Araştırma Makalesi / *Research Article*
Matematik / *Mathematics*

Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(1): 584-594, 2020
***Journal of the Institute of Science and Technology,* 10(1): 584-594, 2020**

DOI: 10.21597/jist.572407 **ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618**

Bulanık Parametreli İkinci Mertebeden Bulanık Sınır Değer Problemi

Nihat ALTINISIK[1] Tahir CEYLAN[2*]

ÖZET: Bu makalede iki nokta sınır değer problemi genelleştirilmiş Hukuhara türevi (gh-türev) ile incelenmiştir. Bu yöntemin dört farklı çözümü vardır. Bu çözümler ayrı ayrı incelenerek elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Yöntemin uygulanabilirliği bir örnekle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Hukuhara türevi, bulanık sınır değer problemi, genelleştirilmiş çözüm

Second Order Fuzzy Boundary Value Problem with Fuzzy Parameter

ABSTRACT: In this article two point fuzzy boundary value problem is examined under the approach generalized Hukuhara differentiability (gH-differentiability). There are four different solutions for the problem by using a generalized differentiability. These solutions are analyzed separately and the results are presented. The method's applicability is illustrated with an example.

Keywords: Generalized Hukuhara differentiability, fuzzy boundary value problem, generalized solution

[1] Nihat ALTINISIK (**Orcid ID:** 0000-0002-8914-4240), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun, Türkiye
[2] Tahir CEYLAN (**Orcid ID:** 0000-0002-3187-2800), Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sinop, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Tahir CEYLAN, e-mail: tceylan@sinop.edu.tr

Geliş tarihi / *Received:* 31-05-2019
Kabul tarihi / *Accepted:* 14-11-2019

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler pek çok gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde önemli rol oynamaktadır. Fakat modelleme yapılırken çok fazla parametreyle karşılaşılmaktadır. Bu parametreler klasik yerine bulanık olarak değerlendirildiğinde ortaya daha gerçekçi sonuçlar çıktığı görülmüştür. Bu sebeple gerçek dünya problemlerinin çözümünde bulanık diferansiyel denklemleri kullanmak daha uygun ve daha güvenilir olacaktır.

Bulanık diferansiyel denklemlerin temeli bulanık küme ve bulanık türev kavramlarına dayanmaktadır. Bulanık küme kavramı Zadeh (1965), tarafından ilk kez ortaya atılmıştır. Zadeh bu kavramı gerçek hayatta belirsizlik içeren durumların modellenmesi için kurmuştur. Küme değerli fonksiyonlar için türev ve fark kavramlarının ilk tanımlarından biri Hukuhara (1967) tarafından verilmiştir. Bu kavramlar Puri ve Ralescu (1983) tarafından bulanık durumu için geliştirilmiş ve birçok araştırmacı tarafından bulanık diferansiyel denklemlere uygulanmıştır (Goetschel ve Voxman, 1986; Kaleva, 1987; Dubois ve Prade, 1980; Gomes ve ark., 2010; Khastan ve Nieto, 2010; Gültekin ve Altınışık, 2014). Bu tip problemlerin çözümleri için farklı çözüm yöntemleri uygulanarak ortaya çıkan sonuçlar değerlendirilmiştir (Gültekin Çitil, 2018). Bulanık diferansiyel denklemlerin Hukuhara türevi ile elde edilen herhangi bir çözümünün artan destek bölgesi genişliğine sahip olması gibi bir dezavantaja sahiptir. Bu durum belirsizliği arttırmaktadır. Bu türev yaklaşımının dezavantajının giderilmesi için Bede ve Gal (2005) tarafından bulanık değerli fonksiyonlar için kuvvetli genelleştirilmiş türev tanımı verilmiştir. Bu durumda bulanık diferansiyel denklemin çözümü azalan destek bölgesi genişliğine sahip olmuştur. İki fuzzy sayısı arasındaki Hukuhara farkı (H-fark) çok kısıtlayıcı koşullar altında vardır (Kaleva, 1984). Bu sebeple problemin çözümü için daha az kısıtlayıcı koşulların olduğu genelleştirilmiş Hukuhara farkı (gH-fark) ve genelleştirilmiş Hukuhara türevi (gH türev) kavramları kullanılacaktır (Bede ve Stefanini, 2012).

Bu çalışmada iki nokta bulanık sınır değer problemi

$$L = -\frac{d^2}{dt^2}$$

olmak üzere

$$L\hat{u} = \hat{\lambda}\hat{u}, t \in [0, m] \tag{1}$$
$$\hat{u}(0) = \hat{A} \tag{2}$$
$$\hat{u}'(m) = \hat{B} \tag{3}$$

ile verilmiştir. Burada $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ simetrik üçgensel bulanık sayıları, $\hat{\lambda}$ ise pozitif simetrik üçgensel bulanık sayı ve $\hat{u}(t)$ negatif olmayan çözüm fonksiyonudur.

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde makale boyunca kullanılacak olan temel gösterimlerin yanı sıra bazı kavramlar ve sonuçları verilecektir.

$\hat{u}$, $\mathbb{R}$' de bir bulanık altküme olsun, yani her bir t reel sayısına onun $\hat{u}(t)$ üyelik derecesini karşılık getiren bir $\hat{u}: \mathbb{R} \to [0,1]$ dönüşümüdür.

Tanım 2.1: Bir $\hat{u}$ bulanık kümesinin α −kesim kümesi, bulanık kümedeki elemanlardan üyelik derecesi α' dan küçük olmayan elemanların kümesidir ve $[\hat{u}]^\alpha$ ile gösterilir. Yani $\alpha \in [0,1]$ için, $[\hat{u}]^\alpha = \{x \in X: \mu_{\hat{u}}(x) \geq \alpha\}$ dir (Klir ve Yuan, 1995). $\hat{u}$ bulanık sayısının α −kesim kümesi $[\hat{u}]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ ile gösterilir. Burada $\alpha = 1$ için $\alpha -$ kesim kümesinden bulanık kümenin çekirdeği ve $\alpha = 0$ için $\hat{u}^{\alpha}$ kümesinden bulanık kümenin desteği bulunabilir.

Tanım 2.2: Bir $\hat{u}$ bulanık kümesini belirleyen $\mu: \mathbb{R} \to [0,1]$ dönüşümü ile tanımlı μ üyelik fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\hat{u}$ ya, $\mathbb{R}$ üzerinde bulanık sayı denir (Kaleva, 1987):

$\hat{u}$ normal, konveks, $\mathbb{R}$ de üst yarı sürekli bulanık küme ve $[\hat{u}]^0 = \overline{\text{dest}(\hat{u})} = \overline{\left\{x \in \mathbb{R} | \mu_{\hat{u}}(x) > 0\right\}}$ kompakttır.

Tanım 2.3: $\hat{u}$ bulanık sayısının α −kesim kümesi $\alpha = 0$ için $[\hat{u}]^0 = [u_0^-, u_0^+]$ olsun. Eğer $u_0^- > 0$ ise $\hat{u}$ bulanık sayısı pozitiftir denir (Nasseri, 2008).

Tüm bulanık reel sayılarının kümesi $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ ile negatif olmayan bulanık reel sayılarının kümesi $\mathbb{F}^+(\mathbb{R})$gösterilsin.

Tanım 2.4: Keyfi bir $\hat{u}$ bulanık reel sayısı için α- kesim kümesi $[\hat{u}]^{\alpha} = [u_{\alpha}^-, u_{\alpha}^+]$olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

1. u_{α}^-, $(0,1]$ aralığı üzerinde α nn sınırlı sol sürekli monoton artan fonksiyonudur ve $\alpha = 0$ için sağ süreklidir.
2. u_{α}^+, $(0,1]$ aralığı üzerinde α nn sınırlı sol sürekli monoton azalan fonksiyonudur ve $\alpha = 0$ için sağ süreklidir.
3. $u_{\alpha}^- \leq u_{\alpha}^+, 0 \leq \alpha \leq 1$ (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 2.5: $\hat{u}$ bulanık sayısı $\hat{u} = (\underline{u}, u, \bar{u})$ ile gösterilsin $[\underline{u}, \bar{u}]$ desteği ile simetrik üçgensel bir bulanık sayı ise, $\hat{u}$ sayısının α- kesim kümesi $[\hat{u}]^{\alpha} = \left[\underline{u} + \left(\frac{\bar{u}-\underline{u}}{2}\right)\alpha, \bar{u} - \left(\frac{\bar{u}-\underline{u}}{2}\right)\alpha\right]$ olur (Gültekin ve Altınışık, 2014).

Tanım 2.6: Her $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\hat{u} \oplus \hat{v}$ toplamı $[\hat{u} \oplus \hat{v}]^{\alpha} = [\hat{u}]^{\alpha} + [\hat{v}]^{\alpha}$ ile ve $\lambda \odot \hat{u}$çarpımı da $[\lambda \odot \hat{u}]^{\alpha} = \lambda[\hat{u}]^{\alpha}$ ile tanımlanır. Aynı zamanda $\hat{u} \oplus \hat{v} = \hat{v} \oplus \hat{u}$, $\lambda \odot \hat{u} = \hat{u} \odot \lambda$ eşitlikleri sağlanır (Bede ve Gal, 2005).

$\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$için $[\hat{u}]^{\alpha} = [u_{\alpha}^-, u_{\alpha}^+]$ ve $[\hat{v}]^{\alpha} = [v_{\alpha}^-, v_{\alpha}^+]$ olsun.

$$d: \mathbb{F}(\mathbb{R}) \times \mathbb{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

olmak üzere, iki bulanık sayı arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$d(\hat{u}, \hat{v}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|u_{\alpha}^- - v_{\alpha}^-|, |u_{\alpha}^+ - v_{\alpha}^+|\}$$

olarak tanımlanır. d, $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ üzerinde bir metriktir. $(d, \mathbb{F}(\mathbb{R}))$ tam metrik uzaydır (Puri ve Ralescu, 1983).

Tanım 2.7: $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\hat{u} = \hat{v} \oplus \hat{w}$ olacak şekilde bir $\hat{w} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ sayısı varsa bu $\hat{w}$ fonksiyonuna $\hat{u}$ ve $\hat{v}$ bulanık sayılarının Hukuhara farkı (H- fark) denir ve $\hat{u} \Theta_H \hat{v}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $\alpha -$ kesim kümesi ile her $\alpha \in [0,1]$ için

$$[\hat{u} \Theta_H \hat{v}]^{\alpha} = [u_{\alpha}^- - v_{\alpha}^-, u_{\alpha}^+ - v_{\alpha}^+]$$

şeklinde gösterilir. H- farkı $\hat{u} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ için $\hat{u} \Theta_H \hat{u} = \{0\}$ özelliğine sahiptir (Puri ve Ralescu, 1983).

Tanım 2.8: $\hat{f}: [a, b] \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ve $t_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer her $h > 0$ için $\hat{f}(t_0 + h) \Theta_H \hat{f}(t_0)$ ve $\hat{f}(t_0) \Theta_H \hat{f}(t_0 - h)$ H- farkları var ve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\hat{f}(t_0 + h) \Theta_H \hat{f}(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\hat{f}(t_0) \Theta_H \hat{f}(t_0 - h)}{h} = \hat{f}'(t_0)$$

ise $\hat{f}$, t_0' da Hukuhara türevlidir denir (Puri ve Ralescu, 1983). Burada limit $(\mathbb{F}(\mathbb{R}), d)$ metrik uzayında alınmıştır.

Tanım 2.9: $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ bulanık sayılarının genelleştirilmiş Hukuhara farkı

$$\left[\hat{u}\Theta_{gH}\hat{v}\right] = \widehat{w} \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\hat{u} = \hat{v} \oplus \widehat{w} \\ or(ii)\hat{v} = \hat{u} \oplus (-1)\widehat{w} \end{cases}$$

ile tanımlanır. $\alpha -$ kesimleri ile düşünüldüğünde

$$\left[\hat{u}\Theta_{gH}\hat{v}\right]^{\alpha} = [\min\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}, \max\{u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+\}]$$

olur ve eğer H- farkı varsa $\hat{u}\Theta_H\hat{v} = \hat{u}\Theta_{gH}\hat{v}$ eşitliği sağlanır. $\widehat{w} = \hat{u}\Theta_{gH}\hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ eşitliğinin var olması için gerekli koşullar her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\text{durum } (i) \begin{cases} w_\alpha^- \text{ artan, } w_\alpha^+ \text{ azalan, } w_\alpha^- \leq w_\alpha^+ \text{ olmak üzere,} \\ w_\alpha^- = u_\alpha^- - v_\alpha^- \text{ and } w_\alpha^+ = u_\alpha^+ - v_\alpha^+, \end{cases}$$
$$\text{durum } (ii) \begin{cases} w_\alpha^- \text{ artan, } w_\alpha^+ \text{ azalan, } w_\alpha^- \leq w_\alpha^+ \text{ olmak üzere,} \\ w_\alpha^- = u_\alpha^+ - v_\alpha^+ \text{ and } w_\alpha^+ = u_\alpha^- - v_\alpha^- \end{cases}$$

olmasıdır. (i) ve (ii) koşullarının her ikisinin de geçerli olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\widehat{w}$ bulanık sayısının klasik sayı olmasıdır (Bede ve Stefanini, 2012).

Bu çalışmada $\hat{u}\Theta_{gH}\hat{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ olarak kabul edilir ve $\hat{f}: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ bulanık fonksiyonunun $\alpha -$ kesim gösterimi, $t \in [a,b]$ ve her bir $\alpha \in [0,1]$ için $\left[\hat{f}(t)\right]^{\alpha} = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.10: $\hat{f}: [a,b] \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ bulanık fonksiyonunun $t_0 \in (a,b)$ noktasında genelleştirilmiş Hukuhara türevi

$$\hat{f}'_{gH}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{f}(t_0 + h)\Theta_{gH}\hat{f}(t_0)}{h}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\hat{f}'_{gH}(t_0) \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ise, $\hat{f}$, t_0 noktasında genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilirdir denir ve kısaca gH- türev ile gösterilir (Bede ve Stefanini, 2012).

Tanım 2.11: $\hat{f}: [a,b] \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ve $t_0 \in (a,b)$ olsun. $f_\alpha^-(t)$ and $f_\alpha^+(t)$ her ikiside t_0 noktasında türevlenebilir olmak üzere her $\alpha \in [0,1]$ için eğer

$$\left[\hat{f}'_{gH}(t)\right]^{\alpha} = [\{(f_\alpha^-)'(t), (f_\alpha^+)'(t)\}]$$

oluyorsa $\hat{f}$ t_0 noktasında $[(i) - gH]$-türevlenebilirdir ve

$$\left[\hat{f}'_{gH}(t)\right]^{\alpha} = [\{(f_\alpha^+)'(t), (f_\alpha^-)'(t)\}]$$

oluyorsa $\widehat{f}$, t_0 noktasında $[(ii) - gH]$-türevlenebilirdir (Bede ve Stefanini, 2012).

Tanım 2.12: $\hat{f}: [a,b] \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ bulanık fonksiyonunun $t_0 \in (a,b)$ noktasında ikinci mertebeden genelleştirilmiş Hukuhara türevi

$$\hat{f}''_{gH}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\hat{f}'(t_0 + h)\Theta_{gH}\hat{f}'(t_0)}{h}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\hat{f}''_{gH}(t_0) \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ ise, $\hat{f}'$, t_0 noktasında genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilirdir denir (Armand ve Gouyandeh, 2013).

BULGULAR VE TARTIŞMA

$\hat{A}=(\underline{a},a,\bar{a})$ ve $\hat{B}=(\underline{b},b,\bar{b})$ simetrik üçgensel bulanık sayıları, $\hat{\lambda}=(\underline{\lambda},\lambda,\bar{\lambda})$ parametresi ise pozitif simetrik üçgensel bulanık sayı ve $\hat{u}(t)$ negatif olmayan çözüm fonksiyonu olmak üzere

$$-(\hat{u})''(t)=\hat{\lambda}\hat{u}(t),(\hat{u})(0)=\hat{A},(\hat{u})'(m)=\hat{B} \tag{4}$$

bulanık sınır değer problemi göz önüne alınsın. $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve $\hat{\lambda}$ bulanık sayılarının $\alpha-$ kesim kümeleri sırasıyla $[\hat{A}]^{\alpha}=\left[\underline{a}+\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha,\bar{a}-\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha\right]$, $[\hat{B}]^{\alpha}=\left[\underline{b}+\left(\frac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha,\bar{b}-\left(\frac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha\right]$ ve $[\hat{\lambda}]^{\alpha}=\left[\underline{\lambda}+\left(\frac{\bar{\lambda}-\underline{\lambda}}{2}\right)\alpha,\bar{\lambda}-\left(\frac{\bar{\lambda}-\underline{\lambda}}{2}\right)\alpha\right]$ dır. Denklemlerde $\lambda_{\alpha}^{-}=\underline{\lambda}+\left(\frac{\bar{\lambda}-\underline{\lambda}}{2}\right)\alpha$ ve $\lambda_{\alpha}^{+}=\bar{\lambda}-\left(\frac{\bar{\lambda}-\underline{\lambda}}{2}\right)\alpha$ olarak alınmıştır.

Bu çalışmada $i,j=1,2$ için $(i,j)-$ sistemi ile $\hat{u}(t)$ ve $\hat{u}'(t)$ fonksiyonlarının $[(i)-gH]-$türevlenebilirliği veya $[(ii)-gH]-$ türevlenebilirliği kullanılarak elde edilen adi diferansiyel denklem sistemleri anlaşılacaktır. $[\hat{u}(t)]^{\alpha}=[u_{\alpha}^{-}(t),u_{\alpha}^{+}(t)]$ olmak üzere (1,1) sisteminin çözümü için Eşitlik 4. Tanım 2.11 ve Tanım 2.12 kullanılarak $\alpha-$kesim kümeleri yardımıyla

$$\begin{cases}-(u_{\alpha}^{+})''(t)=\lambda_{\alpha}^{-}u_{\alpha}^{-}(t),u_{\alpha}^{-}(0)=a_{\alpha}^{-}+\left(\dfrac{a_{\alpha}^{+}-a_{\alpha}^{-}}{2}\right)\alpha,(u_{\alpha}^{-})'(m)=b_{\alpha}^{-}+\left(\dfrac{b_{\alpha}^{+}-b_{\alpha}^{-}}{2}\right)\alpha\\ -(u_{\alpha}^{-})''(t)=\lambda_{\alpha}^{+}u_{\alpha}^{+}(t),u_{\alpha}^{+}(0)=a_{\alpha}^{+}-\left(\dfrac{a_{\alpha}^{+}-a_{\alpha}^{-}}{2}\right)\alpha,(u_{\alpha}^{+})'(m)=b_{\alpha}^{+}-\left(\dfrac{b_{\alpha}^{+}-b_{\alpha}^{-}}{2}\right)\alpha\end{cases}$$

olacak şekilde adi diferansiyel denklemlerin bir lineer sistemine dönüşür. Bu sistem çözüldüğünde

$$\begin{aligned}u_{\alpha}^{-}(t)=&-c_{11}(\alpha)e^{\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}-c_{12}(\alpha)e^{-\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}\\&+c_{13}(\alpha)\sin\left(\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)+c_{14}(\alpha)\cos\left(\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)\\ u_{\alpha}^{+}(t)=&\,c_{11}(\alpha)e^{\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}+c_{12}(\alpha)e^{-\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}\\&+c_{13}(\alpha)\sin\left(\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)+c_{14}(\alpha)\cos\left(\mathrm{t}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Sınır koşulları kullanılarak, $c_{11}(\alpha),c_{12}(\alpha),c_{13}(\alpha)vec_{14}(\alpha)$ katsayıları

$$c_{11}(\alpha)=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left((\bar{a}-\underline{a})-\left(\frac{(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}(\bar{a}-\underline{a})-(\bar{b}-\underline{b})}{(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\left(e^{\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}+e^{-\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right)$$

$$c_{12}(\alpha)=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\left(\frac{(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}(\bar{a}-\underline{a})-(\bar{b}-\underline{b})}{(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\left(e^{\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}+e^{-\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right)$$

$$c_{13}(\alpha)=\frac{\left((\bar{b}+\underline{b})+(\bar{a}+\underline{a})(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\sin\left(\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)\right)}{2(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\cos\left(\mathrm{m}(\lambda_{\alpha}^{-}\lambda_{\alpha}^{+})^{\frac{1}{4}}\right)}$$

$$c_{14}(\alpha)=\frac{(\bar{a}+\underline{a})}{2}$$

olarak bulunur.

Şimdi (1,1)- sisteminin çözümünün problemin çözümü olması koşullarını inceleyelim. $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri göz önüne alındığında Tanım 2. 4' den ilk olarak $u_\alpha^+(t)-u_\alpha^-(t)>0$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$u_\alpha^+(t)-u_\alpha^-(t)=2\left(c_{11}(\alpha)e^{\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}+c_{12}(\alpha)e^{-\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}\right)$$
$$=2e^{-\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}\left(c_{11}(\alpha)e^{2\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}+c_{12}(\alpha)\right)$$

olacak şekilde $f(t)=c_{11}(\alpha)e^{2\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}+c_{12}(\alpha)$ alınsın. $f(0)=(\bar{a}-\underline{a})\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)>0$ ve $c_{11}(\alpha)>0$ olduğunda $f'(t)=2(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}c_{11}(\alpha)e^{2\mathrm{t}(\lambda_\alpha^-\lambda_\alpha^+)^{\frac{1}{4}}}>0$ olur. Yani f fonksiyonu pozitif ve artan olduğundan $u_\alpha^+(t)-u_\alpha^-(t)>0$ olur. $u_\alpha^-(t)$ artanlığı ve $u_\alpha^+(t)$ azalanlığı için $\frac{\partial u_\alpha^-(t)}{\partial\alpha}>0$ ve $\frac{\partial u_\alpha^+(t)}{\partial\alpha}<0$ olduğu basitçe görülür.

(1,2)-sisteminin çözümü için Tanım 2.11 ve Tanım 2.12 kullanılarak α −kesim kümeleri yardımıyla (4) problemi

$$\begin{cases}-(u_\alpha^-)''(t)=\lambda_\alpha^-u_\alpha^-(t), u_\alpha^-(0)=a_\alpha^-+\left(\dfrac{a_\alpha^+-a_\alpha^-}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^-)'(m)=b_\alpha^-+\left(\dfrac{b_\alpha^+-b_\alpha^-}{2}\right)\alpha\\ -(u_\alpha^+)''(t)=\lambda_\alpha^+u_\alpha^+(t), u_\alpha^+(0)=a_\alpha^+-\left(\dfrac{a_\alpha^+-a_\alpha^-}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^+)'(m)=b_\alpha^+-\left(\dfrac{b_\alpha^+-b_\alpha^-}{2}\right)\alpha\end{cases}$$

olacak şekilde adi diferansiyel denklemlerin bir lineer sistemine dönüşür. Bu sistem çözüldüğünde

$$u_\alpha^-(t)=c_{21}(\alpha)\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}t\right)+c_{22}(\alpha)\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}t\right)$$
$$u_\alpha^+(t)=c_{23}(\alpha)\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}t\right)+c_{24}(\alpha)\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}t\right)$$

elde edilir. Sınır koşulları kullanılarak, $c_{21}(\alpha), c_{22}(\alpha), c_{23}(\alpha)vec_{24}(\alpha)$ katsayıları

$$c_{21}(\alpha)=\underline{a}+\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha,\ \ c_{22}(\alpha)=\frac{\left(\underline{b}+\left(\frac{(\bar{b}-\underline{b})}{2}\right)\alpha\right)+\left(\underline{a}+\left(\frac{(\bar{a}-\underline{a})}{2}\right)\alpha\right)\sqrt{\lambda_\alpha^-}\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}m\right)}{\sqrt{\lambda_\alpha^-}\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}m\right)}$$
$$c_{23}(\alpha)=\bar{a}-\left(\frac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha,\ \ c_{24}(\alpha)=\frac{\left(\bar{b}-\left(\frac{(\bar{b}-\underline{b})}{2}\right)\alpha\right)+\left(\bar{a}-\left(\frac{(\bar{a}-\underline{a})}{2}\right)\alpha\right)\sqrt{\lambda_\alpha^+}\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}m\right)}{\sqrt{\lambda_\alpha^+}\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}m\right)}$$

olur.

Şimdi (1,2)- sisteminin çözümünün problemin çözümü olması koşullarını inceleyelim. $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri göz önüne alındığında Tanım 2. 4' den ilk olarak $u_\alpha^+(t)-u_\alpha^-(t)>0$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$u_\alpha^+(t)-u_\alpha^-(t)=c_{23}(\alpha)\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}t\right)+c_{24}(\alpha)\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^+}t\right)$$
$$-c_{21}(\alpha)\cos\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}t\right)+c_{22}(\alpha)\sin\left(\sqrt{\lambda_\alpha^-}t\right)$$

eşitliği incelendiğinde analitik olarak çözüm elde etmek zor olduğundan nümerik hesaplamalar yapmak gerekmektedir. Bu durumda bulunan nümerik sonuçlara göre çözümün bulanık olup olmadığı konusunda bir fikir edinilebilir.

Benzer şekilde (2,2)-sisteminin çözümü için

$$\begin{cases} -(u_\alpha^-)''(t) = \lambda_\alpha^+ u_\alpha^+(t), u_\alpha^-(0) = \underline{a} + \left(\dfrac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^-)'(m) = \underline{b} - \left(\dfrac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha \\ -(u_\alpha^+)''(t) = \lambda_\alpha^- u_\alpha^-(t), u_\alpha^+(0) = \bar{a} - \left(\dfrac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^+)'(m) = \bar{b} + \left(\dfrac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha \end{cases}$$

lineer denklem sistemi ve (2,1)-sisteminin çözümü için

$$\begin{cases} -(u_\alpha^-)''(t) = \lambda_\alpha^- u_\alpha^-(t), u_\alpha^-(0) = \underline{a} + \left(\dfrac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^-)'(m) = \underline{b} - \left(\dfrac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha \\ -(u_\alpha^+)''(t) = \lambda_\alpha^+ u_\alpha^+(t), u_\alpha^+(0) = \bar{a} - \left(\dfrac{\bar{a}-\underline{a}}{2}\right)\alpha, (u_\alpha^+)'(m) = \bar{b} + \left(\dfrac{\bar{b}-\underline{b}}{2}\right)\alpha \end{cases}$$

lineer denklem sistemi ve çözümleri elde edilebilir ve bunların bulanık çözüm olma durumları incelenebilir.

Örnek 3.1:

$$\begin{cases} -(\hat{u})''(t) = \hat{3}\hat{u}(t) \\ (\hat{u})(0) = \hat{1}, (\hat{u})'(1) = \hat{2} \end{cases}$$

bulanık sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada $[\hat{3}]^\alpha = [\alpha+2, 4-\alpha]$, $[\hat{1}]^\alpha = [\alpha, 2-\alpha]$ ve $[\hat{2}]^\alpha = [\alpha+1, 3-\alpha]$ olsun. (1,1)- sistemi için $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri

$$\begin{aligned} u_\alpha^-(t) = {} & \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\left(2 - \left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}} e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} - 2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} + e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right) e^{t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} \\ & + \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}} e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} - 2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} + e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right) e^{-t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}} \\ & + \frac{\left(4 + 2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}} \sin\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)\right)}{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)} \sin\left(t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right) \\ & + \cos\left(t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right) \end{aligned}$$

ve

$$u_\alpha^+(t) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(2-\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}-2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right)e^{\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}-2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)e^{-t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\frac{\left(4+2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)\right)}{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)}\sin\left(\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$+\cos\left(\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

olarak elde edilebilir.

(1,2)- sistemi için $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri

$$u_\alpha^-(t) = \alpha\cos\left(\sqrt{(\alpha+2)}t\right)+\frac{(1+\alpha)+\alpha\sqrt{(\alpha+2)}\sin\left(\sqrt{(\alpha+2)}\right)}{\sqrt{(\alpha+2)}\cos\left(\sqrt{(\alpha+2)}\right)}\sin\left(\sqrt{(\alpha+2)}t\right)$$

$$u_\alpha^+(t) = (2-\alpha)\cos\left(\sqrt{(4-\alpha)}t\right)+\frac{(3-\alpha)+(2-\alpha)\sqrt{(4-\alpha)}\sin\left(\sqrt{(4-\alpha)}\right)}{\sqrt{(4-\alpha)}\cos\left(\sqrt{(4-\alpha)}\right)}\sin\left(\sqrt{(4-\alpha)}t\right)$$

olur.

(2,2)- sistemi için $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri

$$u_\alpha^-(t) = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\left(2-\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right)e^{\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)e^{-t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\frac{\left(4+2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)\right)}{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)}\sin\left(\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$+\cos\left(\mathrm{t}\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

ve

$$u_\alpha^+(t)=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(2-\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}-2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)\right)e^{t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}-2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)e^{-t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$+\frac{\left(4+2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)\right)}{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)}\sin\left(t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$+\cos\left(t\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\right)$$

olur.

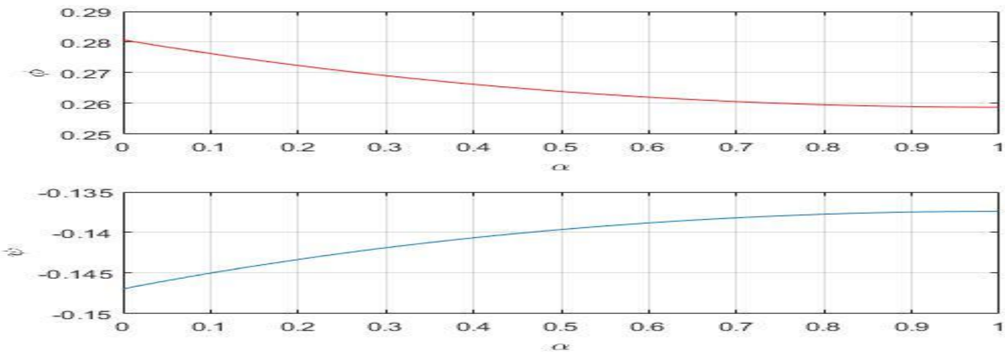
(2,1)- sistemi için $u_\alpha^-(t)$ ve $u_\alpha^+(t)$ çözümleri

$$u_\alpha^-(t)=\alpha\cos\left(\sqrt{(\alpha+2)}t\right)+\frac{(3-\alpha)+\alpha\sqrt{(\alpha+2)}\sin\left(\sqrt{(\alpha+2)}\right)}{\sqrt{(\alpha+2)}\cos\left(\sqrt{(\alpha+2)}\right)}\sin\left(\sqrt{(\alpha+2)}t\right)$$

$$u_\alpha^+(t)=(2-\alpha)\cos\left(\sqrt{(4-\alpha)}t\right)+\frac{(1+\alpha)+(2-\alpha)\sqrt{(4-\alpha)}\sin\left(\sqrt{(4-\alpha)}\right)}{\sqrt{(4-\alpha)}\cos\left(\sqrt{(4-\alpha)}\right)}\sin\left(\sqrt{(4-\alpha)}t\right)$$

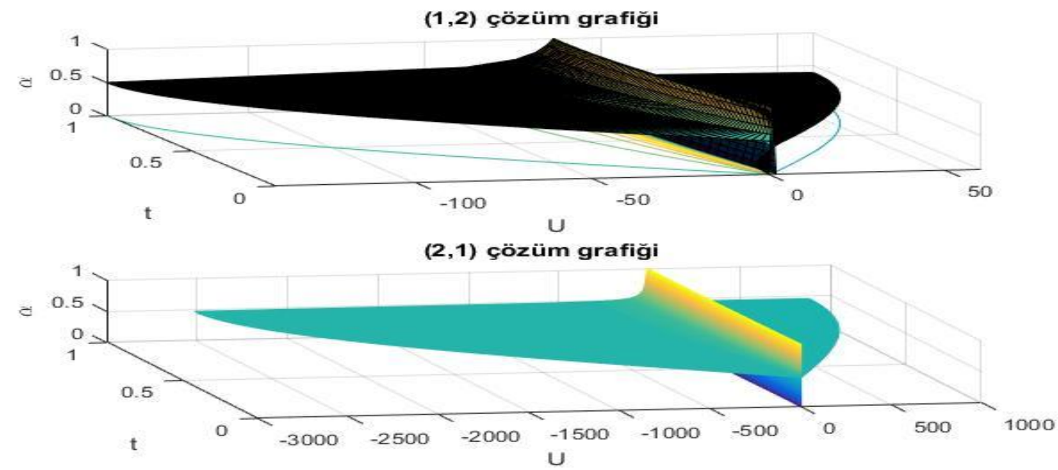
olur.

Şimdi bu çözümlerin bulanık koşullarını sağlayıp sağlamadığı Tanım 2.4 kullanılarak incelensin. Bunun için yukarıdaki çözümlerden $\phi(\alpha)=2-\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}-2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)$ ve $\varphi(\alpha)=2-\left(\frac{2\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+2}{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}\left(e^{\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}+e^{-\left((\alpha+2)(4-\alpha)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}\right)$ fonksiyonları alınsın. Her $\alpha\in[0,1]$ve her $t\in[0,1]$ için Şekil 1' den (1,1)- çözümü $\phi>0$ olduğundan verilen aralıkta geçerli bir bulanık çözüm fonksiyonu ve (2,2)- çözümü $\varphi<0$ olduğundan verilen aralıkta geçerli bir bulanık çözüm fonksiyonu olur.



Şekil 1. ϕ ve φ fonksiyonlarının grafiği

(1,2)- ve (2,1) çözümleri, matlab (MATLAB, 2016) programında hesaplamalar yapılarak elde edilen sonuca göre Şekil 2'den de görüldüğü gibi Tanım 2.4 koşullarını sağlamazlar. Bu durumda geçerli bir bulanık çözüm fonksiyonu değillerdir.



Şekil 2. $\hat{u}$ bulanık fonksiyonunun çözümler

SONUÇ

Bu çalışmada bulanık parametreli bir sınır değer probleminin genelleştirilmiş Hukuhara türevi ile elde edilen çözümleri incelenmiştir. Bu problem tipinde $\hat{\lambda}$ parametresi bulanık olarak ele alınarak farklı bir yaklaşım ortaya konulmuştur. Aynı zamanda bu parametreye bağlı olarak ortaya çıkan sonuçlarda farklılık göstermiştir.

Bulanık problemlerin çözümlerinde genellikle Hukuhara türevi kullanılmış ve ortaya sonuçlar pek tatmin edici olmamıştır. Bu sebeple bu çalışmada daha genel olan ve kısıtlayıcı şartları en aza indirgeyen genelleştirilmiş Hukuhara türevi ile çözümler bulunmaya çalışılmıştır. Problem bu çözüm yöntemiyle incelendiğinde ortaya dört farklı çözüm çıkmıştır. Bu çözümlerden iki tanesi bulanık olma koşullarını sağlamış fakat diğer ikisi bu koşulları sağlamamıştır. Bu farklı çözümler çalışılan problem için en uygun olan çözümün seçilmesine olanak sağlamıştır. Bu durum da bulanık mantığın zenginliğini ortaya koymuştur.

KAYNAKLAR

Armand A, Gouyandeh Z, 2013. Solving two-point fuzzy boundary problem using iteration method. Communications on Advanced Computational Science with Applications, 1-10.

Bede B, Gal SG, 2005. Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation. Fuzzy Sets and Systems, 151: 581–599.

Bede B, Stefanini L, 2012. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. Fuzzy Sets and Systems. 230: 119-141.

Diamond P, Kloeden P, 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

Dubois D, Prade H, 1980. Fuzzy Sets and Systems. Theory and Aplications, Academic Press, New York.

Goetschel J, Voxman W, 1986. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems, 18(1): 31-43.

Gomes LT, Barros LC, Bede B, 2010. Fuzzy Differential Equations in Various Approaches. pp.120, London.

Gültekin H, Altınışık N, 2014. On boundary value problems for second-order fuzzy linear differential equations with constant coefficients. Journal of Advances in Mathematics, 8(3): 1614-1631.

Gültekin H, Altınışık N, 2014. On solution of two-point fuzzy boundary value problems. Bulletin of Society for Mathematical Services & Standarts, 11: 31-39.

Gültekin Çitil H, 2018. Comparison results of linear differential equations with fuzzy boundary values. Journal of Science and Arts, 1(42): 33-48.

Hukuhara M, 1967. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex. Funkcialaj Ekvacioj, 10: 205–229.

Kaleva O, 1987. Fuzzy differetial equations. Fuzzy Sets and Systems, 24: 301-317.

Kaleva O, Seikkala S, 1984. On fuzzy metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 12: 215-229.

Khastan A, Nieto JJ, 2010. A boundary value problem for second order differential equations. Nonlinear Analysis, 72: 43-54.

Klir GJ, Yuan B, 1995. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.

MATLAB, 2016. Fuzzy Logic Toolbox Version. R2016a.

Nasseri H, 2008. Fuzzy Numbers: Positive and Nonnegative. International Mathematical Forum, 3: 1777-1780.

Puri. M, Ralescu D, 1983. Differential and fuzzy functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 91: 552–558.

Zadeh LA, 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8(3): 338–353.