack-type cutters. Based on the gear theory and production method a complete mathematical model of a profile-shifted gear pair is given. Also asymmetric tooth profile is considered. A computer simulation program is developed to investigate the effect of profile shifting on the generated teeth surfaces. Numerical examples demonstrate the verification and validation of the simulation model.

Keywords: Involute profile, profile-shifted gears, rack cutter.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Düz ve helisel evolvent dişli çarklar paralel miller arasında güç ve hareketin iletiminde yaygın olarak kullanılır. Helisel dişliler daha sessiz çalışmakta ve daha büyük yük taşımaktadır. Dişli çarkların seri imalatında yuvarlanma yöntemini esas alan takımlar kullanılmaktadır. Takım ve imal edilen dişli arasındaki izafi harekete göre kremayer, azdırma ve pinyon-tipi olarak sınıflandırılan bu takımlar verilen bir modül için tüm diş sayılarındaki çarkların imalatında kullanılır [1-2].

Tsay, kremayer takımla imal edilen helisel dişli çarkların matematik modelini sunmuştur [3]. Chen ve Tsay, dişli teorisi ve yuvarlanma yönteminden hareketle helisel dişli çark mekanizmalarının matematik modelini sunmuş ve küçük diş sayılarına inmeyi sağlayan kök düzeltmesini incelemiştir [4]. Yang, helisel dişli çarklarda asimetrik diş profilini de göz önüne alan matematik modeli sunmuştur [5]. Asimetrik dişlilerde sağ ve sol profiller farklı kavrama açıları ile oluşturularak yüksek mukavemet ve verimlilik, düşük titreşim ve gürültü gibi performanslar elde edilir. Liu ve Tsay, evolvent dişli çarkların genelleştirilmiş hali olan beveloid dişli çarkların matematik modelini sunmuştur [6]. Beveloid dişli çarklar diş genişliği boyunca lineer

profil kaydırmalı evolvent dişli çarklar olarak tanımlanabilir. Brauer ise konvansiyonel profil kaydırmayıda gözönüne alan beveloid dişli modelini ve bu modelden hareketle sonlu eleman modelini sunmuştur [7]. Huang ve Su, beveloid dişli çark modeline fonksiyonel modifikasyonları (uç kabartma ve bombeli diş) ilave ederek dinamik sonlu eleman analizini gerçekleştirmişlerdir [8]. Alttan kesme evolvent dişlilerde küçük diş sayılarında meydana gelen ve dişdibini zayıflatarak yük taşıma kabiliyetini azaltan bir olaydır. Profil kaydırma alttan kesmeyi önlemek için kullanılan yöntemlerden en çok uygulananıdır. Bunun nedeni profil kaydırmalı dişlilerin standart (profil kaydırmaz) dişlilerde kullanılan takımlarla ve tezgahlarla imal edilebilmeleridir. Profil kaydırma alttan kesmeyi önlemenin yanısıra mekanizmayı istenen eksenlerarası mesafeye yerleştirmek ve diş mukavemetini arttırmak için de kullanılmaktadır. Dişlilere uygulanan profil kaydırma faktörlerinin toplamına göre mekanizmalar sınıflandırılmaktadır. Profil kaydırmalı mekanizmalar $x_1 + x_2 = 0$ durumunda V-0 Mekanizmaları, $x_1 + x_2 \neq 0$ durumunda ise V-Mekanizmaları olarak adlandırılmaktadır [9].

Literatürde mevcut çalışmalarda matematik modellerin detayları genellikle verilmemektedir. Takımın şekillendirici yüzeylerine ait parametrelerin değişim aralıkları birçok çalışmada okuyucuya bırakılmaktadır. Ayrıca profil kaydırmanın matematik modele ilavesi değişik düzenlemelerle yapılmakta ve denklemlerde açık

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)
e-posta : fetvacic@istanbul.edu.tr

olarak gösterilmemektedir. Genelde sadece resim üzerinden nasıl yapılacağı belirtilmektedir. Yang, pinyon ve çarka uygulanacak profil kaydırmada takımın çarklara göre izafi konumlarını belirtmekle birlikte vektör modelde ve koordinat dönüşümlerinde profil kaydirmayı göstermemiştir. Çalışmada asimetrik dişli durumunda profil kaydırmalı mekanizmaların montaj özellikleri belirtilmemiştir [5]. Bair, profil kaydırma miktarını denklemlere ilave etmekle birlikte evolvent parametresinin değişim aralığını belirtmemiştir [10].

Yukarıda belirtilen çalışmalarda profil kaydırmalı mekanizmalarda gözönüne alan detaylı bir matematik modelin olmaması yazarı bu konuda çalışmaya teşvik etmiştir. Sunulan bu çalışmada profil kaydırmalı mekanizmaların bilgisayar simülasyonu için kremayer takımla imal edilen düz ve helisel dişli çark mekanizmalarının (pinyon ve çark) matematik modellenmesi ele alınmıştır. Vektör formunda ifade edilen takım matematik modeline profil kaydırma miktarında eklenmiştir. Normal kesitte tanımlanan takım modelinden hareketle koordinat dönüşüm, diferansiyel geometri ve dişli ana kanunu uygulanarak asimetrik evolvent profilli helisel dişli çiftinin matematik modeli elde edilmiştir. Bu model programlanarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Farklı dizayn parametreleri seçilerek hazırlanan ve görselleştiren sayısal uygulamalarda modelin hem V-0 hemde V-Mekanizmaları için doğru ve geçerli olduğu sonucu elde edilmiştir. Asimetrik dişli durumda sınırlamalar belirtilmiştir. Ayrıca kremayer takımla dişli çark imalatında evolvent parametresinin üst sınırının imal edilen diş profilinde standart dişbaşı sağlayan analitik yöntem [11] bu çalışmada sunulan profil kaydırmalı modele adapte edilmiştir.

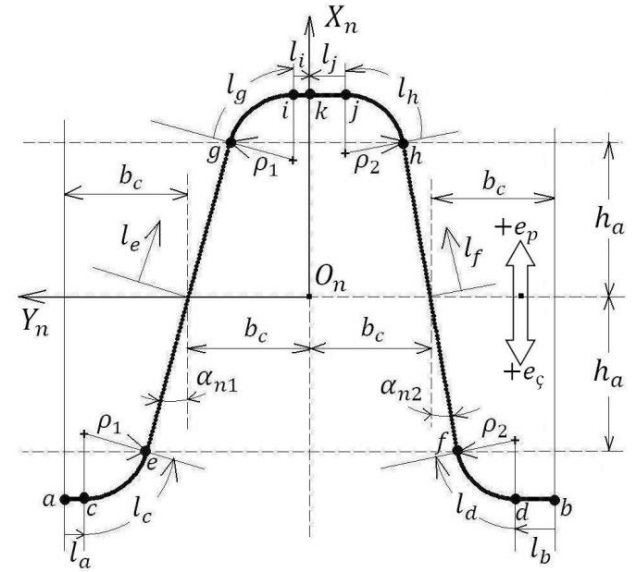
Profil kaydırmanın ve asimetrik diş profilinin de göz önüne alındığı takımın matematik modeli çalışmanın ikinci bölümünde verilmiştir. İmal edilen dişli çarkların matematik modelleri üçüncü bölümde ele alınmaktadır. Dördüncü bölümde evolvent parametresinin üst limiti için geliştirilen yöntem anlatılmıştır. Beşinci bölümde sayısal uygulamalar ele alınmış ve sonuçlar görselleştirilmiştir. Altıncı bölümde sonuçlar vurgulanmıştır.

2. KREMAYER TAKIMIN MATEMATİK MODELİ (MATHEMATICAL MODEL OF THE RACK CUTTER)

2.1.Normal Kesitte Takım Geometrisi (Cutter Geometry on the Normal Section)

Helisel dişli çark mekanizmasını imal eden kremayer takım geometrisi Şekil 1'de normal kesitte gösterilmektedir. Burada pinyon-çark mekanizmasını eşzamanlı oluşturan kremayer takım, dişlileri ayrı ayrı oluşturan iki özdeş kremayerin üstüste bindirilmiş durumu olarak değerlendirilmektedir. Diğer bir anlatımla takım imajinerdir. Trapez şekilli bu takımın köşeleri yuvarlatılmıştır. Takım öteleme hareketi yaparken eş çalışan dişliler dönme hareketi yapmaktadır. Normal

kesitte takım geometrisini belirlemek için kullanılan $S_n(X_n, Y_n, Z_n)$ koordinat sistemi sağ el kuralına uymaktadır. Y_n eksenini takım taksimat hattında ve X_n eksenini diş boşluğu merkez doğrusu üzerindedir. Takımın imal edilen dişlilerin yanak, kök ve tabanlarını şekillendiren bölgelerinin literatürde mevcut olan denklemleri [5, 12] profil kaydırma faktörleri ilave edilerek aşağıda verilmektedir. Denklemlerde normal kesitte kavrama açısı α_n ve takım ucu yuvarlatma yarıçapı ρ sembolleriyle gösterilmektedir. Bu sembollerin alt indislerindeki rakamlar sırasıyla sol ve sağ profiller içindir. Taksimat hattında diş kalınlığının yarısı veya diş boşluğunun yarısı $b_c = 0.25\pi m_n$ ifadesiyle hesaplanır. $c_y = 0,1,2 \dots$ alınarak takım geometrisi istenilen diş sayısında oluşturulabilir.



Şekil 1. Kremayer Takımın Normal Kesiti (Normal Section of the Rack Cutter) [5, 12]

Pinyon dişlisinin tabanını şekillendiren \overline{ac} ve \overline{bd} bölgelerinin yer vektörleri (1-2) numaralı eşitliklerde verilmektedir. \overline{ac} bölgesindeki bir noktanın konumunu tayin eden eğrisel parametrenin değişim aralığı $[l_a \in 0, b_c - h_a \tan \alpha_{n1} - \rho_1 \cos \alpha_{n1}]$ dir. Benzer şekilde \overline{bd} bölgesindeki bir noktanın konumunu tayin eden eğrisel parametrenin değişim aralığı $[l_b \in 0, b_c - h_a \tan \alpha_{n2} - \rho_2 \cos \alpha_{n2}]$ dir. Profil kaydırma miktarı e_p sembolü ile gösterilmektedir ve $e_p = m_n \cdot x_1$ dir.

$$R_n^{ac} = \begin{Bmatrix} x_n^{ac} \\ y_n^{ac} \\ z_n^{ac} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h_a + \rho_1 \sin \alpha_{n1} - \rho_1 + e_p \\ \frac{\pi m_n}{2} - l_a + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$R_n^{bd} = \begin{Bmatrix} x_n^{bd} \\ y_n^{bd} \\ z_n^{bd} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h_a + \rho_2 \sin \alpha_{n2} - \rho_2 + e_p \\ -\frac{\pi m_n}{2} + l_b + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Pinyon dişlisinin kökünü şekillendiren \overline{ce} ve \overline{df} bölgelerinin yer vektörleri (3-4) numaralı eşitliklerde verilmektedir. Bu bölgelerdeki herhangi bir noktanın

konumunu tayin eden eğrisel parametrelerin sınırları $[l_c \in 0, 90^\circ - \alpha_{n1}]$ ve $[l_d \in 0, 90^\circ - \alpha_{n2}]$ dir.

$$R_n^{ce} = \begin{Bmatrix} x_n^{ce} \\ y_n^{ce} \\ z_n^{ce} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h_a + \rho_1 \sin \alpha_{n1} - \rho_1 \cos l_c + e_p \\ b_c + h_a \tan \alpha_{n1} + \rho_1 \cos \alpha_{n1} - \rho_1 \sin l_c + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$R_n^{df} = \begin{Bmatrix} x_n^{df} \\ y_n^{df} \\ z_n^{df} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h_a + \rho_2 \sin \alpha_{n2} - \rho_2 \cos l_d + e_p \\ -b_c - h_a \tan \alpha_{n2} - \rho_2 \cos \alpha_{n2} + \rho_2 \sin l_d + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Pinyon dişlisinin evolvent yanaklarını şekillendiren \overline{eg} ve \overline{fh} bölgelerinin yer vektörleri (5-6) numaralı denklemlerde verilmektedir. Bu bölgelerdeki herhangi bir noktanın konumunu tayin eden eğrisel parametrelerin sınırları $[l_e \in -h_a/\cos \alpha_{n1}, h_a/\cos \alpha_{n1}]$ ve $[l_f \in -h_a/\cos \alpha_{n2}, h_a/\cos \alpha_{n2}]$ dir.

$$R_n^{eg} = \begin{Bmatrix} x_n^{eg} \\ y_n^{eg} \\ z_n^{eg} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_e \cos \alpha_{n1} + e_p \\ b_c - l_e \sin \alpha_{n1} + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$R_n^{fh} = \begin{Bmatrix} x_n^{fh} \\ y_n^{fh} \\ z_n^{fh} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_f \cos \alpha_{n2} + e_p \\ -b_c + l_f \sin \alpha_{n2} + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

İmajiner takımın pinyonun evolvent yanağını şekillendiren bölgesi ile çarkın evolvent yanağını şekillendiren bölgesi aynıdır. Ancak imal edilen taslaklara göre profil kaydırma yönleri farklı olduğundan çark dişlisinin evolvent yanaklarını şekillendiren \overline{eg} ve \overline{fh} bölgelerinin yer vektörleri (7-8) numaralı denklemlerde verilmektedir. Profil kaydırma miktarı bu denklemlerde e_c sembolü ile gösterilmektedir ve $e_c = m_n \cdot x_2$ dir. Bu denklemlerde bölge parametrelerinin değişim aralıkları pinyon için verilenlerle aynıdır.

$$R_n^{eg} = \begin{Bmatrix} x_n^{eg} \\ y_n^{eg} \\ z_n^{eg} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_e \cos \alpha_{n1} - e_c \\ b_c - l_e \sin \alpha_{n1} + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$R_n^{fh} = \begin{Bmatrix} x_n^{fh} \\ y_n^{fh} \\ z_n^{fh} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_f \cos \alpha_{n2} - e_c \\ -b_c + l_f \sin \alpha_{n2} + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Çark dişlisinin kökünü şekillendiren \overline{gi} ve \overline{hj} bölgelerinin yer vektörleri (9-10) numaralı denklemlerde verilmektedir. Bu denklemlerde bölge parametrelerinin değişim aralıkları $[l_g \in 90^\circ - \alpha_{n1}, 0]$ ve $[l_h \in 90^\circ - \alpha_{n2}, 0]$ dir.

$$R_n^{gi} = \begin{Bmatrix} x_n^{gi} \\ y_n^{gi} \\ z_n^{gi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_a - \rho_1 \sin \alpha_{n1} + \rho_1 \cos l_g - e_c \\ b_c - h_a \tan \alpha_{n1} - \rho_1 \cos \alpha_{n1} + \rho_1 \sin l_g + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$R_n^{hj} = \begin{Bmatrix} x_n^{hj} \\ y_n^{hj} \\ z_n^{hj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_a - \rho_2 \sin \alpha_{n2} + \rho_2 \cos l_h - e_c \\ -b_c + h_a \tan \alpha_{n2} + \rho_2 \cos \alpha_{n2} - \rho_2 \sin l_h + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

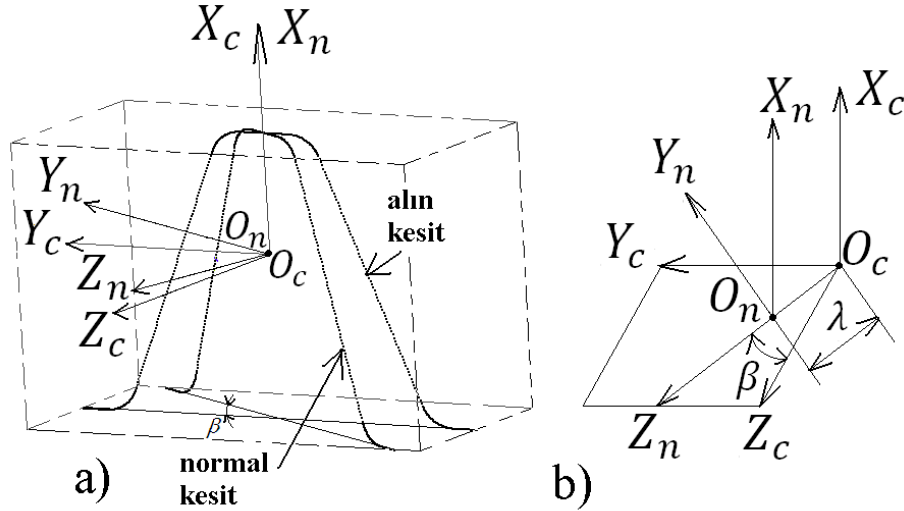
Çark dişlisinin tabanını şekillendiren \overline{ik} ve \overline{jk} bölgelerinin yer vektörleri (11-12) numaralı denklemlerde verilmektedir. Bu denklemlerde bölge parametrelerinin değişim aralıkları $[l_i \in b_c - h_a \tan \alpha_{n1} - \rho_1 \cos \alpha_{n1}, 0]$ ve $[l_j \in b_c - h_a \tan \alpha_{n2} - \rho_2 \cos \alpha_{n2}, 0]$ dir.

$$R_n^{ik} = \begin{Bmatrix} x_n^{ik} \\ y_n^{ik} \\ z_n^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_a - \rho_1 \sin \alpha_{n1} + \rho_1 - e_c \\ l_i + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$R_n^{jk} = \begin{Bmatrix} x_n^{jk} \\ y_n^{jk} \\ z_n^{jk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_a - \rho_2 \sin \alpha_{n2} + \rho_2 - e_c \\ -l_j + c_y \pi m_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

2.1. Helisel Yüzey Oluşturma (Helical Surface Generation)

Helisel dişli çarklarda temel boyut ve büyüklükleri tanımlamak için diş doğrultusuna dik olan normal kesit ve mil dik olan alın kesit kullanılır. Normal kesitte ve alın kesitte referans profilleri trapez şekilli kremayer olmakla birlikte kavrama açıları ve modüller farklıdır. Standart ölçüler normal kesitte belirlenmektedir. Dişler mil eksenine göre eğik olduğundan helisel takım yüzeyini elde etmek için normal kesitten hareketle koordinat dönüşümü uygulanır. Böylece Şekil 2'de görüldüğü üzere S_n koordinat sistemine bağlı normal kesitteki yüzey $\overline{O_n O_c}$ doğrusu boyunca ötelenir. $\lambda = |\overline{O_n O_c}|$ takım yüzeyinin dizayn parametrelerinden biridir ve β imal edilen dişlinin helis açısıdır. Dönüşümün matematik ifadesi (13) numaralı eşitlikte verilmektedir.



Şekil 2. Helisel Yüzey İçin Koordinat Dönüşüm (Helical Surface Generation)

$$[M_{cn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & -\lambda\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & \lambda\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Böylece helisel dişli kremayer takımın vektörel ifadesi $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ koordinat sisteminde elde edilir.

$$R_c^i = [M_{cn}]R_n^i \quad (14)$$

Bu ifadede üst indis i sırasıyla \overline{ac} , \overline{bd} , \overline{ce} , \overline{df} , \overline{eg} ve \overline{fh} bölgelerini gösterir. Açık formda ifade aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} x_c^i &= x_n^i \cos\beta - \lambda \sin\beta \\ y_c^i &= y_n^i \\ z_c^i &= x_n^i \sin\beta + \lambda \cos\beta \end{aligned} \quad (15)$$

Diferansiyel geometriden takımın imal eden yüzeylerinin birim normal vektörleri aşağıdaki ifade ile elde edilir [13].

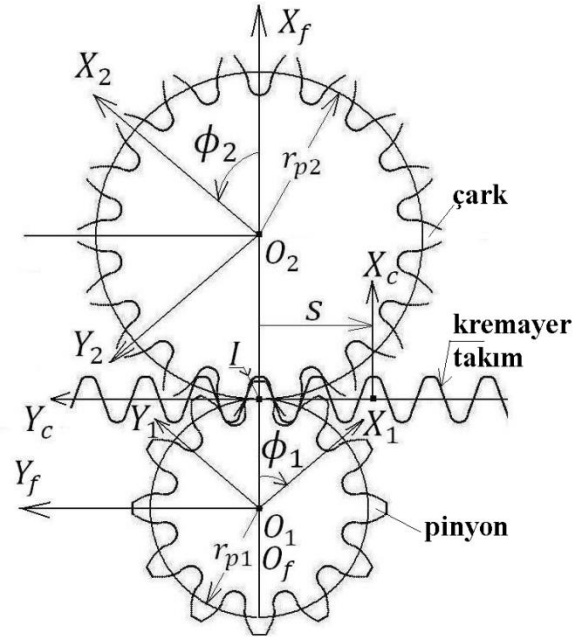
$$n_c^i = \frac{\partial R_c^i}{\partial t_j} \times \frac{\partial R_c^i}{\partial \lambda} \Big/ \left| \frac{\partial R_c^i}{\partial t_j} \times \frac{\partial R_c^i}{\partial \lambda} \right| \quad (16)$$

Bu ifadede üst indis i takımın bölgelerini ve alt indis j bu bölgelere ait eğrisel parametreleri gösterir.

3. İMAL EDİLEN ÇARKLARIN MATEMATİK MODELLERİ (MATHEMATICAL MODELS OF GENERATED GEARS)

İmajiner kremayer takım ile imal edilen dişli çark arasındaki koordinat bağı Şekil 3'de gösterilmiştir. $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ kremayer takımın koordinat sistemi, $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ imal edilen pinyon dişlisinin koordinat sistemi, $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ imal edilen çark dişlisinin koordinat sistemi ve $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ sabit olan referans koordinat sistemidir. Takımın öteleme hareketi

$S = r_{p1}\phi_1 = r_{p2}\phi_2$ değerindedir. İmal edilen pinyon dişlisi ϕ_1 ve çark dişlisi ϕ_2 açıları kadar dönmektedir. Pinyon taksimat yarıçapı r_{p1} ve çark taksimat yarıçapı r_{p2} sembollerıyla gösterilmektedir.



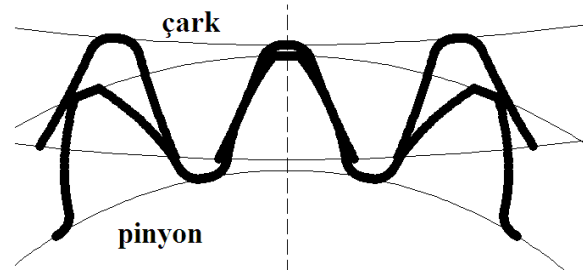
Şekil 3. Takım ile İmal Edilen Dişliler Arasındaki Koordinat Dönüşümü (Coordinate Relationship between Rack Cutter and Generated Gears) [5, 13]

S_c takım koordinat sisteminden pinyon S_1 koordinat sistemine dönüşümün matris ifadesi (17) numaralı denklemde verilmektedir [13].

$$[M_{1c}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 & r_{p1}(\cos\phi_1 + \phi_1 \sin\phi_1) \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 & r_{p1}(\sin\phi_1 - \phi_1 \cos\phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

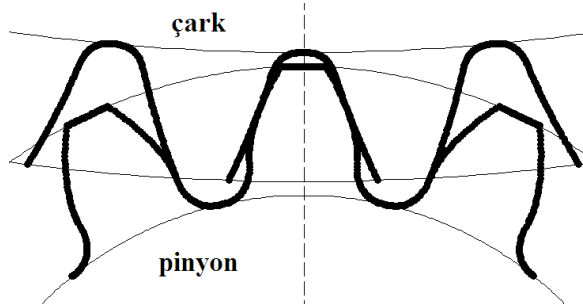
uygulamalardan faydalanılmıştır. Sonuçlar alın kesitte görselleştirilmiştir.

Şekil 5’de görselleştirilen simetrik profilli helisel dişli çark mekanizmasında normal modül $m_n = 4mm$, kavrama açısı $\alpha_n = 20^\circ$, helis açısı $\beta = 23.5782^\circ$, pinyon diş sayısı $T_1 = 17$ ve çark diş sayısı $T_2 = 81$ alınmıştır. Takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho = 0.38 \cdot m_n$ dir. Bu mekanizmada pinyona $x_1 = +0.6$ ve çarka $x_2 = +0.3$ profil kaydırma uygulanarak eksenler arası mesafesi $a_v = 217.287mm$ olan V- mekanizması elde edilmiştir [14].



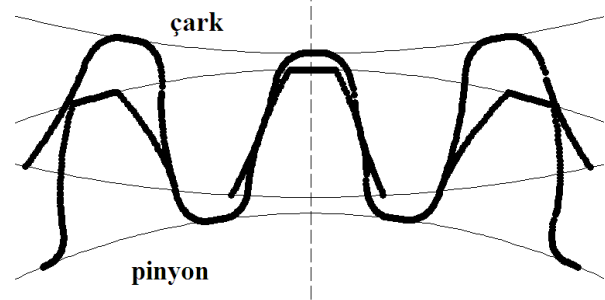
Şekil 5. Helisel Dişli V-Mekanizması (Helical Gear Mechanisms with General Nonstandard System)

Şekil 6’da görselleştirilen simetrik profilli helisel dişli çark mekanizmasında normal modül $m_n = 8mm$, kavrama açısı $\alpha_n = 20^\circ$, helis açısı $\beta = 25^\circ$, pinyon diş sayısı $T_1 = 14$ ve çark diş sayısı $T_2 = 70$ alınmıştır. Takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho = 0.38 \cdot m_n$ dir. Bu mekanizmada pinyona $x_1 = 0.0$ ve çarka $x_2 = -0.334$ profil kaydırma uygulanarak eksenler arası mesafesi $a_v = 368mm$ olan V- mekanizması elde edilmiştir [15].



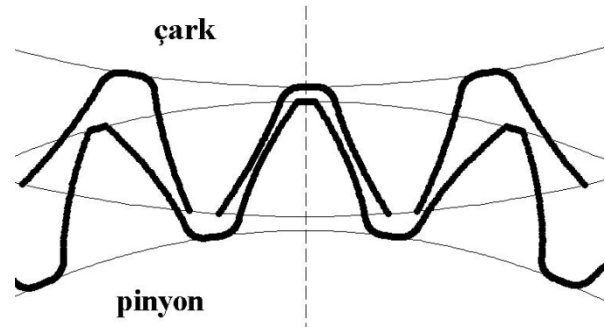
Şekil 6. Helisel Dişli V-Mekanizması (Helical Gear Mechanisms with General Nonstandard System)

Şekil 7’de görselleştirilen asimetric profilli dişli çark mekanizmasında normal modül $m_n = 2.5mm$, pinyon diş sayısı $T_1 = 24$ ve çark diş sayısı $T_2 = 40$ alınmıştır. Sağ profilin kavrama açısı $\alpha_{n1} = 20^\circ$ ve takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho_1 = 0.38 \cdot m_n$ dir. Sol profilin kavrama açısı $\alpha_{n2} = 15^\circ$ ve takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho_2 = 0.3373 \cdot m_n$ dir. $\alpha_n = 15^\circ$ için minimum diş sayısı $T_{min} = 30$ olduğundan pinyonda düşük kavrama açılı kenarda alttan kesme söz konusudur. Önlemek için $x_1 = +0.2$ profil kaydırma faktörü yeterlidir. Çarka $x_2 = -0.2$ uygulanarak V-0 mekanizması elde edilebilir. Eksenler arası mesafe $a_v = 80mm$ dir.



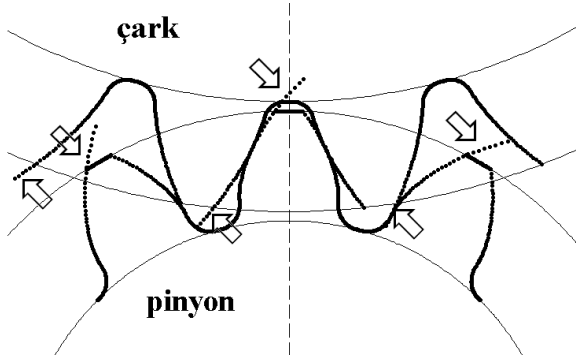
Şekil 7. Asimetric Profilli Düz Dişli V-0 Mekanizması (Spur Gear Mechanism with Asymmetric Profile and Long-Short Addendum System)

Şekil 8’de görselleştirilen asimetric profilli dişli çark mekanizmasında normal modül $m_n = 2.5mm$, pinyon diş sayısı $T_1 = 24$ ve çark diş sayısı $T_2 = 40$ alınmıştır. Sağ profilin kavrama açısı $\alpha_{n1} = 20^\circ$ ve takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho_1 = 0.38 \cdot m_n$ dir. Sol profilin kavrama açısı $\alpha_{n2} = 15^\circ$ ve takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho_2 = 0.3373 \cdot m_n$ dir. V-Mekanizması oluşturmak için pinyona $x_1 = +1.0$ ve çarka $x_2 = +1.0$ profil kaydırma uygulanmıştır. Mekanizma yan boşluklu çalışmakta ve eksenlerarası mesafe $a_v = 85mm$ dir. Asimetric dişlilerde yan boşluksuz V-mekanizmasında sağ ve sol profiller için farklı genişletilmiş eksenlerarası mesafe elde edildiğinden sunulan matematik model doğru cevap vermemektedir.



Şekil 8. Asimetric Profilli Düz Dişli Yanboşluklu V-Mekanizması (Asymmetric Gear Pair with General Nonstandard System and Backlash)

Önerilen evolvent parametre limiti ile literatürdeki limit arasındaki farkı göstermek üzere hazırlanan mekanizma Şekil 9’da gösterilmiştir. Simetrik profilli helisel dişli çark mekanizmasında normal modül $m_n = 4mm$, kavrama açısı $\alpha_n = 20^\circ$, helis açısı $\beta = 23^\circ$, pinyon diş sayısı $T_1 = 12$ ve çark diş sayısı $T_2 = 24$ alınmıştır. Takım uç yuvarlatma yarıçapı $\rho = 0.38 \cdot m_n$ dir. Bu mekanizmada pinyona $x_1 = +0.3$ ve çarka $x_2 = +0.4$ profil kaydırma uygulanmıştır. Okla işaretlenen kenarlarda literatürde verilen $l_j \in -h_a/\cos\alpha_n, h_a/\cos\alpha_n$ limitler kullanılmıştır. Evolvent profil taslağın dişbaşı dairesinden ötede sonlanmaktadır. Dördüncü bölümde belirtilen hususlar çerçevesinde diğer yanaklarda ise önerilen $l_j \in -h_a/\cos\alpha_n, h_{eff}/\cos\alpha_n$ limitler kullanılarak tam değer elde edilmektedir.



Şekil 9. Evolvent Parametre Limiti İçin Karşılaştırma (Comparison of Involute Parameter Limits)

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

Kremayer-tipi takımlar düz ve helisel dişlilerin imalatında yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde çok sayıda çalışmada kremayer takımla dişli imalatının matematik modellenmesi ve bilgisayar simülasyonu sunulmaktadır. Çalışmalarda matematik modellerden hareketle geliştirilen programlarla çeşitli dizayn parametrelerinin imal edilecek dişli geometrisi üzerindeki etkileri fiziki imalattan önce incelenmektedir. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal yöntemlerle gerilme analizi için modeller elde edilmektedir. Güvenilir gerilme analizi için öncelikle diş profilinin doğru ifadesi gerekmektedir. Bu bakımdan çeşitli tipten dişli çarkların matematik modellenmesini konu alan çalışmalar devam etmektedir. Literatürde dişli çark matematik modelleri ile ilgili çalışmalar çoğunlukla Litvin'in Vektör Yaklaşımını esas almaktadır [13]. Bununla birlikte çalışmalarda detaylı matematik model verilmemekte, farklı referans koordinat sistemi kullanılmakta ve bölge parametrelerinin değilim aralıkları genellikle açıklanmamaktadır. Bu nedenle okuyucu bir makalede verilen denklemler ile dişli çark profilini elde eden bir programı yazmakta zorlanabilir.

Matematik modelinin tüm detaylarının verildiği bir makalenin nadir oluşu yazarı bu makaleyi hazırlamaya teşvik etmiştir. Bu çalışmada literatürde mevcut çalışmalar incelenerek ayrı ayrı bir çok makaledeki bilgiler değerlendirilip detayların verildiği bir matematik geliştirilmiştir. Pinyon ve çarkı birarada oluşturan tam matematik model sunulmuştur. Asimetrik diş profili de göz önüne alınmıştır. Dişli çarkların taban, kök ve evolvent yanaklarını oluşturan takım bölgelerinin parametrik ifadeleri için değişim aralıkları açık verilmiştir. Pinyon ve çark için profil kaydırma miktarları takımın vektör ifadesine eklenmiştir.

İmalatta standart olarak takım taksimat hattı ile taslak taksimat dairesi teğettir. Bununla birlikte çeşitli amaçlar için takım taslağa göre radyal mesafede yaklaştırılır veya uzaklaştırılır. Bu şekilde imal edilen dişliler profil kaydırmalı dişli olarak adlandırılır. Profil kaydırmalı dişli çark mekanizmaları $x_1 + x_2 = 0$ durumunda V-0 Mekanizmaları, $x_1 + x_2 \neq 0$ durumunda ise V-Mekanizmaları olarak adlandırılmaktadır [9]. İncelenen

makalelerde profil kaydırma modellere farklı şekillerde eklenmiş, detaylar açıklanmamıştır. Ayrıca V-Mekanizmaları ile ilgili çalışmalar nadirdir.

Sunulan bu çalışmada ise profil kaydırma takımın vektör ifadesine pinyon ve çark için ayrı ayrı eklenmiştir. (1-6) numaralı denklemler pinyonu şekillendiren bölgelere aittir. (7-12) numaralı denklemler çarkı şekillendiren bölgelere aittir. Uygulanan profil kaydırmaların pozitif yönleri Şekil 1'de belirtilmiştir. Modelde profil kaydırma faktörlerinin tüm geçerli kombinasyonları göz önüne alınmaktadır. Böylece kaydırmaz, ($x_1 + x_2 = 0$) kaydırmalı ve ($x_1 + x_2 \neq 0$) kaydırmalı mekanizmalar modellenebilmektedir. Bu çalışmada sunulan matematik modelin doğruluğu ve geçerliliğini test etmek üzere farklı örnekler ele alınmıştır. Şekil 5 ve Şekil 6'da simetrik profilli helisel dişli V- mekanizmaları görselleştirilmiştir. Bu mekanizmaların ilkinde genişletilmiş ve ikincisinde daraltılmış eksenlerarası mesafe söz konusudur. Şekil 7'de asimetrik profilli düz dişli çark mekanizması görselleştirilmiştir. Pinyon ve çarka eksenlerarası mesafeyi değiştirmeyecek toplam profil kaydırma uygulanmıştır. Böylelikle bir V-0 mekanizması elde edilmiştir. Şekil 5-7'de görselleştirilen mekanizmalar yanboşluksuz çalışan mekanizmalardır. Şekil 8'de görselleştirilen uygulamada ise yanboşluklu çalışan asimetrik profilli V-Mekanizması elde edilmiştir. Genişletilmiş (veya daraltılmış) eksenlerarası mesafede eşçalışmayı tanzim eden (23-24) numaralı denklemler gereği asimetrik profilin söz konusu olduğu durumlarda mekanizma sadece yanboşluklu olarak oluşturabilmektedir.

Endüstride V-Mekanizmalarının yanboşluksuz olarak çalıştırılması tercih edilmektedir. Bu durumda eksenlerarası mesafe $a_v < a + m_n(x_1 + x_2)$ dir. Eğer mekanizma $a_v = a + m_n(x_1 + x_2)$ olarak düzenlenirse yanboşluklu mekanizma olarak adlandırılır. Sunulan model simetrik dişlilerde her iki duruma uyumludur. Ancak asimetrik dişli durumunda denklem gereği sağ ve sol taraftaki yuvarlanma daireleri çapları farklı olduğundan yanboşluksuz çalışmada hatalı geometri vermektedir. Yanboşluksuz durumda eşçalışmayı düzenleyen denklemler aşağıda verilmektedir. Bu denklemler asimetrik dişli profiline uyarlanmamaktadır.

$$x_1 + x_2 = \frac{T_1 + T_2}{2 \tan \alpha_n} \text{ev} \alpha_{sv} + \text{ev} \alpha_s \quad (23)$$

$$a_v = \frac{m_n}{\cos \beta} \frac{T_1 + T_2}{2} \frac{\cos \alpha_s}{\cos \alpha_{sv}} \quad (24)$$

Evolvent parametresinin üst limiti imal edilen diş profilinde diş başından yukarıda bir noktayı göstermektedir. Fazlalığın giderilmesi CAD programında yapılırsa veya programa uygun bir algoritma eklenir. Yazar kavrama kütasından hareketle analitik bir ifade geliştirerek efektif üst limiti elde etmiştir [11]. Kremayer takımla imal edilen beveloid dişli çarklar için geliştirilen yaklaşım bu çalışmada sunulan modele uyarlanmıştır.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI (DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazar(lar)ı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Juvinall, R.C. and Marshek, K.M., "Machine Component Design", *John Wiley & Sons*, ISBN 9781118092262, Singapore , (2012).
- [2] Jelaska, D. T., "Gears and Gear Drives", *John Wiley & Sons*, West Sussex, (2012).
- [3] Tsay, C.-B., "Helical gears with Involute shaped teeth: geometry, computer simulation, tooth contact analysis and stress analysis", *ASME Journal of Mechanical Design*, 110: 482-491, (1988).
- [4] Chen, C.-F. and Tsay, C.-B., "Tooth profile design for the manufacture of helical gear sets with small numbers of teeth", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 45: 1531-1541, (2005).
- [5] Yang, S.-C., "Mathematical model of a helical gear with asymmetric involute teeth and its analysis", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 26: 448-456, (2005).
- [6] Liu, C.C. and Tsay, C.-B., "Tooth undercutting of beveloid gears", *ASME Journal of Mechanical Design*, 123 : 569-576, (2001).
- [7] Brauer, J., "A general finite element model of involute gears", *Finite Elements in Analysis and Design*, 40: 1857-1872, (2004).
- [8] Huang, K. J. and Su, H. W., "Approaches to parametric element constructions and dynamic analyses of spur/helical gears including modifications and undercutting", *Finite Elements in Analysis and Design*, 46: 1106-1113, (2010).
- [9] Ulukan, L., "Makina Elemanları Dersleri: Tashihli Dişliler", *İTÜ Makina Fakültesi*, İstanbul, (1970).
- [10] Bair, B. -W., "Computer aided design of non-standard elliptical gear drives", *Imech Journal of Mechanical Engineering Science*, 216: 473-482, (2002).
- [11] Fetvaci, M. C., "Determination of effective involute parameter limit in generation simulation of gears manufactured by rack-type cutters", *Mechanics & Industry*, 18 : 405, (2017).
- [12] Yang, S. -C., "Meshing analysis of a gear with a ring-involute gear", *Imech Journal of Mechanical Engineering Science*, 217: 1287-1299, (2003).
- [13] Litvin, F.L., "Gear Geometry and Applied Theory", *Prentice Hall*, New Jersey, (1994).
- [14] Kabus, K., "Decker Maschinenelemente: Funktion, Gestaltung und Berechnung", *Carl Hanser Verlag*, München, (2016).
- [15] Şekercioğlu, T., "Makine Elemanları: Çözümlü Problemler", *Birsen Yayınevi*, İstanbul, (2019)