Araştırma Makalesi / Research Article

Paraserbest Lie Cebirlerinin Ters Limiti

Zehra VELİOĞLU*

Harran Üniversitesi, Matematik Bölümü, Şanlıurfa
(ORCID: 0000-0001-7151-8534)

Öz
Bu çalışmada paraserbest Lie cebirlerinin ters limiti incelenmiştir. Ayrıca bir paraserbest Lie cebirinin Lie cebirlerden oluşan bir ters sistemin ters limitinin içine gömülebileceği gösterilmiştir. Bu sonuç kullanılarak her sonlu üretilmiş paraserbest metabelyen Lie cebirinin rezidülü sonlu olan bir cebirin içine gömülebileceği ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Paraserbest Lie Cebirleri, Ters Limit, Rezidülü sonlu.

Inverse Limit of Parafree Lie Algebras

Abstract
In this work we investigate inverse limit of parafree Lie algebras. Moreover we show that a parafree Lie algebra can be embedded in inverse limit of a inverse system of some Lie algebras. Using that result, we prove that every finitely generated parafree metabelian Lie algebras can be embedded in residually finite algebra.

Keywords: Parafree Lie Algebras, Inverse Limit, Residually Finite.

1. Giriş

Paraserbest grupların tanımı ilk olarak Baumslag tarafından yapılmıştır [1-3]. Daha sonra Baumslag ve Cleary bir bağıntılı paraserbest gruplar üzerinde çalışmış ve bu gruplar ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir [4]. Baur paraserbest grupların tanımını Lie cebirlerine uyarlayarak paraserbest Lie cebirlerinin tanımını yapmıştır [5]. Daha sonra Ekici ve Velioğlu paraserbest Lie cebirlerinin direkt limiti [6] ve birleşimi [7] üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Paraserbest Lie cebirleri serbest Lie cebirleri ile birçok ortak özellikleri olması bakımından özel bir cebir sınıfıdır. Buna rağmen bu özel cebir sınıfı henüz çok çalışılmamıştır. Bu çalışmada paraserbest Lie cebirlerinin ters limiti incelenmiş olup bir paraserbest Lie cebirinin Lie cebirlerden oluşan bir ters sistemin ters limitinin içine gömülebileceği gösterilmiştir. Ayrıca bu sonuç kullanılarak her sonlu üretilmiş paraserbest metabelyen Lie cebirinin rezidülü sonlu olan bir cebirin içine gömülebileceği ispatlanmıştır.

2. Gerekli Tanımlar

Bu çalışmada kullanılan tüm Lie cebirleri bir K cismi üzerinde tanımlı olup bu cismin karakteristiğinin sıfır olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.1. Bir L Lie cebirinin alt merkezi serisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\gamma_1(L) = L, \gamma_2(L) = [L, L], \gamma_3(L) = [L, \gamma_2(L)], \cdots, \gamma_k(L) = [L, \gamma_{k-1}(L)], \cdots$$

olmak üzere,

$$L = \gamma_1(L) \supset \gamma_2(L) \supset \gamma_3(L) \supset \cdots \supset \gamma_k(L) \supset \cdots$$

*Sorumlu yazar: *zehrav@harran.edu.tr*
Geliş Tarihi:14.05.2019, Kabul Tarihi: 08.08.2020

Tanım 2.2. Eğer $\gamma_k(L) = \{0\}$ ise L ye nilpotent Lie cebiri denir. Bu pozitif k tamsayılarının en küçüğüne ise L nin nilpotentlik sınıfı denir.
Eğer $\gamma_2(L) = \{0\}$ ise L ye abelyen denir.
$\gamma_2(L)$ nin alt merkezi serisinin ikinci terimi L'' ile gösterilir. Eğer $L'' = \{0\}$ ise L ye metabelyen denir.

Tanım 2.3. Eğer $\bigcap_{n\geq 2}\gamma_n(\mathrm{L}) = \{0\}$ ise L ye rezidülü nilpotent denir.

Tanım 2.4. L bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda L ye bir paraserbest Lie cebiri denir.

i) L rezidülü nilpotenttir,
ii) F serbest üreteç kümesi X olan bir serbest Lie cebiri olsun. O halde her $n \geq 2$ için $\mathrm{L}/\gamma_n(\mathrm{L}) \cong \mathrm{F}/\gamma_n(\mathrm{F})$ dir.

3. Lie Cebirlerinin Ters Limiti

Tanım 3.1. J kümesi kısmi sıralı olmak üzere her $\alpha,\beta \in J$ için $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in J$ elemanı mevcut ise $(J,\leq)$ ye bir direkt küme denir.

Tanım 3.2. J bir direkt küme ve her $\alpha \in J$ için A_α bir Lie cebiri olsun. Her $\alpha \leq \beta$ için$\pi_{\beta\alpha}: \mathrm{A}_\beta \to \mathrm{A}_\alpha$ homomorfizmlerini ele alalım. Aşağıdaki şartların oluşması durumunda

$$\left\{\{\mathrm{A}_\alpha\}_{\alpha\in J}, \{\pi_{\beta\alpha}\}_{\alpha\leq\beta}\right\}$$

sistemine bir ters sistem denir.

1. $\mathrm{Id}_{\mathrm{A}_\alpha}$ dönüşümü A_α üzerinde tanımlı birim dönüşümü olmak üzere her $\alpha \in J$ için $\pi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathrm{A}_\alpha}$.
2. $\alpha,\beta,\gamma \in J$ için, eğer $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ sağlanıyorsa $\pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\beta\alpha} \circ \pi_{\gamma\beta}$ dir.

Tanım 3.3. Her $\alpha \in J$ için A_α birer Lie cebiri ve $\left\{\{\mathrm{A}_\alpha\}_{\alpha\in J}, \{\pi_{\beta\alpha}\}_{\alpha\leq\beta}\right\}$ ise A_α ların bir ters sistemi olsun. Bu sistemin ters limiti her $\alpha \in J$ için $\pi_\alpha: T \to \mathrm{A}_\alpha$ homomorfizmi ile birlikte aşağıdaki özelliklerini sağlayan bir T Lie cebiridir.

1. Her $\alpha \leq \beta$ için $\pi_{\beta\alpha} \circ \pi_\beta = \pi_\alpha$ dir.
2. C bir Lie cebiri olmak üzere her $\alpha \leq \beta$ için $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \pi_{\beta\alpha}$ olacak şekilde $\varphi_\alpha: C \to \mathrm{A}_\alpha$ dönüşümleri var olsun. O taktirde C den T ye bir tek $\varphi: \mathrm{C} \to \mathrm{T}$ homomorfizmi vardır ve her $\alpha \in J$ için $\varphi_\alpha = \pi_\alpha \circ \varphi$ sağlanır.

Bir ters sistemin ters limiti daima vardır ve bu limit izomorfizm farkıyla tek olup $\mathrm{T} = \varprojlim \mathrm{A}_\alpha$ ile gösterilir. Ayrıca

$$P = \prod_{\alpha\in J} \mathrm{A}_\alpha,$$

A_α cebirlerinin direkt çarpımı olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T} = \varprojlim \mathrm{A}_\alpha = \left\{(x_\alpha) \in P: \pi_{\beta\alpha}(x_\beta) = (x_\alpha), \alpha \leq \beta\right\}$$

olup ters limitin P nin bir alt cebiri olduğu söylenebilir.

Örnek 3.1. H bir Lie cebiri ve $N = \{\gamma_2(\mathrm{H}), \gamma_3(\mathrm{H}), \dots, \gamma_\mathrm{n}(\mathrm{H}), \dots\}$ ise H nin alt merkezi serisinin terimlerinin kümesi olsun. Bu küme ters içerilme bağıntısına ile birlikte bir direkt kümedir. Yani $i \leq j$ dir ancak ve ancak $\gamma_\mathrm{j}(\mathrm{H}) \subseteq \gamma_\mathrm{i}(\mathrm{H})$ dır. Şimdi

$$\pi_{ji}: \mathrm{H}/\gamma_\mathrm{j}(\mathrm{H}) \to \mathrm{H}/\gamma_\mathrm{i}(\mathrm{H})$$

doğal homomorfizmlerini ele alalım. Bu durumda

$$\left\{\left\{\mathrm{H}/\gamma_\mathrm{i}(\mathrm{H})\right\}_{i\geq 2}, \pi_{ji}\right\}_{i\leq j}$$

bir ters sistemdir. Bu sistemin ters limiti $\widehat{\mathrm{H}} = \lim_{\leftarrow} {}^{\mathrm{H}}/_{\gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})}$ ile gösterilir ve genellikle H nin tamlayıcısı olarak adlandırılır.

Önerme 3.1. Yukarda verilen örnekte H Lie cebiri eğer paraserbest ise bu cebir $\widehat{\mathrm{H}}$ içine gömülebilir.
İspat. H Lie cebiri paraserbest ve$\widehat{\mathrm{H}}$ ise $\left\{\left\{{}^{\mathrm{H}}/_{\gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})}\right\}_{i\geq 2}, \pi_{ji}\right\}_{i\leq j}$ sisteminin ters limiti olsun. i≥2 olmak üzere

$$\pi_{\mathrm{i}}: \widehat{\mathrm{H}} \rightarrow {}^{\mathrm{H}}/_{\gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})}$$

ile tanımlı kanonik homomorfizmlerini ele alalım. Bu durumda $\widehat{\mathrm{H}}$ limitini $\prod {}^{\mathrm{H}}/_{\gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})}$ (i≥2) direkt çarpımın bir alt cebiri olduğu biliniyor. O halde

$$h_i \in \mathrm{H} \text{ ve } h_{i+1} \equiv h_i \bmod \gamma_{i+1}(\mathrm{H})$$

için bir $a \in \widehat{\mathrm{H}}$ elemanı $a = (h_1 + \gamma_2(\mathrm{H}), h_2 + \gamma_3(\mathrm{H}), \dots)$ şeklindedir. Bu durumda

$$\pi_i(a) = h_{i-1} + \gamma_i(H) \in {}^{H}/_{\gamma_i(H)}$$

dir. Ayrıca i≥2 için

$$\tau_{\mathrm{i}} : \mathrm{H} \rightarrow {}^{\mathrm{H}}/_{\gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})}$$

dönüşümleri $\pi_{\mathrm{i}} \circ \beta = \tau_{\mathrm{i}}$ için bir $\beta: H \rightarrow \widehat{\mathrm{H}}$ homomorfizmini gerçekler. Bu homomorfizm $u \in H$ için

$$\beta(u) = (u + \gamma_2(H),\ u+\gamma_3(H), \dots)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi bir $v \in Ker\beta$ elemanını ele alalım. Bu durumda

$$\beta(v) = (v + \gamma_2(H), v+ \gamma_3(H), \dots) = \bar{0}$$

eşitliği elde edilir ve böylece

$$\beta(v) = (v + \gamma_2(H),\ v + \gamma_3(H), \dots) = (\gamma_2(H), \gamma_3(H), \dots)$$

olur. O halde her $i \geq 2$ için

$$v + \gamma_i(H) = \gamma_i(H)$$

olup her i için

$$v \in \gamma_i(H) \text{ ve } v \in \cap_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H})$$

olur. H rezidülü nilpotent olduğu için

$$\cap_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \gamma_{\mathrm{i}}(\mathrm{H}) = \{0\}$$

dır. O halde

$$v = 0 \text{ ve } Ker\beta = \{0\}$$

dır. Bu β nın birebir olduğu anlamına gelir. O halde H, $\widehat{\mathrm{H}}$ içine gömülebilir.

4. Rezidülü Sonlu Lie Cebirleri

Tanım 4.1.L bir Lie cebiri ve H ise sonlu boyutlu olan bir Lie cebiri olsun. Eğer her $0 \neq a \in L$ için $\phi(a) \neq 0$ olacak şekilde bir $\phi: L \rightarrow H$ homomorfizmi varsa ϕ ye rezidülü sonludur denir.

Önerme 4.1. Bir rezidülü sonlu Lie cebirinin her alt cebiri de rezidülü sonludur.

İspat: L rezidülü sonlu olan bir Lie cebiri ve T, L nin bir Lie alt cebiri olsun. $0 \neq h \in T$ elemanını ele alalım. L rezidülü sonlu olduğundan bir sonlu boyutlu H Lie cebiri ve bir

$$\phi: L \rightarrow H$$

homomorfizmi vardır öyle ki $\phi(h) \neq 0$ dır. Şimdi

$$\phi': T \rightarrow H$$

dönüşümü ϕ homomorfizminin T ye kısıtlanışı olsun. O halde

$$\phi'(h) = \phi(h) \neq 0$$

dır. Böylece T rezidülü sonlu olur.

Önerme 4.2. $(L_i)_{i\in I}$ rezidülü sonlu olan Lie cebirlerinin bir ailesi olsun. O halde $L = \prod_{i\in I} L_i$ direkt çarpımı da rezidülü sonludur.

İspat: $0 \neq g = (g_i)_{i\in I} \in (L_i)_{i\in I}$ elemanını ele alalım. O halde bir $i_0 \in I$ vardır öyle ki $g_{i_0} \neq 0$. L_{i_0} rezidülü sonlu olduğundan sonlu boyutlu bir H Lie cebiri ve bir

$$\mu: L_{i_0} \to H$$

homomorfizmi vardır öyle ki $\mu(g_{i_0}) \neq 0$ dır. Şimdi

$$\pi: L \to L_{i_0}$$

bir projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\mu' = \mu\circ\pi$ ile tanımlı

$$\mu': L \to H$$

dönüşümü ele alalım. O halde

$$\mu'(g) = \mu\,(g_{i_0}) \neq 0.$$

Böylece L rezidülü sonludur.

Sonuç 4.1. Eğer L rezidülü sonlu olan Lie cebirlerinin bir ters sisteminin ters limiti ise L de rezidülü sonlu olur.

İspat. $(L_i)_{i\in I}$ rezidülü sonlu olan Lie cebirlerin bir ters sistemi olsun öyle ki bu sistemin ters limiti $L = \varprojlim L_i$ olsun. Ters limitin tanımından L cebiri $\prod_{i\in I} L_i$ çarpımın bir alt cebiridir. Önerme 4.2. den $\prod_{i\in I} L_i$ rezidülü sonlu olduğu biliniyor. O halde Önerme 4.1. den L de rezidülü sonlu olur.

Sonuç 4.2.I sonlu bir küme olmak üzere $(P_i)_{i\in I}$ rezidülü sonlu olan paraserbest Lie cebirlerinin sonlu bir ailesi olsun. O halde $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ direkt toplamı da paraserbest olup rezidülü sonludur.

İspat: Sonlu çokluktaki paraserbest Lie cebirlerinin direkt toplamı paraserbesttir [8]. Bu durumda P bir paraserbest Lie cebiridir. Şimdi P nin rezidülü sonlu olduğunu gösterelim. P direkt toplamı sonlu çokluktaki $i \in I$ için $g_i = 0$ olan $g = (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} P_i$ elemanlarını içeren $\prod_{i\in I} P_i$ direkt çarpımının bir alt cebiridir. Önerme 4.2. den $\prod_{i\in I} P_i$ rezidülü sonlu olduğu biliniyor. O halde Önerme 4.1. den P de rezidülü sonlu olur.

Sonuç 4.3. Her sonlu üretilmiş olan paraserbest metabelyen Lie cebiri rezidülü sonlu olan bir cebirinin içine gömülebilir.

İspat: P sonlu üretilmiş olan bir paraserbest metabelyen Lie cebiri olsun. O halde her $n \geq 2$ için $P/\gamma_n(P)$ cebirleri de sonlu üretilmiş metabelyen olup rezidülü sonludur [9]. Şimdi $n \geq 2$ için

$$P/\gamma_n(P) \to P/\gamma_{n-1}(P)$$

şeklindeki kanonik projeksiyonların sistemini düşünelim. Bu sistemin ters limiti $\hat{P}$ dir. Sonuç 4.1. den $\hat{P}$ rezidülü sonlu olduğu biliniyor. O halde Önerme 3.1. den P paraserbest Lie cebiri $\hat{P}$ içine gömülebilir.

Teşekkür

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığımız sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye çok teşekkür ederiz.

Yazarların Katkısı

Makalede tüm katkı şahsıma aittir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada, araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

[1] Baumslag G. 1967. Groups with the same lower central sequence as a relatively free group I. The groups. Trans. Amer. Math. Soc., 129: 308-321.

[2] Baumslag G. 1969. Groups with the same lower central sequence as a relatively free group. II Properties. Trans. Amer. Math. Soc., 142: 507-538.

[3] Baumslag G. 2005. Parafree groups, Progress in Math., 248: 1-14.

[4] Baumslag G., Cleary S. 2006. Parafree one-relator groups. J. of Group Theory, 9 (12): 191-201.

[5] Baur H. 1978. Parafreie Lie algebren und homologie. Diss. EthNr., Zurich, 6126:1-60.

[6] Ekici N., Velioğlu Z. 2015. Direct Limit of Parafree Lie Algebras. Journal of Lie Theory, 25 (2): 477-484.

[7] Ekici N., Velioğlu Z. 2014. Unions of Parafree Lie Algebras, Algebra. Article ID 385397.

[8] Banyat S. 2015. More on the direct sum of parafree Lie algebras. Global Journal Pure and Applied Mathematics, 11(1): 315-318.

[9] Bahturin Y. 1987. Identical Relations in Lie Algebras. VNU Science Press, Utrecht.