

ZAMAN SERİLERİNDE ÜSTEL DÜZELTME MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

Yrd. Doç.Dr. Şehamet BÜLBÜL*

1. Giriş

Günümüzün artan rekabet koşulları ve belirsizlik ortamı ülkelerin ve işletmelerin gelecekle ilgili çeşitli tahminler yapmalarını zorunlu hale getirmektedir. Bu birimlerin yaşamlarını devam ettirmeleri ve gelişmeleri ise geleceğe ilişkin tahminlerin önemini daha da arttırmaktadır. Çeşitli değişkenlerin gelecekte alacakları değerlerin belirlenebilmesi, bu değişkenlerin geçmişteki değerlerin bilinmesi ile olanaklı olur. Tahminlerin yapılabilmesi için geçmiş hakkında bilgi etme etmenin uygun yollarından biri zaman serilerinin analizidir.

Zaman serilerinin analizi, bir olaya ait geçmişteki verilerin incelenmesi, belirli eğilimlerin ortaya çıkarılmak ileriye dönük tahminlerin yapılması temeline dayanır. Yani incelenen olayın aldığı değerlerin değişimi zamana bağlanmakta ve çeşitli faktörlerin etkilerinin bir sonucu olarak ortaya çıkan zaman serilerinin bu faktörlerden nasıl etkilendiği incelenerek gelecekteki alacağı değerlerde belirlenmeye çalışılmaktadır.

Zaman serilerinin gelecek devre değerlerinin tahmini için çeşitli yöntemler kullanılır. Burada bu yöntemlerden üstel tahmin modelleri teorik olarak açıklanarak, bu açıklamalar bir uygulama üzerinde gösterilecektir.

2. ÜSTEL DÜZELTME MODELİ:

Zaman serilerinin gelecekte alacağı değerlerin tahmininde kullanılan üstel düzeltme yöntemi serideki değerlere farklı ağırlıklar veren bir tahmin tekniğidir. Yöntemin önemli yararı az sayıda veri ile uygulanabilirliğidir. Bir zaman serisindeki bütün dönemlere eşit ağırlık vermek yerine, son dönemlere ilk dönemlere göre daha fazla ağırlık veren bu yöntem, tahmin de son dönemlere ait değerlerin daha etkili olacağı esasını benimsemektedir. Yöntemin genel ifadesi; E_t üstel düzeltilmiş değerleri, Y_t gözlem değerlerini, W ağırlıkları göstermek üzere;

$$E_t = WY_t + (1-W)E_{t-1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Yöntemin uygulanmasında önce değerleri 0 ile 1 arasında değişen bir düzeltme faktörü (W) belirlenir.

($0 \leq W \leq 1$) ikinci dönemden başlanarak her dönemin üstel düzeltilmiş değerleri bulunur. Burada ilk dönemin değerinin hesabı olanaklı olmadığından gözlem değeri üstel düzeltilmiş değer olarak alınır.

$$E_1 = Y_1$$
$$E_2 = WY_2 + (1-W)E_1$$
$$E_3 = WY_3 + (1-W)E_2$$

⋮

$$E_t = WY_t + (1-W)E_{t-1}$$

Ağırlıklar her bir önceki dönemde daha küçüktür. Son dönemlere doğru ağırlıklar artmaktadır.

$$E_t = WY_t + (1-W)E_{t-1}$$

ifadesinde E_{t-1} 'in değeri yerine konursa,

$$E_t = WY_t + (1-W)[WY_{t-1} + (1-W)E_{t-2}]$$

olur. Buradan,

$$E_t = WY_t + W(1-W)Y_{t-1} + (1-W)^2E_{t-2}$$

elde edilir. E_{t-2} 'nin değeri yerine konursa,

$$E_t = WY_t + W(1-W)Y_{t-1} + (1-W)^2[WY_{t-2} + (1-W)E_{t-3}]$$

olur. ve

$$E_t = WY_t + W(1-W)Y_{t-1} + W(1-W)^2Y_{t-2} + (1-W)^3E_{t-3}$$

elde edilir. İşlemlere devam edildiğinde ağırlıklar sırası ile

$W(1-W), W(1-W)^2, W(1-W)^3, \dots$ şeklinde olacaktır. n dönemlik bir seride ilk dönemin ağırlığı $W(1-W)^{n-1}$ olacaktır.

* Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Bölümü Öğretim Üyesi

Öneri, C:1 S:1

Üstel düzeltme yönteminde son dönemin üstel düzeltilmiş değeri, gelecek dönemlerin tahmin değerleri olarak alınır.

$$\begin{aligned}F_{t+1} &= E_t \\F_{t+2} &= F_{t+1} = E_t \\F_{t+3} &= F_{t+2} = F_{t+1} = E_t\end{aligned}$$

3.HOLT-WINTERS MODELİ

Holt-Winters tahmin modeli üstel düzeltme yönteminin geliştirilmiş özel bir şeklidir. Yöntem üstel düzeltme yönteminde olduğu gibi dönemlere farklı ağırlıklar verir. Üstel düzeltme yönteminden farkı ise zaman serisindeki trendi tanımlamasıdır. Bu yöntem hem üstel düzeltme (E_t) hem de trend (T_t) bölümlerini içerir. Trend bölümü üstel düzeltilmiş değerin hesaplanmasında kullanılır. Üstel düzeltilmiş değer ile trend değeri ağırlıklı ortalama olarak ifade edilir. E_t ve T_t değerleri şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}E_t &= WY_t + (1-W)(E_{t-1} + T_{t-1}) \\T_t &= V(E_t - E_{t-1}) + (1-V)T_{t-1}\end{aligned}$$

Eşitliklerin herbirinde değerleri 0 ile 1 arasında değişen ($0 \leq W \leq 1$ ve $0 \leq V \leq 1$) iki düzeltme faktörü mevcuttur. W E_t 'nin düzgünlüğünü kontrol etmektedir. W 'nin sifıra yakın seçilmesi zaman serisindeki eski dönemlere daha fazla önem verirken, bire yakın seçilmesi son dönemlere daha fazla önem vermektedir. Yani ağırlığın aldığı değerler tahminde ilk verilerin mi yoksa son verilerin mi daha önemli olduğunu göstermektedir.

Serinin trend bölümü ise, zaman serisindeki en yeni değişimin ($E_t - E_{t-1}$) ve önceki dönemin trend değeri (T_{t-1}) ağırlıklı ortalaması kullanılarak elde edilir. Trend bölümünde kullanılan ağırlığın sifıra yakınlığı eski trend değerlerine, bire yakınlığı serideki son değişime daha fazla önem vermektedir.

Modelin uygulanmasında ilk önce değerleri 0 ile 1 arasında değişen W ve V ağırlıkları belirlenir. Daha sonra $t=2$ döneminden başlanarak zaman serisinin (Y_t), üstel düzeltme (E_t) ve Trend (T_t) bölümleri hesaplanır. Buna hesaplamaların ikinci dönemden başlamasının nedeni ilk iki gözlem değerinin trendin ilk değerinin hesaplanmasında kullanılmasıdır.

Üstel düzeltilmiş değerler ile trend değerinin hesaplanması ise şöyle olacaktır.

E_1 ve T_1 değerleri tanımsızdır.

$$\begin{aligned}E_2 &= Y_2 \\T_2 &= Y_2 - Y_1 \\E_3 &= WY_3 + (1-W)(E_2 + T_2) \\T_3 &= V(E_3 - E_2) + (1-V)T_2 \\E_4 &= WY_4 + (1-W)(E_3 + T_3) \\T_4 &= V(E_4 - E_3) + (1-V)T_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_t &= WY_t + (1-W)(E_{t-1} + T_{t-1}) \\T_t &= V(E_t - E_{t-1}) + (1-V)T_{t-1}\end{aligned}$$

Holt-Winters tahmin modeli ile bir sonraki dönemde zaman serisinin alacağı değeri tahmin etmek için son trend bölümü ile son üstel düzeltilmiş bölüm toplanır. Yani $t+1$ döneminin t 'ye kadar olan gözlem değerleri ile tahmini,

$F_{t+1} = E_t + T_t$ şeklinde olacaktır. Yöntemin esası, ileriye dönük tahmin yapılırken son üstel düzeltilmiş tahmin ile trendin karakterine göre beklenen artış/azalış tahmininin birleştirilmesidir. Her bir sonraki dönemin tahmini yapılırken son üstel düzeltilmiş bölüme trendin katları ilave edilmektedir.

$$\begin{aligned}F_{t+2} &= E_t + 2T_t \\F_{t+3} &= E_t + 3T_t\end{aligned}$$

$$F_{t+k} = E_t + kT_t$$

Holt-Winters tahmin modelinde, tahminde yapılan hatalar hesaplanarak tahmin geçerliliği incelenebilir ve bu ölçütlerden yararlanılarak parametrelerin seçimi yapılabilir. Tahmin hatalarının belirlenmesinde Ortalama Mutlak Sapma (OMS) ve Ortalama Hata Karenin Karekökü (OHKK) kullanılabilir.¹

$$OMS = \frac{\sum_{t=1}^n |F_t - Y_t|}{n} \quad OHKK = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n |F_t - Y_t|^2}{n}}$$

OHKK tahminin standart hatasını hesaplamakta, bu nedenle bazı dönemlerin gerçek değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun için de ya ileriye dönük tahmin yapıldıktan sonra belli bir dönemin geçmesi beklenip bu dönemin gerçekleşen değerleri elde edilecek veya zaman serisindeki son birkaç dönemin tahmin değerleri hesaplanarak tahminin yeterliliğinin belirlenmesine çalışılacaktır.

OMS ve OHKK gibi ölçülerin yorumlanması önemlidir. Değerlendirmenin içerdiği dönemin sayısı model seçiminde verilecek karar üzerinde önemli bir faktördür. Önemli olan bir diğer faktör ise, ileriye dönük yapılacak tahminin uzunluğudur. Yani ileriye dönük yapılacak tahmin kaç dönem için yapılacaktır. Ancak zaman serisinin gerçek değerleri gözlenmeden önce gelecek dönem tahminin güvenilirliğinin araştırılmasında tesadüfi hata terimine sahip regresyon modellerinden yararlanılabilir.

4. UYGULAMA

Bu bölümde Türkiye'nin 1971-1992 yılları arasındaki toplam turizm gelirlerinden yararlanılarak, turizm gelirlerinin gelecek yıllar için tahminleri üstel düzeltme ve Holt-Winters yöntemleri ile yapılacaktır. Her iki yöntem içinde farklı ağırlıklar kullanılarak farklı modeller elde edilecek ve modellerin karşılaştırılması yapılacaktır. Turizm gelirleri ile ilgili veriler Maliye Bakanlığı ve T.C. Merkez Bankası yayınlarından alınmıştır.

4.1. ÜSTEL DÜZELTME MODELİNİN UYGULANMASI

Bu yöntemde farklı ağırlıklar kullanılarak üç farklı model oluşturulmuştur. Kullanılan ağırlıklar sırası ile birinci modelde 0.5; ikinci modelde 0.3; üçüncü modelde ise 0.7'dir. Böylece hem serideki ilk değerlere hemde serideki son değerlere daha fazla önem verilerek hangi model ile yapılan tahminin daha isabetli olacağı araştırılmaya çalışılmıştır.

¹Ortalama mutlak sapma (The mean absolute deviation)

Ortalama Hata Karenin Karekökü (The mean root squared error) karşılığı olarak kullanılmıştır.

TABLO-1

YILLAR	TURİZM GELİRLERİ (1000 \$)	MODEL I E_t (W=0.5)	MODEL II E_t (W=0.3)	MODEL III E_t (W=0.7)
1971	62.857,0	62.857,0	62.857,0	62.857,0
1972	103.731,0	83.294,0	75.119,2	91.468,8
1973	171.477,0	127.385,5	104.026,5	147.474,5
1974	193.684,0	160.534,8	130.923,8	179.821,2
1975	200.861,0	180.697,9	151.904,9	194.549,1
1976	180.456,0	180.576,9	160.470,2	184.683,9
1977	204.877,0	192.726,9	173.792,2	198.819,1
1978	230.398,0	211.562,5	190.773,9	220.924,3
1979	280.727,0	246.144,8	217.759,8	262.786,2
1980	326.654,0	286.399,4	250.428,1	307.493,7
1981	381.268,0	333.833,7	289.680,1	359.135,7
1982	370.320,0	352.076,9	313.872,1	366.964,7
1983	411.088,0	381.582,5	343.036,9	397.851,1
1984	839.479,0	610.530,8	491.969,5	706.990,6
1985	1.481.639,0	1.046.084,9	788.870,4	1.249.244,5
1986	1.215.082,0	1.130.583,5	916.733,9	1.225.330,8
1987	1.721.117,0	1.425.850,3	1.158.048,8	1.572.381,1
1988	2.355.000,0	1.890.425,2	1.517.134,2	2.120.214,3
1989	2.557.000,0	2.223.712,6	1.829.093,9	2.425.964,3
1990	3.225.000,0	2.724.356,3	2.247.865,7	2.985.289,3
1991	2.654.000,0	2.689.178,2	2.369.706,0	2.753.386,8
1992	3.699.000,0	3.164.089,1	2.750.494,2	3.373.316,0

Farklı ağırlıklarla elde edilen modellerle iki farklı tahmin yapılmıştır.

i) İlk önce 1990 yılına kadar veriler kullanılarak sonraki yılların tahminleri yapıлып, gerçekleşen değerler ile tahmin değerleri arasında sapmalar bulunup hangi ağırlık kullanılarak elde edilen modelin daha iyi sonuç verdiğine bakıldığında şu sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

	Model I	Model II	Model III
1990 yılı üstel düzeltme değeri	2.724.356,3	2.247.865,7	2.985.289,3

Modelde geleceğe dönük tahminler

$F_{t+1}=E_t$; $F_{t+2}=E_{t+1}$; $F_{t+3}=E_{t+1}$
olarak yapıldığından, tahmin değerleri:

	Model I	Model II	Model III
1991	2.724.356,3	2.247.865,7	2.985.289,3
1992	2.724.356,3	2.247.865,7	2.985.289,3
1993	2.724.356,3	2.247.865,7	2.985.289,3

olarak elde edilir. Gerçekleşen değerler ile tahminler arasındaki sapmalar ise şöyledir: (1993 yılı Kasım sonu itibari ile gerçekleşen değer 3.802.000 \$ 'dır.)

	Model I	Model II	Model III
1991	-70.356,3	406.134,3	-331.289,3
1992	974.643,7	1.451.134,3	713.710,7
1993	1.077.643,7	1.554.134,3	816.710,7

serideki son dönemlere daha fazla önemin verildiği üçüncü modeldeki sapmaların daha az olduğu görülmektedir.

ii) Bu yöntemin ileriye dönük uzun dönemlik tahminlerde kullanılması fazla güvenilir olmayacağı gerekçesiyle 1992 yılına kadar veriler kullanılarak sadece 1993 yılı değeri tahmin edildiğinde ise, 1992 yılı değeri 1993 yılı tahmini olarak ele alınacağından, tahminler farklı modeller için şöyle olacaktır:

	Model I	Model II	Model III
1993 tahmini	3.164.089,1	2.750.494,2	3.373.316,0
1993 sapması	637.910,9	1.051.505,8	428.684,0

Üçüncü modelin burada da daha az sapma verdiği görülmektedir. Ancak 1993 yılı verisi 11 aylık olduğundan bütün modellerdeki sapmalar daha da büyüyecektir.

4.2. HOLT - WINTERS MODELİNİN UYGULANMASI

Yöntemin uygulanmasında üstel düzeltilmiş bölüm ile trend bölümünde hem eşit hem de farklı ağırlıklar verilerek dört ayrı model oluşturulmuştur. Birinci ve dördüncü modelde her iki bölümde de eşit ağırlık verilmiş, ancak ilk modelde serideki ilk ve son değerlere aynı derecede önem verilirken, don modelde son verilere daha fazla önem verilmiştir. İkinci modelde üstel düzeltilmiş bölümde serideki ilk değerlere az son değerlere fazla önem verilirken, trend bölümünde ilk değerlere fazla, son değerlere az önem verilmiş, Üçüncü modelde ise ikinci modelin tersi ağırlıklar uygulanmıştır.

Tablo 2

Yıllar	Turizm Gelirleri (1000\$)	Model I		Model II		Model III		Model IV	
		E_t ($W=0.5$)	T_t ($W=0.5$)	E_t ($W=0.7$)	T_t ($W=0.3$)	E_t ($W=0.3$)	T_t ($W=0.7$)	E_t ($W=0.7$)	T_t ($W=0.7$)
1971	65.857	--	--	--	--	--	--	--	--
1972	103.731	103.701,0	40.874,0	103.731,0	40.874,0	103.731,0	40.874,0	103.731,0	40.874,0
1973	171.477	158.041,0	47.592,0	163.415,4	46.517,1	152.666,6	46.517,1	163.415,4	54.041,3
1974	193.684	199.968,5	44.604,8	198.558,6	72.216,4	197.553,8	45.362,2	200.815,8	42.392,7
1975	200.861	222.563,1	33.754,7	221.835,2	57.534,5	230.285,5	36.534,9	213.565,3	21.642,5
1976	180.456	218.386,9	-4.176,2	210.130,1	36.762,6	240.911,1	18.398,4	196.881,5	-5.185,9
1977	204.877	209.543,9	-4.423,6	217.481,7	27.939,3	242.979,8	6.967,6	200.922,6	1.273,0
1978	230.398	217.759,2	6.003,5	235.135,2	24.853,6	244.082,6	2.862,2	221.937,3	15.092,2
1979	280.727	252.244,9	20.244,6	274.505,5	29.208,6	257.079,5	9.656,5	267.617,8	36.504,0
1980	326.654	299.571,8	33.785,8	319.772,0	34.025,9	284.921,4	22.476,3	319.894,3	47.544,8
1981	381.268	357.312,8	45.763,4	373.026,9	39.794,6	329.558,8	37.989,1	377.119,3	54.320,9
1982	370.320	386.698,1	37.574,4	383.070,5	30.869,3	368.379,5	38.571,2	388.656,1	24.372,0
1983	411.088	417.680,3	34.278,3	411.943,5	145.191,6	408.191,9	39.440,0	411.670,0	23.421,3
1984	839.479	645.718,8	131.158,4	754.775,8	204.483,8	565.186,0	121.727,9	718.162,7	222.571,3
1985	1.481.639	1.129.258,1	307.348,9	1.324.925,2	314.183,5	925.331,4	288.620,2	1.125.462,5	291.787,1
1986	1.215.082	1.325.844,5	251.967,7	1.342.290,0	225.137,9	1.214.290,7	288.857,6	1.275.732,3	192.725,0
1987	1.721.117	1.649.464,6	287.793,9	1.675.010,3	257.412,6	1.568.538,9	334.631,0	1.645.319,1	316.528,3
1988	2.355.000	2.146.129,3	392.229,3	2.228.226,9	346.153,8	2.038.718,9	429.51,3	2.237.054,2	509.173,1
1989	2.557.000	2.547.679,3	396.889,7	2.562.214,2	342.503,9	2.494.863,9	448.156,1	2.613.768,2	416.451,7
1990	3.225.000	3.225.784,5	466.997,5	3.128.915,4	409.763,1	3.027.614,0	507.371,9	3.166.566,0	511.894,0
1991	2.654.000	3.102.891,0	242.552,0	2.919.403,6	223.980,6	3.270.690,1	322.364,8	2.961.388,0	9.908,6
1992	3.639.000	3.492.221,5	315.941,3	3.490.315,3	328.059,9	3.606.838,4	332.013,3	3.438.673,8	337.107,6

Üstel düzeltilmiş yöntemde olduğu gibi burada da iki farklı tahmin yapılmıştır.

i) 1990 yılına kadar veriler kullanıldığında sonraki yıl ların tahmini 1990 yılı E_t ve T_t değerlerinden hareketle hesaplanacağından bu yılın değerleri,

Model 1		Model 2		Model 3		Model 4	
E_t	T_t	E_t	T_t	E_t	T_t	E_t	T_t
3.084.784,5	466.997,5	3.128.915,4	409.763,1	3.027.614,0	507.371,9	3.166.566,0	511.894,0

ve geleceğe dönük tahminler

$$F_{t+1}=E_t+T_t ; F_{t+2}=E_t+2T_t ; F_{t+3}=E_t+3T_t ;$$

olarak yapıldığından tahmin değerleri:

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1991	3.551.782,0	3.538.678,5	3.534.985,9	3.678.460,0
1992	4.018.779,5	3.948.441,6	4.042.357,8	4.190.354,0
1993	4.485.777,0	4.358.204,7	4.549.729,7	4.702.248,0

olarak elde edilir. Sapma değerleri ise şöyle olacaktır:

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
1991	-897.782,0	-884.678,5	-880.985,9	-1.024.460,0
1992	-379.779,5	-309.441,6	-403.357,8	-551.354,0
1993	-683.777,0	-556.204,7	-747.729,7	-900.248,0

En az sapmayı veren model üstel düzeltme bölümünde serideki en son değerlere trend bölümünde ilk değerlere daha fazla önem veren ikinci modeldir. Ancak 1993 yılı 12 aylık değeri dikkate alındığında bu yıl için sapmalar daha az olacaktır.

Ayrıca OMS ve OHKK değerleri hesaplandığında da aynı sonuca ulaşılmaktadır.

	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
OMS	653.779,1	583.441,6	677.357,8	825.354,0
OHKK	687.458,1	629.225,4	706.619,5	849.304,8

ii) 1992 yılına kadar veriler kullanılarak 1992 yılından hareketle 1993 yılı tahmini yapıldığında;

1993 tahmini	3.808.162,8	3.818.375,2	3.938.851,7	3.775.781,4
1993 sapması	-6.162,8	-16.375,2	-138.851,7	26.218,6

1993 yılı 11 aylık gerçekleşmiş değeri 3.802.000 \$ olduğundan 12 aylık değer dikkate alındığında üçüncü modelin tek yıllık tahminde daha fazla isabetli olduğu söylenebilir.

5.SONUÇ

Üstel düzeltme ve Holt-Winters modelleri ile yapılan tahminler karşılaştırıldığında Holt-Winters modelinin daha gerçekçi (daha az sapmalı) tahminler yaptığı söylenebilir. Bunun nedeni de modelin iki bölümden meydana gelmesi yani üstel düzeltme yanında trende de yer vermesidir. Ayrıca her iki modelde de son dönemlere daha fazla ağırlık veren seçenekler daha anlamlı sonuç vermektedir. Bu sonuç üzerinde incelenen konudaki verilerin artan bir trende sahip olmasının etkisi vardır. Üstel düzeltme yönteminde son dönemin üstel düzeltme yönteminde son dönemin üstel düzeltilmiş değeri ileriye dönük yapılacak bütün dönemlerin tahminini verirken, Holt-Winters yöntemi bu değerlere her dönem trend bölümünün katlarını ilave ederek daha gerçekçi tahminlerin yapılmasını sağlar. Bu yöntemler ile ileriye dönük uzun dönemli tahminler yapmak yerine kısa süreli tahminler yapmak daha uygun olacaktır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

ABRAHAM, B.;LETHOLTER. J.; Statistrtical Methods for Forecasting, Wiley, New York, 1983.

GRANGER. C. W. J.; NEWBOLD, P.; Forecasting Economics Time Series, Academic Press, New York , 1977

McCLAVE , James, T.; BENSON, P., George; Statistics for Business and Economics, fifth edition, Dellen Pub. Co., San Francisco, 1991.

MORRISON, Donald F.; Applied Linear Statistical Methods, Englewood-Cliffs, Perentice Hall, New Jersey, 1983.

PIDNYCK, Roberts S.; RUBINFELS, Daniel L.; Econometric Models and Economic Forecast, Third Edition. Mc Graw- Hill, Singapore, 1991.

T.C. Maliye Bakanlığı Yıllık Raporları

T.C. Merkez Bankası Yıllık Raporları

TURANLI, M.; GÜRİŞ, S.; AYAYDIN, A.; İstatistik temel Kavramlar ve Uygulamalar, İstanbul, 1993.

VURAN, Ateş; İstatistik III, İstanbul, 1981.

WAYNE, W., Daniel, TERRELL, James, C.; Business Statistics, Fourth Edition, Houghton-Mifflin Co.; Boston, 1986