Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

dergi anasayfa: http://www.dufed.org

Öklid uzayında bir üçgenin yüksekliklerinin kesim noktalarının küresel imajları ve çizgiler uzayında karşıtları

The spherical images and to line space corresponding of orthocenter of triangle in the euclid space

M. Zihni Temel

Dicle Üniversitesi, Mimarlık Fakültesi, Diyarbakır, Türkiye

MAKALE BİLGİSİ

Geliş Tarihi: 13 Şubat 2017
Kabul Tarihi: 21 Şubat 2017
Elektronik Yayın Tarihi: 30 Haziran 2017
Basım: 31 Temmuz 2017

ÖZET

Bu çalışmada Öklid uzayında bir üçgenin yüksekliklerinin kesim noktasının küresel imajları vektörel hesapla ispat edilerek çizgiler uzayında karşıtları olan sonuçlar ortaya konmuş ve bu sonuçlar bir uzay altıgeninde verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Mat. öklid, Dual yay, Küresel imajlar

ABSTRACT

In this paper, the spherical images of the notions of orthocenter of triangle in the Euclid Space were proved by vector calculus. Then passing to line space corresponding notions of a space sixgon were given

Keywords: Mat. euclid, Dual spherical, Spherical images

1. Giriş

Uzay geometrisi için esas temel elemanlar noktalar veya düzlemlerdir. Ancak, J.Plücker (1801-1868) uzay elemanı olarak ilk defa doğrular ve küreleri kullanmıştır. F.Klein (1866-1868) yıllarında Plücker'in '*Doğru çizgilerin uzay elemanı gözüyle bakılmasına dayanan uzayın yeni geometrisi*' adlı eserini yayınladı. Bundan önce çizgiler geometrisi, geometrik optikle ilgili olarak W.R.Hamilton (1805-1860) ve diferansiyel geometri açısından da E. Kummer (1810-1893) tarafından geliştirilmiştir. Çizgiler geometrisinin yüzeyler teorisi ile çok sıkı bir ilişkisi olduğu daha sonra anlaşılmıştır. Bu çalışmada E. Study ve W. Blashchke'nin çalışmalarının ışığı altında, düzlem geometride üçgende yükseklikler teoreminin dual birim küre üzerindeki kanıtları verilip, bunların çizgiler uzayında karşıtları araştırılacaktır.

2. Gereç ve Yöntem

Çok boyutlu bir uzayda çok parametreli bir lineer alt uzay ailesinin incelenmesi, genel olarak çeşitli modeller oluşturularak yapılmıştır. Alt uzaylar bu model içerisinde birer nokta olarak kabul edilerek uzayın yeni yapısı inşa edilmiştir. Çizgiler geometrisi alanında bunun en iyi örneği E.Study tarafından ortaya atılan modeldir. Burada ana fikir geometrinin temel elemanlarından olan nokta ile doğrunun yer değiştirmesine yani dualiteye dayanmaktadır.

2.1. Birim Dual Küre Yüzeyi Üzerindeki Bir Üçgenin Yükseklikleri

Teorem 2.1: Birim dual küre üzerinde çizilen bir üçgenin üç yüksekliği bir noktada kesişir.

Yazışma adresi: M. Zihni Temel
E-posta: stemel@dicle.edu.tr

Kanıt: Bir üçgenin yüksekliklerine büyük dual daire yayları, köşelerine noktalar karşılık gelecek şekilde birim dual küre yüzeyi üzerinde çizildiğini göz önüne alalım.

$[B,C,H_A],[C,A,H_B],[A,B,H_A]$ nokta üçlülerinin aynı düzlemde bulunmaları koşulu sırasıyla,

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{H}}_A.(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}})=0\\ \vec{\mathbf{H}}_B.(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}})=0\\ \vec{\mathbf{H}}_C.(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}})=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Yazılır. AH_A ile BC, BH_B ile CA ve CH_C ile AB yaylarından geçen büyük dual dairelerin dik kesişmeleri

İçin.

$$\left.\begin{aligned}(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}}).(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_A)=0\\ (\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}}).(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_B)=0\\ (\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}}).(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_C)=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Bağıntılarının sağlanması gerekir. (2.2) de Lagrange özdeşliğini kullanarak ve

$$\vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{C}})=M_A,\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{C}})=M_B,\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}})=M_C \qquad (2.3)$$

İfadesini de dikkate alarak,

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{H}}_A.[(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}-(\vec{\mathbf{C}}.\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{B}}]=\vec{\mathbf{H}}_A.[M_C\vec{\mathbf{C}}-M_B\vec{\mathbf{B}}]=0\\ \vec{\mathbf{H}}_B.[(\vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{A}}-(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}]=\vec{\mathbf{H}}_B.[M_A\vec{\mathbf{A}}-M_C\vec{\mathbf{C}}]=0\\ \vec{\mathbf{H}}_C.[(\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}}-(\vec{\mathbf{B}}.\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{A}}]=\vec{\mathbf{H}}_C.[M_B\vec{\mathbf{B}}-M_A\vec{\mathbf{A}}]=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Elde edilir. $\vec{\mathbf{H}}_A^2=1,\vec{\mathbf{H}}_B^2=1,\vec{\mathbf{H}}_C^2=1,$ ile belli olmak üzere (2.1) ve (2.4) bağıntılarından,

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{H}}_A=H_A[(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}})\wedge(M_C\vec{\mathbf{C}}-M_B\vec{\mathbf{B}})]\\ \vec{\mathbf{H}}_B=H_B[(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}})\wedge(M_A\vec{\mathbf{A}}-M_C\vec{\mathbf{C}})]\\ \vec{\mathbf{H}}_C=H_C[(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}})\wedge(M_B\vec{\mathbf{B}}-M_A\vec{\mathbf{A}})]\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

dikme ayakları bulunur.

$$\left.\begin{aligned}M_1=(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}}).(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}})=M_BM_C-M_A\\ M_2=(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}})\wedge(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}})=M_CM_A-M_B\\ M_3=(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}})\wedge(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}})=M_BM_A-M_C\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Eşitlikleri de göz önüne alınarak, (2.5) denklemleri,

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{H}}_A=H_A(M_3\vec{\mathbf{B}}+M_2\vec{\mathbf{C}})\\ \vec{\mathbf{H}}_B=H_B(M_1\vec{\mathbf{C}}+M_3\vec{\mathbf{A}})\\ \vec{\mathbf{H}}_C=H_C(M_2\vec{\mathbf{A}}+M_1\vec{\mathbf{B}})\end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Şeklinde son halini alır. $[A,H_A],[B,H_B],[C,H_C]$ nokta çiftlerinden geçen büyük dual hiper dairelerin merkezlerinden düzlemlerine çıkılan birim dual vektörler, N_A,N_B,N_C dual skalerleri $\vec{\mathbf{N}}_A^2=1,\vec{\mathbf{N}}_B^2=1,\vec{\mathbf{N}}_C^2=1$

ile belli olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{N}}_A=N_A(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_A)\\ \vec{\mathbf{N}}_B=N_B(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_B)\\ \vec{\mathbf{N}}_C=N_C(\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_C)\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Olur. (2.7) denklemlerini de kullanarak,

$$(\vec{\mathbf{N}}_A,\vec{\mathbf{N}}_B,\vec{\mathbf{N}}_C)=0 \qquad (2.9)$$

elde edilir. Bu son bağıntıdaki karma çarpımın sıfır olması,birim dual küre yüzeyi üzerine çizilen bir üçgenin üç yüksekliğinin H gibi bir noktada kesiştiğini gösterir.Bu kesim noktasına giden yer vektörü olmak üzere, $[H,A,H_A]$ ve $[H,B,H_B]$ nokta üçlüsünün aynı düzlemde bulunmaları koşulu sırası ile

$$\left.\begin{aligned}\vec{\mathbf{H}}.(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_A)=0\\ \vec{\mathbf{H}}.(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_B)=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

yazılır. H_1 dual skaleri $\vec{\mathbf{H}}^2=1$ ile belli olmak üzere (2.10) dan,

$$\vec{\mathbf{H}}=H_1[(\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_A)\wedge\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{H}}_B)] \qquad (2.11)$$

Elde edilir. (2.7), (2.11) kullanılırsa ve $H=H_AH_BH_1(\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{C}})$ alınırsa

$$\vec{\mathbf{H}}=H(M_2M_3\vec{\mathbf{A}}+M_1M_3\vec{\mathbf{B}}+M_1M_2\vec{\mathbf{C}}) \qquad (2.12)$$

bulunur.

Bu teoremin çizgiler uzayında karşılığını araştıralım. Dual birim kürenin merkezinden aşağıdaki nokta üçlülerinin üzerinde bulundukları düzlemlere dik olarak çıkılan birim dual vektörler göz önüne alınarak,

B,C,H_A noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_1$ I

C,A,H_B noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_2$ II

A,B,H_C noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_3$ III

A,H_A,H noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_4$ IV

B, H_B, H noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_5$ V

B, H_C, H noktalarının belirttiği düzlemin birim dual vektörü $\vec{\mathbf{H}}_6$ VI

Olsun. Buna göre aşağıdaki bağıntılar yazılır.

I den	$a_1)\ \vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$b_1)\ \vec{\mathbf{C}} \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$c_1)\ \vec{\mathbf{H}}_A \perp \vec{\mathbf{H}}_1$
II den	$a_2)\ \vec{\mathbf{C}} \perp \vec{\mathbf{H}}_2$	$b_2)\ \vec{\mathbf{A}} \perp \vec{\mathbf{H}}_2$	$c_2)\ \vec{\mathbf{H}}_B \perp \vec{\mathbf{H}}_2$
III den	$a_3)\ \vec{\mathbf{A}} \perp \vec{\mathbf{H}}_3$	$b_3)\ \vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$c_3)\ \vec{\mathbf{H}}_C \perp \vec{\mathbf{H}}_3$
IV den	$a_4)\ \vec{\mathbf{A}} \perp \vec{\mathbf{H}}_4$	$b_4)\ \vec{\mathbf{H}}_A \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$c_4)\ \vec{\mathbf{H}} \perp \vec{\mathbf{H}}_4$
V den	$a_5)\ \vec{\mathbf{B}} \perp \vec{\mathbf{H}}_5$	$b_5)\ \vec{\mathbf{H}}_B \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$c_5)\ \vec{\mathbf{H}} \perp \vec{\mathbf{H}}_5$
VI dan	$a_6)\ \vec{\mathbf{C}} \perp \vec{\mathbf{H}}_6$	$b_6)\ \vec{\mathbf{H}}_C \perp \vec{\mathbf{H}}_1$	$c_6)\ \vec{\mathbf{H}} \perp \vec{\mathbf{H}}_6$

Hipotezden, ilgili daireler dik kesiştiğinden,

$$a_7)\ \vec{\mathbf{H}}_1 \perp \vec{\mathbf{H}}_4 \quad b_7)\ \vec{\mathbf{H}}_2 \perp \vec{\mathbf{H}}_5 \quad c_7)\ \vec{\mathbf{H}}_3 \perp \vec{\mathbf{H}}6$$

Bulunur. $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ bağıntılarından,

$$\left.\begin{aligned} &(B)\ ve\ (C)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H_1) \\ &(C)\ ve\ (A)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H_2) \\ &(A)\ ve\ (B)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H_3) \end{aligned}\right\} \qquad \text{VII}$$

Olur. VII den $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ dik uzay altıgeni oluşur. $a_4, a_5, a_6, a_7, b_7, c_7$ den,

$$\left.\begin{aligned} &(A)\ ve\ (H_1)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H_4) \\ &(B)\ ve\ (H_2)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H_5) \\ &(C)\ ve\ (H_3)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (H6) \end{aligned}\right\} \qquad \text{VIII}$$

bulunur. VIII den dik uzay altıgeninin karşılıklı kenarlarının ortak dikmeleri bulunur. c_4, c_5, c_6 dan

$(H_4), (H_5), (H_6)$ doğrularının ortak dikmesi (H) IX

Olduğu görülür. Sırası ile VII, VIII, IX özellikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1: Bir dik uzay altıgeninin $(B_1B_2B_3B_4B_5B_6)$, karşılıklı kenarlarının $((A)\ ile\ (H_1), (B)\ ile\ (H_2), (C)\ ile\ (H_3))$ ortak dikmelerinin $((H_4), (H_5), (H_6))$ bir ortak dikmesi (H) vardır.

Teorem 2.2: Birim dual küre yüzeyi üzerine çizilen bir üçgeninin yüksekliklerinin dikme ayakları H_A, H_B, H_C olmak üzere ABC ve $H_AH_BH_C$ üçgenlerinin karşılıklı kenarlarının kesim noktası bir doğru üzerindedir.

Kanıt: Teorem 2.1. de birim dual küre üzerine çizilen bir üçgeninin üç yüksekliginin gibi bir noktada kesiştiği gösterilmişti. $[R_A, H_B, H_C], [R_B, H_C, H_A], [R_C, H_A, H_B]$ nokta üçlülerinin aynı düzlemde bulunmaları koşulları sırasıyla,

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_A.(\vec{\mathbf{H}}_B \wedge \vec{\mathbf{H}}_C) = 0 \\ \vec{\mathbf{R}}_B.(\vec{\mathbf{H}}_C \wedge \vec{\mathbf{H}}_A) = 0 \\ \vec{\mathbf{R}}_C.(\vec{\mathbf{H}}_A \wedge \vec{\mathbf{H}}_B) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

Yazılır. $[R_A, B, C], [R_B, A, C], [R_C, A, B],$ nokta üçlülerinin aynı düzlemlerde bulunmaları koşulları sırası ile,

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_A.(\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}}) = 0 \\ \vec{\mathbf{R}}_B.(\vec{\mathbf{C}} \wedge \vec{\mathbf{A}}) = 0 \\ \vec{\mathbf{R}}_C.(\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{A}}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Elde edilir. R_A, R_B, R_C dual skalerleri $\vec{\mathbf{R}}_A^2 = 1, \vec{\mathbf{R}}_B^2 = 1, \vec{\mathbf{R}}_C^2 = 1$ ile belli olmak üzere (2.13) ve (2.14) bağıntılarından,

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_A = R_A[(\vec{\mathbf{H}}_B \wedge \vec{\mathbf{H}}_C) \wedge (\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}})] \\ \vec{\mathbf{R}}_B = R_B[(\vec{\mathbf{H}}_C \wedge \vec{\mathbf{H}}_A) \wedge (\vec{\mathbf{C}} \wedge \vec{\mathbf{A}})] \\ \vec{\mathbf{R}}_C = R_C[(\vec{\mathbf{H}}_A \wedge \vec{\mathbf{H}}_B) \wedge (\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}})] \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Bulunur. (2.15) de (2.7) eşitlikleri de kullanılarak ve

$$\begin{aligned} &R_1 = R_AH_BH_CM_1(\vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}), \\ &R_2 = R_BH_AH_CM_2(\vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}), \\ &R_3 = R_CH_AH_BM_3(\vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

alınmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}}_A = (M_3\vec{\mathbf{B}} - M_2\vec{\mathbf{C}}) \\ \vec{\mathbf{R}}_B = (M_1\vec{\mathbf{C}} - M_3\vec{\mathbf{A}}) \\ \vec{\mathbf{R}}_C = (M_2\vec{\mathbf{A}} - M_1\vec{\mathbf{B}}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

sonucuna varılır buradan da,

$$(\vec{\mathbf{R}}_A, \vec{\mathbf{R}}_B, \vec{\mathbf{R}}_C) = 0 \qquad (2.17)$$

bulunur. Bu son ifade R_A, R_B, R_C noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösterir. Çizgiler uzayında bu teoremin karşıtı araştırılırsa Teorem 2.1. nın $c_1, c_2, c_3, b_4, b_5, b_6$ özelliklerinden,

$$\left.\begin{aligned}&(H_1)\ ile\ (H_4)\ in\ ortak\ dikmesi\ (H_A)\\&(H_2)\ ile\ (H_5)\ in\ ortak\ dikmesi\ (H_B)\\&(H_3)\ ile\ (H_6)\ in\ ortak\ dikmesi\ (H_C)\end{aligned}\right\}\qquad \text{X}$$

olur.

$$\left.\begin{aligned}&H_B, H_C, R_A\ noktalarının\ belirtigi\ düzleme\ dik\ birim\ vektör\ \vec{\mathbf{X}}_A\\&H_C, H_A, R_B\ noktalarının\ belirtigi\ düzleme\ dik\ birim\ vektör\ \vec{\mathbf{X}}_B\\&H_A, H_B, R_C\ noktalarının\ belirtigi\ düzleme\ dik\ birim\ vektör\ \vec{\mathbf{X}}_C\\&R_A, R_B, R_C\ noktalarının\ belirtigi\ düzleme\ dik\ birim\ vektör\ \vec{\mathbf{X}}\end{aligned}\right\}\qquad \text{XI}$$

Olsun. XI den,

$$\left.\begin{aligned}&(H_B)\ ile\ (H_C)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (X_A)\\&(H_C)\ ile\ (H_A)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (X_B)\\&(H_A)\ ile\ (H_B)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (X_C)\end{aligned}\right\}\qquad \text{XII}$$

alınarak,

$$\vec{\mathbf{R}}_A \perp \vec{\mathbf{X}}_A, \vec{\mathbf{R}}_B \perp \vec{\mathbf{X}}_B, \vec{\mathbf{R}}_C \perp \vec{\mathbf{X}}_C \qquad \text{XIII}$$

Olur. Teorem 2.1. den,

$$\begin{aligned}&R_A, B\ ve\ C\ nin\ bulundugu\ düzlemde,\\&R_B, A\ ve\ C\ nin\ bulundugu\ düzlemde,\\&R_C, A\ ve\ B\ nin\ bulundugu\ düzlemde,\end{aligned}$$

olduklarından

$$\vec{\mathbf{R}}_A \perp \vec{\mathbf{H}}_1, \vec{\mathbf{R}}_B \perp \vec{\mathbf{H}}_2, \vec{\mathbf{R}}_C \perp \vec{\mathbf{H}}_3 \qquad \text{XIV}$$

Olduğu görülür. XIII ve XIV özelliklerinden,

$$\left.\begin{aligned}&(X_A)\ ve\ (H_1)\ in\ ortak\ dikmesi\ (R_A)\\&(X_B)\ ve\ (H_2)\ in\ ortak\ dikmesi\ (R_B)\\&(X_C)\ ve\ (H_3)\ in\ ortak\ dikmesi\ (R_C)\end{aligned}\right\}\qquad \text{XV}$$

Olur. XI son özelliğinden de,

$$(R_A), (R_B), (R_C)\ nin\ ortak\ dikmesi\ (X) \qquad \text{XVI}$$

Bulunur. Şimdi sırası ile Teorem 2.1. in VII, VIII özelliğinden ve X, XII, XV, XVI özellikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2: Bir dik uzay altıgeninin $(B_1B_2B_3B_4B_5B_6)$ karşılıklı kenarlarının ortak dikmelerinin $((H_4),(H_5),(H_6))$ aralıklı üç kenarı üzerindeki ayaklarından (B_7,B_9,B_{11})ortak dikmelere $((H_6),(H_4),(H_5))$ ve bu kenarlara $((H_3),(H_1),(H_2))$ dik olarak çıkılan doğruların $((H_C),(H_A),(H_B))$ ardışık ortak dikmelerinin $((X_B),(X_C),(X_A))$ karşılıklı kenarlarla $((H_2),(H_3),(H_1))$ ortak dikmelerinin $((R_B),(R_C),(R_A))$ müşterek bir ortak dikmesi (X) vardır.

3. Sonuç ve Öneriler:

Bu çalışmada farklı iki geometrik yapı içerisindeki kavramlar karşılaştırılarak her iki geometride de geçerli olan teorilerin kendi yapıları içerisindeki ifadelerin diğer geometrik uzaydaki karşılığı tanımlanarak daha kapsamlı sonuçlara ulaşılmıştır. Bu çalışmada yapılan, Öklid uzayındaki bir üçgenin yüksekliklerinin bir noktada kesiştiği teoreminden hareketle, bu teoremin birim dual küre üzerinde de geçerli olduğu kanıtlanıp ters projeksiyonla Öklid uzayının daha karmaşık ve orijinal teoremi elde edilmiştir.

Kaynaklar

1. Blascke, W., 1950, Einführung in die differantial geometrie: Berlin-Heidelberg Springer-Verlag
2. Guggenheımer, H. W., 1963, Differential geometry: New York-London Mc Graw-Hill
3. Laugwıtz, D., Differantial geometrie: D.G Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart
4. Gromov, M., 1983. Filling Riemannian manifolds, T.Differential Geom. 18(1)
5. Rochowski, M., 1992. Special problems of surface theory in the Euclidean 3- dimensional space Demanstration Math. 25.