Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(ÖZEL SAYI-I), 70-75
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 70-75
DOI: 10.18185/erzifbed.617007

Serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Toplamsal Kodları Sayma

Basri ÇALIŞKAN[1]*, Ömer ÖZKAN[2]

[1]*Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Osmaniye, Türkiye,*

Geliş / Received: 08/09/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

Öz

Bu çalışmada, $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \times \mathbb{Z}_8^\theta$ uzayındaki serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların tanımı yapılmış ve bu kodların sayısı için bir formül elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer kod, serbest kod, toplamsal kod, Gauss binom katsayısı.

Counting Free $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Additive Codes

Abstract

In this study, free $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-additive codes in the space of $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \times \mathbb{Z}_8^\theta$ are defined and obtained a formula for the number of these codes.

Keywords: Lineer code, free code, additive code, Gaussian binomial coefficient.

1. Giriş

Lineer kodları kombinatorik açıdan incelemek, yani lineer kodların alt lineer kodlarının sayılarını bulmak oldukça önemli bir problemdir. Bu problem, cisimler üzerinde lineer kodlar için tamamıyla çözülmüştür ve kodların sayısı aşağıda verilen Gauss binom katsayıları ile gösterilmektedir.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)},$$

$k = 1,2, \ldots.$

Öte yandan, halkalar üzerinde kodların sayıları ile ilgili de çok çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Delsarte, 1948; Djubjuk, 1948; Yeh, 1948; Bhowmik, 1996; Saltürk, 2013).

Delsarte (1973) de toplamsal kodları ilk defa birleşim şemalarını esas alarak tanımlamıştır. 1997 yılında ötelenme ile değişmeyen propelineer kodlar tanımlanmış ve bu ikili kodların $\mathbb{Q}_8$ sekiz elemanlı değişmeli olmayan quaterniyon grubu göstermek üzere, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Q}_8$- in alt gruplarına izomorf oldukları ispatlanmıştır (Pujol ve Rifá, 1997).

Birleşim şemasının Hamming şeması olduğu durumda, yani değişmeli grubun mertebesinin 2^n olduğu durumda, toplamsal kodlar değişmeli ötelenme ile değişmeyen propelineer kodlarla çakışırlar. Böylece, bu

*Sorumlu Yazar: bcaliskan@osmaniye.edu.tr

tip değişmeli gruplar, $\alpha + 2\beta = n$ olmak üzere, sadece $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ formunda olacaktır (Pujol ve Rifá, 1997). Buradan, ikili Hamming şemasındaki toplamsal kodlar yalnızca $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ ün C alt grupları olarak incelenir.

$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların cebirsel yapısı Borges vd. (2010) tarafından incelenmiş ve bu makalede $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların standart haldeki üreteç ve kontrol matrisleri belirlenmiştir. Bu çalışmayla beraber $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlar birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bugüne kadar bu konuyla ilgili olarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Bilal vd. 2011; Bilal vd. 2010; Fernández-Córdoba vd. 2010).

Aydoğdu ve Şiap (2013) de, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodlar için bir formül elde ettiler. Benzer şekilde Dougherty ve Saltürk (2015) de serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodları tanımlayarak hem serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodlar hem de herhangi bir tipteki $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların sayıları için formüller verdiler.

Aydoğdu ve Gürsoy (2019) da, $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal devirli kodları literatüre kazandırdılar. Bu kodlar $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-toplamsal kodların bir genellemesi olarak görülebilir. Çalışkan ve Balıkçı (2019) da herhangi bir tipteki $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların sayısı için bir formül verdiler.

Bu çalışmada, s adet vektör ile üretilen $(\alpha, \beta, \theta;\ 0, 0, 0, s, 0, 0)$ tipindeki serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodu tanımlanarak bu kodların sayısının

$$N = 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}_2$$

olduğu gösterilmiştir.

2. $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Toplamsal Kodların Üreteç Matrisi

$\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_8$ sırasıyla modülo 2, modülo 4 ve modülo 8'e göre tamsayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8 = \{(u, v, w) | u \in \mathbb{Z}_2, v \in \mathbb{Z}_4, w \in \mathbb{Z}_8\}$$

kümesi toplamaya göre kapalı olup, $d \in \mathbb{Z}_8$ için

$$d \cdot (u, v, w) =$$

$$(d \cdot u \ mod\ 2, d \cdot v \ mod\ 4, d \cdot w \ mod\ 8)$$

çarpma işlemi ile bir $\mathbb{Z}_8$-modüldür (Aydoğdu ve Gürsoy 2019).

Tanım 2.1. α, β ve θ pozitif tamsayılar olmak üzere, $\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta} \times \mathbb{Z}_8^{\theta}$ uzayının alt grubu olan bir C koduna bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod denir (Aydoğdu ve Gürsoy 2019).

Bu tanıma göre C kodu üç kısımdan oluşmaktadır. İlk α koordinatlarındaki elemanlar $\mathbb{Z}_2$ den, sonraki β koordinatlarındaki elemanlar $\mathbb{Z}_4$ den ve son kısımda bulunan θ koordinatlarındaki elemanlar ise $\mathbb{Z}_8$ halkasından gelmektedir. C, $\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta} \times \mathbb{Z}_8^{\theta}$ nın

$$\mathbb{Z}_2^{k_0} \times \mathbb{Z}_4^{k_1} \times \mathbb{Z}_2^{k_2} \times \mathbb{Z}_8^{k_3} \times \mathbb{Z}_4^{k_4} \times \mathbb{Z}_2^{k_5}$$

şeklindeki bir alt grubuna izomorfik olup, C ye $(\alpha, \beta, \theta;\ k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ tipinde bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod denir (Aydoğdu ve Gürsoy 2019).

C, $(\alpha, \beta, \theta;\ k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ tipinde bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod olsun. Bu durumda bu kodun üreteç matrisi aşağıdaki gibi bir standart formdaki üreteç matrise permütasyon denktir,

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cccc} I_{k_0} & \bar{A}_{01} & 0 & 0 & 2T_1 & 0 & 0 & 0 & 4T_2 \\ 0 & \bar{S}_1 & I_{k_1} & B_{01} & B_{02} & 0 & 0 & 2T_3 & 2T_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2I_{k_2} & 2B_{12} & 0 & 0 & 0 & 4T_5 \\ 0 & \bar{S}_2 & 0 & S_{01} & S_{02} & I_{k_3} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ 0 & \bar{S}_3 & 0 & 0 & 2S_{12} & 0 & 2I_{k_4} & 2A_{12} & 2A_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4I_{k_5} & 4A_{23} \end{array}\right)$$

Burada, $\bar{A}_{01}, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde matrisler, B_{02}, B_{12}, S_{02}, S_{12} matrisleri $\mathbb{Z}_4$ üzerinde matrisler, T_4, T_5 ve A_{i3} $0 \leq i \leq 2$ için $\mathbb{Z}_8$ üzerinde matrislerdir. B_{01}, S_{01}, T_1 matrislerinin bileşenleri $\{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ den, A_{01}, T_2 matrislerinin tüm bileşenleri $\{0,1\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ den ve T_3, A_{12}, A_{02} matrislerinin tüm bileşenleri $\{0,1,2,3\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ den gelmektedir. Ayrıca C, $2^{k_0}2^{2k_1}2^{k_2}2^{3k_3}2^{2k_4}2^{k_5}$ tane kodsöz içermektedir (Aydoğdu ve Gürsoy 2019).

Tanım 2.2. $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}_8$ olmak üzere, eğer $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ iken her i için $\alpha_i = 0$ oluyorsa vektör kümesine lineer bağımsız denir. Eğer $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ iken her i için $\alpha_i = \{0,2,4\}$ oluyorsa vektör kümesine modüler bağımsız denir (Dougherty ve Fernández-Córdoba, 2011).

$\mathbb{Z}_8$ üzerindeki kodlar için modüler bağımsız üreteç kümesi en küçük üreteç kümesidir. Böylece standart formda verilen üreteç matrisindeki satırlar modüler bağımsızdırlar (Park, 2009).

Tanım 2.3. Bir R halkası üzerinde herhangi bir kod, s adet lineer bağımsız vektör ile üretiliyorsa bu koda serbest kod denir.

3. Serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Toplamsal Kodlar

Tanım 3.1. Herhangi bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal C kodu için, eğer her 2 mertebeli $u \in C$ ve 4 mertebeli $v \in C$ vektörleri için $u = w_1 + w_1 + w_1 + w_1$ ve $u = w_2 + w_2$ olacak şekilde $w_1, w_2 \in C$ vektörleri bulunabiliyorsa C koduna bir serbest kod denir.

Görüldüğü gibi $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodlar için serbestlik tanımı halkalar üzerindeki lineer bağımsız küme ile yapılan serbestlik tanımından farklıdır. Herhangi bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod için standart formdaki üreteç matrisi

$$\left(\bar{S}_2 \quad |S_{02}| \quad I_{k_3} \quad A_{03}\right)$$

şeklinde olup, s vektör tarafından üretilen bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod $(\alpha, \beta, \theta;\ 0, 0, 0, s, 0, 0)$ tipindedir.

Lemma 3.2. C herhangi bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod ve $i = 1, 2, \ldots, k$ için $v_i = (v_{i_X}, v_{i_Y}, v_{i_Z}) \in \mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta} \times \mathbb{Z}_8^{\theta}$ olsun. $v_1, v_2, \ldots, v_k \in C$ vektörlerinin bir serbest kod üretebilmesi için gerek yeter koşul $v_{1_Z}, v_{2_Z}, \ldots, v_{k_Z}$ vektörlerinin bir serbest $\mathbb{Z}_8$ kodunu üretmesidir.

İspat: Kabul edelim ki c, 8 mertebeli bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$ vektör olsun. Bu durumda $c + c + c + c \neq 0$ dır ve c_X bir ikili kod olduğundan $c_X + c_X + c_X + c_X = 0$ ve $c_Y + c_Y + c_Y + c_Y = 0$ dır. Dolayısıyla $4c_Z \neq 0$ ve c nin $\mathbb{Z}_8$ kısmı 8 mertebelidir. Buradan, bir $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$ vektörün 8 mertebeli olabilmesi için gerek yeter koşulun onun $\mathbb{Z}_8$ kısmının 8 mertebeli olması gerektiği elde edilir.

Şimdi sırasıyla $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodun, 8 mertebeli bir vektörün katı olmayan 2 mertebeli ve 4 mertebeli vektörler içermediğini yani $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodun bir serbest kod olduğunu gösterelim.

$w_1, w_2, \ldots, w_k \in C$ vektörleri bir serbest $\mathbb{Z}_8$ kodunu üreten lineer bağımsız vektörler olsun. Eğer bir w vektörü bu kodda 2 mertebeli vektör ise, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_8$ için

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_k w_k$$

olduğu elde edilir. w, 2 mertebeli bir vektör olduğundan,

$$2w = 2(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_k w_k) = 0$$

dır. Bu ise vektörlerin lineer bağımsız olmalarından dolayı her bir α_i nin ya 0 ya da 4 olmasını gerektirir. $\acute{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{4}$ olsun. Bu durumda $\acute{\alpha}_1 w_1 + \acute{\alpha}_2 w_2 + \cdots + \acute{\alpha}_k w_k$ vektörü 8 mertebeli bir koddur. Bu da, lineer bağımsız vektörler tarafından üretilen bir serbest $\mathbb{Z}_8$ kodda 2 mertebeli her vektörün 8 mertebeli bir vektörün herhangi bir katı olması gerektiğini ispatlar.

Benzer şekilde eğer $\acute{w}$ bu kodda 4 mertebeli bir vektör ise, $\beta_i \in \mathbb{Z}_8$ için

$$\acute{w} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_k w_k$$

olduğu kabul edilsin. $\acute{w}$, 4 mertebeli bir vektör olduğundan,

$$4\acute{w} = 4(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_k w_k) = 0$$

dır. Bu ise vektörlerin lineer bağımsız olmalarından dolayı her bir β_i nin ya 0 ya da 2 olmasını gerektirir. $\acute{\beta_i} = \frac{\beta_i}{2}$ olsun. Bu durumda $\acute{\beta}_1 w_1 + \acute{\beta}_2 w_2 + \cdots + \acute{\beta}_k w_k$ vektörü 8 mertebeli bir koddur. Bu da, lineer bağımsız vektörler tarafından üretilen bir serbest $\mathbb{Z}_8$ kodda 4 mertebeli her vektörün 8 mertebeli bir vektörün herhangi bir katı olması gerektiğini ispatlar.

Lemma 3.3. $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \times \mathbb{Z}_8^\theta$ da bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodu üreten s tane vektörü seçmenin yollarının sayısı

$$N = \prod_{i=0}^{s-1} (8^\theta - 4^\theta 2^i) 2^{\alpha+2\beta}$$

dır.

İspat: (Dougherty ve Saltürk 2014) deki Lemma 2.3, $\mathbb{Z}_8$ e uygulandığında s adet lineer bağımsız vektörlerini seçmenin yollarının sayısı

$$(8^\theta - 4^\theta)(8^\theta - 2 \cdot 4^\theta) \cdots (8^\theta - 2^{s-1} \cdot 4^\theta)$$

dır.

Diğer taraftan, bu durumda bir vektörün her bir seçimi eşlik eden ikili ve dörtlü vektörlerin seçimini verir. Yani Lemma 3.2. den dolayı, v_{i_X} ve v_{i_Y} lerin ne oldukları önemsizdir. Dolaysıyla, bir serbest kodu üreten s adet vektörlerinin seçim yollarının sayısı

$$(8^\theta - 4^\theta)2^{\alpha+2\beta}(8^\theta - 2 \cdot 4^\theta)2^{\alpha+2\beta} \cdots (8^\theta - 2^{s-1} \cdot 4^\theta)2^{\alpha+2\beta}$$

dır.

Lemma 3.4. $\mathbb{Z}_2^\alpha \times \mathbb{Z}_4^\beta \times \mathbb{Z}_8^\theta$ da s vektör tarafından üretilen bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodun bir en küçük üreteç kümesini bulmanın yollarının sayısı

$$D = 2^{2s^2} \prod_{i=0}^{s-1} (2^s - 2^i)$$

dır.

İspat: Buradaki sayma işlemi Lemma 3.3. dekine benzer olup, ikili ve dörtlü kısımlar için serbest seçimler dikkate alınmayacağından, s vektör tarafından üretilen bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodun bir en küçük üreteç kümesini bulmanın yollarının sayısı

$$(8^s - 4^s)(8^s - 2 \cdot 4^s) \cdots (8^s - 2^{s-1} \cdot 4^s)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.5. $\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta} \times \mathbb{Z}_8^{\theta}$ da s vektör tarafından üretilen serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların sayısı

$$N = 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}_2$$

dır.

İspat: Pay kısmı Lemma 3.3. den ve payda kısmı Lemma 3.4. den gelmek üzere,

$$N = \frac{(8^{\theta}-4^{\theta})2^{\alpha+2\beta}(8^{\theta}-2\cdot 4^{\theta})2^{\alpha+2\beta}\cdots(8^{\theta}-2^{s-1}\cdot 4^{\theta})2^{\alpha+2\beta}}{(8^{s}-4^{s})(8^{s}-2\cdot 4^{s})\cdots(8^{s}-2^{s-1}\cdot 4^{s})}$$

$$= \frac{\left(4^{\theta}\right)^{s} 2^{s\alpha} 4^{s\beta}}{(4^{s})^{s}} \left[\frac{(2^{\theta}-1)(2^{\theta}-2)(2^{\theta}-2^{2})\cdots(2^{\theta}-2^{s-1})}{(2^{s}-1)(2^{s}-2)(2^{s}-2^{2})\cdots(2^{s}-2^{s-1})}\right]$$

$$= 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}_2$$

bulunur.

Örnek 3.6. C, (2,1,1,0,0,0,1,0,0) tipinde bir serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kod olsun. Bu kodların sayısı,

$$2^{1[2+2\cdot 1+2(1-1)]} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_2 = 16$$

dir. Bu kodların üreteç matrisleri $x, y \in \mathbb{Z}_2$ ve $z \in \mathbb{Z}_4$ olmak üzere aşağıdaki gibidir

$$\left(\begin{array}{cccc} x & y & |z| & 1 \end{array}\right).$$

$\mathbb{Z}_2^{\alpha} \times \mathbb{Z}_4^{\beta} \times \mathbb{Z}_8^{\theta}$ da s vektör tarafından üretilen serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların sayısı $\left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta \\ s \end{matrix}\right\}$ ile gösterilsin, yani

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta \\ s \end{matrix}\right\} = 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}_2$$

olsun. Bu durumda aşağıda verilen yinelenmeli bağıntıya sahip oluruz.

Teorem 3.7.

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta \\ s \end{matrix}\right\} = 2^{\alpha+2\beta+2(\theta-s)} \left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta-1 \\ s-1 \end{matrix}\right\} + 2^{3s} \left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta-1 \\ s-1 \end{matrix}\right\}.$$

İspat:

$$2^{\alpha+2\beta+2(\theta-s)} \left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta-1 \\ s-1 \end{matrix}\right\} + 2^{3s} \left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta-1 \\ s-1 \end{matrix}\right\}$$

$$= 2^{\alpha+2\beta+2(\theta-s)} 2^{(s-1)[\alpha+2\beta+2(\theta-1-(s-1))]} \begin{bmatrix} \theta-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_2 + 2^{3s} 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-1-s)]} \begin{bmatrix} \theta-1 \\ s \end{bmatrix}_2$$

$$= 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \left(\begin{bmatrix} \theta-1 \\ s-1 \end{bmatrix}_2 + 2^{s} \begin{bmatrix} \theta-1 \\ s \end{bmatrix}_2 \right)$$

$$= 2^{s[\alpha+2\beta+2(\theta-s)]} \begin{bmatrix} \theta \\ s \end{bmatrix}_2 = \left\{\begin{matrix} \alpha, \beta, \theta \\ s \end{matrix}\right\}.$$

4. Sonuç

Bu çalışmada öncelikle serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların tanımı verilmiş ve $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların sayısını veren formülden yararlanılarak serbest $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-toplamsal kodların sayısını veren formül elde edilmiştir.

5. Teşekkür

Bu çalışmayı destekleyen Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederiz. Proje No: OKÜBAP-2019-PT3-006.

6. Kaynaklar

Aydoğdu, I. and Gürsoy, F. 2019. "$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Cyclic Codes", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 60(1-2), 327-341.

Aydoğdu, I. and Şiap, I. 2013. "Counting The Generator Matrices of $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_8$-Codes", *Mathematical Sciences And Applications E-Notes,* 1 (2), 143-149.

Bhowmik, G. 1996. "Evaluation of the divisor function of matrices", *Acta Arithmetica*, 74, 155-159.

Bilal, M., Borges, J., Dougherty, S.T. and Fernández-Córdoba, C. 2010. "Optimal codes over $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$", *VII Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica Castro Urdiales,* Cantabria, 7–9 de julio de.

Bilal, M., Borges, J., Dougherty, S.T. and Fernández-Córdoba, C. 2011. "Maximum distance separable codes over $\mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$", *Designs, Codes and Cryptography*, 61, 31-40.

Çalışkan, B. and Balıkçı, K. 2019. "Counting $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$-Additive Codes", *European Journal of Pure And Applied Mathematics*, 12 (2), 668-679.

Delsarte, S. 1948. "Fonctions de Möbius Sur les Groups Abeliens Finis", *Annals of Math.* 49(3), 600-609.

Delsarte, P. 1973. "An algebraic approach to the association schemes of coding theory", *Philips Res. Rep. Suppl.*, 10.

Djubjuk, P.E. 1948. "On the number of subgroups of a finite abelian group", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 12, 351-378.

Dougherty, S.T. and Saltürk, E. 2014. "Counting codes over rings", *Designs, Codes and Cryptography*, 73, 151-165.

Dougherty, S.T. and Saltürk, E. 2016. "Counting $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-Additive Codes", *Noncommutative Rings and Their Applications, Contemporary Mathematics,* 634, 137-147.

Dougherty, S.T. and Fernández-Córdoba, C. 2011. "Codes over $\mathbb{Z}_2^k$, Gray map and self-dual codes", *Advances in Mathematics of Communications*, 5, 571-588.

Fernández-Córdoba, C., Pujol, J. and Villanueva, M. 2010. "$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$-linear codes : rank and kernel", *Designs, Codes and Cryptography,* 56, 43-59.

Park, Y.H. 2009. "Modular independence and generator matrices for codes over $\mathbb{Z}_m$", *Designs, Codes and Cryptography*, 50, 147-162.

Pujol, J. ve Rifá, J. 1997. Translation Invariant Propelinear Codes, IEEE Trans. Inform. Theory, 43, 590-598.

Saltürk, E. 2013. "Bulanık Alt Grupların ve Kodların Sayısı ile Bazı Uygulamalar", Doktora Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 115.

Yeh, Y. 1948. "On Prime Power Abelian Groups", Bull. AMS, 54, 323-327.