Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(ÖZEL SAYI-I), 132-144

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 132-144

ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
DOI: 10.18185/erzifbed.638456

Kesirli İntegrasyon Yardımıyla $(h-s)_2-Preinveks$ Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Emetullah YAĞIZ[1*], Havva KAVURMACI ÖNALAN[2]

[1]Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Van, Türkiye
[2]Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, Van, Türkiye

Geliş / Received: 25/10/2019, Kabul / Accepted: 21/02/2020

Öz
Bu çalışmada $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıf kullanılarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kesirli integrasyon yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürle desteklendiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon sınıfı, eşitsizlikler, kesirli integraller, Hermite-Hadamard eşitsizliği.

Hermite-Hadamard Type Inequalities For $(h-s)_2-Preinvex$ Mapping Via Fractional Integrals

Abstract

In this paper, we define the $(h-s)_2-preinvex$ function class. Using the $(h-s)_2-preinvex$ function we will obtain new Hermite-Hadamard type inequalities with the help of fractional integrals.

Keywords: $(h-s)_2-preinvex$ function class, inequalities, fractional integrals, Hermite-Hadamard inequality.

1. Giriş

Tanım1.1: I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $konveks$ fonksiyon denir (Pečarić ve ark.,1992).

Teorem1.1: I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $konveks$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1.1)$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić ve ark., 1992).

Tanım1.2: $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \le 1$ olsun. $\alpha, \ \beta \ge 0, \ \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

*Sorumlu Yazar: emetullah21@gmail.com

$$f(\alpha u+\beta v)\leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-konveks$ fonksiyon denir. İkinci anlamda $s-konveks$ fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Teorem1.2: f fonksiyonu $s\in(0,1)$ ve $a,b\in\mathbb{R}_+$ için $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ikinci anlamda $s-konveks$ bir fonksiyon ve $f\in L_1[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

olur (Dragomir ve Fitzpatrick, 1999).

Tanım1.3: $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyon olsun, $h\not\equiv 0$. Her $x,y\in I,\alpha\in(0,1)$ için

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y) \tag{1.2}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-konveks$ fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

(1.2) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-konkav$ fonksiyon denir yani $f\in SV(h,I)$'dır (Varošanec, 2007).

Teorem1.3: $(0,1)\subseteq J$ olacak şekilde I ve J, $\mathbb{R}$'nin iki alt aralığı, h ve f fonksiyonları sırası ile J ve I üzerinde tanımlı negatif olmayan iki reel fonksiyon olmak üzere $a,b\in I$, $a<b$, $f\in L_1[a,b]$ ve $f\in SX(h,I)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(\alpha)d\alpha$$

eşitsizliği literatürde $h-konveks$ fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Sarıkaya ve ark., 2008).

Tanım1.4: $h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $h\not\equiv 0$. $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $u,v\in[0,\infty)=I$, $s\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ olmak üzere

$$f(tu+(1-t)v) \leq h^s(t)f(u)+h^s(1-t))f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyon denir (Özdemir ve ark., 2013).

Teorem1.4: $h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon, $h\not\equiv 0$. $f:I=[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyon ve f negatif olmayan fonksiyon ve her $a,b\in[0,\infty)=I,s\in(0,1],t\in[0,1]$ için $f\in L_1[a,b]$, $h\in L_1[0,1]$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{1}{2h^s\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h^s(t)dt$$

(Özdemir ve ark., 2013).

Tanım1.5: $f\in L[a,b]$ olsun. $\alpha>0$ olmak üzere α. mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt,\ x>a;$$

$$J_{b^-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1}dt,\ x<b,$$

şeklinde tanımlanır (Das, 2011).

Burada $\Gamma(\alpha)$ Gama fonksiyonu ve $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$ dir.

Teorem1.5: $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon $f \in L_1[a,b]$ ve $a<b$ olsun. f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $\alpha>0$ ise aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bu eşitsizlik literatürde kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Sarıkaya ve ark., 2013).

Bu makalede Tanım 1.4 ile verilen konveks fonksiyon sınıfı, preinveks fonksiyon sınıfı olarak genişletilmiştir. Daha sonra yeni tanımlanan bu sınıf kullanılarak kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Aşağıda verilen bölümde çalışmada gerekli görülen tanım ve teoremler verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Tanım2.1: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\eta: K \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x,y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $x + t\eta(y,x) \in K$ ise K'ya η'ya göre inveks bir küme denir (Weir ve Mond, 1988).

Tanım2.2: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall u,v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \leq (1-t)\, f(u) + t f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre preinveks fonksiyon denir (Weir ve Mond, 1988).

η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur (Mohan ve Neogy, 1995).

C Koşulu: $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta: K \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$'ya göre inveks bir küme olsun. $\forall x,y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\eta\big(y, y + t\eta(x,y)\big) = -t\eta(x,y)$$

$$\eta\big(x, y + t\eta(x,y)\big) = (1-t)\eta(x,y)$$

Koşul C'den $\forall x,y \in K$ ve $t_1,\ t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)) = (t_2 - t_1)\, \eta(x,y)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem2.1: $a,b \in K^{\circ}$ ve $a < a + \eta(b,a)$ olmak üzere K° (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f: K = [a, a + \eta(b,a)] \rightarrow (0,\infty)$ bir preinveks fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx$$

$$\leq \frac{f(a) + f(a+\eta(b,a))}{2}$$

(Noor, 2009).

Tanım2.3: $f: K \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall u,v \in K,\ t \in [0,1],\ s \in (0,1)$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \leq (1-t)^s f(u) + t^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre ikinci anlamda $s-preinveks$ fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Teorem2.2: $a,b \in K^{\circ}$ ve $\eta(b,a) > 0$ olmak üzere K° (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f: K = [a, a + \eta(b,a)] \subseteq [0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$

bir $s-preinveks$ fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

(Li, 2010).

Tanım2.4: $h: J \to \mathbb{R}$ burada $(0,1) \subseteq J$, $h \not\equiv 0$, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve K η'ya göre inveks bir küme olsun. Negatif olmayan $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in K, t \in [0,1]$ için

$$f\left(u+t\eta(v,u)\right) \leq h(1-t)f(u)+h(t)f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre $h-preinveks$ fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Teorem2.3: Eğer $f:[a,a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ $h-$preinveks fonksiyon ise, C koşulundan η ve $a<a+\eta(b,a)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\leq [f(a)+f(b)]\int_{0}^{1} h(t)dt$$

(Matloka, 2013).

Matloka (2015)'te aşağıdaki teoremleri elde etmiştir.

Teorem2.4: Eğer $f:[a,a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ $h-preinveks$ fonksiyon ise, C koşulundan η ve $a<a+\eta(b,a)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{1}{\alpha\cdot h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha}}$$

$$\times\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right)+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\leq [f(a)+f(b)]$$

$$\times\int_{0}^{1} t^{\alpha-1}\,[h(1-t)+h(t)]dt$$

$\alpha>0$ (Matloka, 2015).

Sonuç2.1: Teorem2.4'te $h(t)=t^s$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik $s-preinveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\frac{1}{\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{s}}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right)$$

$$\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha}}$$

$$\times\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right)+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\leq [f(a)+f(b)]$$

$$\times\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}+\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

olur. Burada

$$\int_{0}^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^{s}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}$$

$$\int_{0}^{1} t^{\alpha+s-1}dt=\frac{1}{s+\alpha}$$

ifadeleri geçerlidir (Matloka, 2015).

Sonuç2.2: Teorem2.4'te $\eta(b,a)=b-a$ ve $h(t)=t^s$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik $s-konveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\frac{1}{\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^s}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}$$

$$\times\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\leq[f(a)+f(b)]$$

$$\times\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}+\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

olur (Matloka, 2015).

Lemma2.1: $A\subseteq\mathbb{R}$, $\eta:A\times A\to\mathbb{R}$ göre inveks bir küme, $a,b\in A$ ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. Eğer $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve $f'\in L[a,a+\eta(b,a)]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{f(a)+f\big(a+\eta(b,a)\big)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\eta^\alpha(b,a)}$$

$$\times\left[J_{a^+}^{\alpha}f\big(a+\eta(b,a)\big)+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{2}$$

$$\times\int_0^1\left[t^\alpha-(1-t)^\alpha\right]f'\big(a+t\eta(b,a)\big)dt$$

(İşcan, 2013).

Matloka, İşcan'ın 2013'te yayınladığı lemmayı farklı bir formda aşağıdaki gibi vermiştir:

Lemma2.2: $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\big(a,a+\eta(b,a)\big)$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. Eğer $f'\in L[a,a+\eta(b,a)]$ ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$-\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\big(a+\eta(b,a)\big)+f(a)\right]$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\big(\eta(b,a)\big)^{\alpha+1}}$$

$$\times\left[J_{a^+}^{\alpha}f\big(a+\eta(b,a)\big)+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\int_0^1\left[(1-t)^\alpha-t^\alpha\right]f'\big(a+t\eta(b,a)\big)dt$$

(Matloka, 2015).

Teorem2.5: $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\big(a,a+\eta(b,a)\big)$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,a+\eta(b,a)]$ üzerinde $h-preinveks$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\big(a+\eta(b,a)\big)+f(a)\right]\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\big(\eta(b,a)\big)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f\big(a+\eta(b,a)\big)\right.$$

$$\left.\left.+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

$$\times\left[\int_0^1 t^\alpha h(t)dt+\int_0^1(1-t)^\alpha h(t)dt\right]$$

(Matloka, 2015).

Sonuç2.3: Teorem2.5'te $h(t)=t^s$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik $s-preinveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\big(a+\eta(b,a)\big)+f(a)\right]\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(\,a+\,\eta(b,a))\right.$$
$$\left.\left.+J_{a+\,\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq[|f'(a)|+|f'(b)|]$$
$$\times\left[\frac{1}{s+\alpha+1}+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]$$

(Matloka,2015).

Teorem2.6:$f\,:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$, fonksiyonu $(a,a+\eta(b,a))$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. Eğer $|f'|^q,\ q\geq 1,\ [a,a+\eta(b,a)]$ aralığında $h-preinveks$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}[f(\,a+\eta(b,a))+f(a)]\right.$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(\,a+\,\eta(b,a))\right.$$
$$\left.\left.+J_{a+\,\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\right.$$
$$\left.\times\int_0^1[(1-t)^{\alpha}+t^{\alpha}]h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Matloka, 2015).

Sonuç2.4: Teorem2.6'da $|f'|^q$, $s-preinveks$ ve $h(t)=t^s$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}[f(\,a+\eta(b,a))+f(a)]\right.$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(\,a+\,\eta(b,a))\right.$$
$$\left.\left.+J_{a+\,\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\right.$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{s+\alpha+1}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Matloka, 2015).

Teorem2.7:$f\,:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(a,a+\eta(b,a))$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. Eğer $|f'|^q,\ \ q\geq 1$ olmak üzere $[a,a+\eta(b,a)]$ üzerinde $h-preinveks$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}[f(\,a+\eta(b,a))+f(a)]\right.$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(\,a+\,\eta(b,a))\right.$$
$$\left.\left.+J_{a+\,\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}$$
$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\times\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(Matloka, 2015).

Sonuç2.5: Teorem2.6'da $|f'|^q$, $s-preinveks$ ve $h(t)=t^s$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\left(a+\eta(b,a)\right)+f(a)\right] - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right) + J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\le \frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}} \times \left(\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Matloka, 2015).

3. Bulgular

Tanım3.1: J, $(0,1)\subseteq J$ şeklinde bir aralık ve $h:J\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon $h\not\equiv 0$, K, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. $f:K\to\mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon ve her $u,v\in K, t\in[0,1]$, $s\in(0,1]$ için

$$f\left(v+t\eta(u,v)\right) \le h^s(t)f(u)+h^s(1-t)f(v) \quad (3.1)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna η'ya göre ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon denir. Eğer (3.1)'deki eşitlik tersine çevrilirse f'ye ikinci anlamda $(h-s)_2-prekonkav$ fonksiyon denir.

Sonuç3.1: Tanım 3.1'de $h(t)=t$ alınırsa ikinci anlamda $s-preinveks$ fonksiyona dönüşür. (3.1)'de $s=1$ alınırsa Tanım 3.1 $h-preinveks$ fonksiyona dönüşür. Eğer $h(t)=t,\ s=1$ alınırsa $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyonu klasik $preinveksliğe$ dönüşür. (3.1)'de $\eta(u,v)=u-v$ alınırsa ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyonu ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyona dönüşür.

Aşağıdaki teorem ikinci anlamda$(h-s)_2-preinveks$ fonksiyonlar için elde edilmiştir:

Teorem3.1: $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon ve η için Koşul C'nin doğrulandığını ve $a<a+\eta(b,a)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)>0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha>0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{1}{\alpha\cdot h^s\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right) \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha}} \times\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right)+J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\le [f(a)+f(b)] \times\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h^s(1-t)+h^s(t)\right]dt.$$

İspat: İkinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyonun tanımından ve koşul C'den η için

$$f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right) = f\left(a+t\eta(b,a) + \frac{1}{2}\eta\left(a+(1-t)\eta(b,a),\ a+t\eta(b,a)\right)\right)$$

$$\le h^s\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left[f\left(a+t\eta(b,a)\right)+f\left(a+(1-t)\eta(b,a)\right)\right]$$

elde edilir.

Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde integrali alındığında

$$\frac{1}{\alpha\cdot h^s\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right)$$

$$\leq\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+t\eta(b,a)\right)dt$$

$$+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+(1-t)\eta(b,a)\right)dt$$

$$=\int_a^{a+\eta(b,a)}\left(\frac{u-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha-1}f(u)\frac{du}{\eta(b,a)}$$
$$+\int_a^{a+\eta(b,a)}\left(\frac{a+\eta(b,a)-u}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha-1}f(u)\frac{du}{\eta(b,a)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta(b,a)^\alpha}$$

$$\times\left[J^\alpha_{a+\eta(b,a)^-}f(a)+J^\alpha_{a^+}f\left(a+\eta(b,a)\right)\right],$$

$$\frac{1}{\alpha\cdot h^s\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(a+\frac{1}{2}\eta(b,a)\right)$$

$$\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta(b,a)^\alpha}$$

$$\times\left[J^\alpha_{a+\eta(b,a)^-}f(a)+J^\alpha_{a^+}f\left(a+\eta(b,a)\right)\right].$$

Bu durumda eşitsizliğin ilk kısmı elde edilmiş olur.

Eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı için f'nin ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ olmasından, $t\in[0,1]$ için

$$f\left(a+t\eta(b,a)\right)$$
$$\leq h^s(1-t)f(a)+h^s(t)f(b)$$

ve

$$f\left(a+(1-t)\eta(b,a)\right)$$
$$\leq h^s(t)f(a)+h^s(1-t)f(b)$$

yazılır ve elde edilen eşitsizlikler taraf tarafa toplanıldığında

$$f\left(a+t\eta(b,a)\right)+f\left(a+(1-t)\eta(b,a)\right)$$
$$\leq\left[h^s(1-t)+h^s(t)\right]\left[f(a)+f(b)\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp daha sonra elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integre edildiğinde

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+t\eta(b,a)\right)dt$$

$$+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+(1-t)\eta(b,a)\right)dt$$

$$\leq\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\times\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h^s(1-t)+h^s(t)\right]dt,$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\eta(b,a)^\alpha}$$

$$\times\left[J^\alpha_{a+\eta(b,a)^-}f(a)+J^\alpha_{a^+}f\left(a+\eta(b,a)\right)\right]$$

$$\leq\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\times\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[h^s(1-t)+h^s(t)\right]dt$$

elde edilir ki bu da ikinci kısmın ispatını tamamlar. İlk ve ikinci kısım bir arada düşünüldüğünde teoremin ispatı sonuçlandırılmış olur.

Sonuç3.2: Teorem 3.1'de $s=1$ alınırsa Teorem 2.4 elde edilir.

Sonuç3.3: Teorem 3.1'de $s=1$ ve $\alpha=1$ alındığında Teorem 2.3 elde edilir.

Sonuç3.4: Teorem 3.1'de $s=1, \alpha=1$ ve $h(t)=t$ alınırsa Teorem 2.1 elde edilir.

Sonuç3.5: Teorem 3.1'de $s=1$, $\alpha=1$, $h(t)=t, \eta(b,a)=b-a$ alınırsa Teorem 1.1 elde edilir.

Sonuç3.6: Teorem 3.1'de $\alpha=1$, $h(t)=t$, $\eta(b,a)=b-a$ Teorem 1.2 elde edilir.

Sonuç3.7: Teorem 3.1'de $s=1$, $\alpha=1$, $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa Teorem 1.3 elde edilir.

Sonuç3.8: Teorem 3.1'de $s=1$, $h(t)=t$, $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa Teorem 1.5 elde edilir.

Sonuç3.9: Teorem3.1'de $\alpha=1$, $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa Teorem 1.4 elde edilir.

Sonuç3.10: Teorem 3.1'de $h(t)=t$ alınırsa Sonuç2.1 elde edilir.

Sonuç3.11: Teorem 3.1'de $\eta(b,a)=b-a$, $h(t)=t$ alınırsa Sonuç2.2 elde edilir.

Teorem3.2:$f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$, fonksiyonu $(a,a+\eta(b,a))$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $a<a+\eta(b,a)$ olsun. $|f'|$, $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon olduğundan aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\left(a+\eta(b,a)\right)+f(a)\right] - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right) + J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \times\left[\int_0^1 t^\alpha h^s(t)dt+\int_0^1(1-t)^\alpha h^s(t)dt\right].$$

İspat: Lemma 2.2 ve mutlak değer özelliği kullanıldığında

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\left(a+\eta(b,a)\right)+f(a)\right] - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f\left(a+\eta(b,a)\right) + J_{a+\eta(b,a)^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\int_0^1|(1-t)^\alpha-t^\alpha|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)dt$$

yazılır ve f ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon olduğundan

$$\int_0^1|(1-t)^\alpha-t^\alpha|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[(1-t)^\alpha+t^\alpha\right]\left[h^s(1-t)|f'(a)| + h^s(t)|f'(b)|\right]dt$$

$$=|f'(a)|\int_0^1\left[(1-t)^\alpha+t^\alpha\right]h^s(1-t)dt$$

$$+|f'(b)|\int_0^1\left[(1-t)^\alpha+t^\alpha\right]h^s(t)dt$$

$$=\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

$$\times\left[\int_0^1 t^\alpha h^s(t)dt+\int_0^1 (1-t)^\alpha h^s(t)dt\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç3.12: Teorem 3.2'de $s=1$ alınırsa Teorem 2.5 elde edilir.

Sonuç3.13: Teorem 3.2'de $h(t)=t$ alınırsa Sonuç2.3 elde edilir.

Sonuç3.14: Teorem 3.2'de $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}[f(a)+f(b)]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq [|f'(a)|+|f'(b)|]$$

$$\times\left[\int_0^1 t^\alpha h^s(t)dt+\int_0^1 (1-t)^\alpha h^s(t)dt\right].$$

Teorem3.3: $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$, $(a,a+\eta(b,a))$ aralığında türevlenebilir fonksiyon ve $a<a+\eta(b,a)$. Eğer $|f'|^q$, $q\geq 1$, $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\left(a+\eta(b,a)\right)+f(a)\right]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f\left(a+\eta(b,a)\right)+J_{a+\eta(b,a)^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

İspat: Lemma 2.2'de; mutlak değer özelliği, $|f'|^q$ ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon oluşu ve power-mean eşitsizliği kullanıldığında:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}\left[f\left(a+\eta(b,a)\right)+f(a)\right]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\eta(b,a)\right)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f\left(a+\eta(b,a)\right)+J_{a+\eta(b,a)^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]\left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|dt$$

$$\leq\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]\left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]\left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha][h^s(1-t)|f'(a)|^q\right.$$

$$\left.+h^s(t)|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\int_0^1[(1-t)^\alpha\right.$$

$$\left.+t^\alpha]h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç3.15: Teorem3.3'te $s=1$ alınırsa Teorem 2.6 elde edilir

Sonuç3.16: Teorem3.3'te $h(t)=t$ alınırsa Sonuç2.4 elde edilir.

Sonuç3.17: Teorem3.3'te $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}[f(a)+f(b)]\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Teorem3.4: $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$, $(a,a+\eta(b,a))$ aralığında türevlenebilir fonksiyon ve $a<a+\eta(b,a)$. Eğer $|f'|^q$, $q\geq 1$, $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}[f(a+\eta(b,a))+f(a)]\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f(a+\eta(b,a))\right.$$

$$\left.\left.+J_{a+\eta(b,a)^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\int_0^1 h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

İspat: Lemma 2.2'de mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği kullanıldığında,

$$\left|\frac{1}{\eta(b,a)}[f(a+\eta(b,a))+f(a)]\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^\alpha f(a+\eta(b,a))\right.$$

$$\left.\left.+J_{a+\eta(b,a)^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq\int_0^1[(1-t)^\alpha+t^\alpha]|f'(a+t\eta(b,a))|dt$$

$$=\int_0^1(1-t)^\alpha|f'(a+t\eta(b,a))|dt$$

$$+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|dt$$

$$\leq\left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \left|f'\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\int_0^1 h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

ispat tamamlanmıştır.

Sonuç3.18: Teorem3.4'te $s=1$ alındığında Teorem 2.7'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç3.19: Teorem3.3'te $h(t)=t$ alınırsa Sonuç2.5 elde edilir.

Sonuç3.20: Teorem3.4'te $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik ikinci anlamda $(h-s)_2-konveks$ fonksiyonlar için geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}[f(a)+f(b)]\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left([|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\int_0^1 h^s(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

4. Sonuç

Bu çalışmada ikinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. İkinci anlamda $(h-s)_2-preinveks$ fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler özel seçimlerle literatürde farklı tip konveks ve preinveks fonksiyonlar için daha önceden elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere dönüşmüştür. Bu durumda yapılan çalışma ile literatürdeki eşitsizlikler genellenmiş ve yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

5. Kaynaklar

Breckner, W. W. 1978. "Stetigkeitsaussagenf üreine klas ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen räumen". *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 23: 13-20.

Das, S. (2011). "Functional Fractional Calculus", *Springer*, ISBN 978-3-642-20545-3.

Dragomir, S. S. and Fitzpatrick, S. 1999. "The Hadamard's inequality for s −convex functions in the second sense", Demonstration Math., 32(4), 687-696.

İşcan, İ. 2013. "Hermite-Hadamard's Inequalities for Preinvex Function via Fractional Integrals and Related Fractional

Inequalities", *American Journal of Mathematical Analysis*, 1(3), 33-38.

Li, J.-Y. 2010. "On Hadamard-typ inequalities for $\mathrm{s}-$preinveks functions", *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)* 27(4), 5-8.

Matloka, M. 2013. "On some Hadamard-type inequalities for $(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)-$preinvex functions on the co-ordinates", *Journal of Inequalities and Applications*, 2013:227.

Matloka, M. 2015. "Hermite-Hadamard type inequalities for $\mathrm{h}-$preinvex mappings via fractional integrals", *Control and Cybernetics*, 44(2), 275-285.

Mohan, S. R. and Neogy, S. K. 1995. "On invex sets and preinvex functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 189, 901-908.

Noor, M. A. 2009. "Hadamard integral inequalities for product of two preinvex function", *Nonl. Anal. Forum*, 14, 167-173.

Noor, M. A., Noor, K. I., Awan, M. U. and Li, J. 2014. "On Hermite-Hadamard Inequalities for h-preinvex functions", *Filomat*, 8(7), 1463-1474.

Özdemir, M. E., Tunç, M. and Akdemir A. O. 2013. "On $(\mathrm{h}, \mathrm{s})-$Convex Functions and Hadamard-type Inequalities", *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 52, 51-61.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y. L. (1992). "Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications". *Academic Press, Inc.*, Boston, 469 pp.

Sarıkaya, M. Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H. 2008. "On some Hadamard-type inequalities for $\mathrm{h}-$convex functions". *Journal of Mathematical Inequalities*, 2(3), 335-341.

Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H. and Başak, N. 2013. "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities", *Math. And Comput. Modell.*, 57, 2403-2407.

Varošanec, S. 2007. "On $\mathrm{h}-$convexity", *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1), 303-311.

Weir, T. and Mond, B. 1988. "Preinvex functions in multiple objective optimization", *J. Math. Anal. Appl.*, 136, 29–38.