

Voronoi Diyagramı ve Taksi Düzlemi Üzerine

Ziya AKÇA^{a*}, Ceyda ÇALIŞ^b

^aEskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

Eskişehir- Türkiye

^bTolunay Özaka Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Beypazarı-Ankara Türkiye

Geliş / Received: 05/03/2020, Kabul / Accepted: 09/03/2021

Öz

Bu çalışmada, Voronoi diyagramları, Fortune Algoritması ve Taksi düzlemde Voronoi diyagramları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Voronoi diagramları, Taksi düzlem geometri, Fortune algoritması

On The Voronoi Diagram and Taxicab Plane

Abstract

In this work, Voronoi diagrams, Fortune algorithm and Voronoi diagrams in the Taxicab plane are investigated.

Keywords: Voronoi diagrams, Taxicab geometry, Fortune algorithm.

1. Giriş

Voronoi diyagramı 1903 yılında George Voronoi tarafından karar uzayını oluşturan verilerin "mozaiklere bölünmesi" olarak tanımlanan veri parçalama yöntemidir. Düzlemde n farklı noktaya sahip bir P kümesi ele alındığında bu kümede yer alan herhangi bir noktaya kümedeki diğer noktalardan daha yakın bulunan noktaların geometrik yerine o noktanın "Voronoi Çokgeni" denir. P kümesindeki tüm noktaların Voronoi çokgenlerinin birleşimi ile o kümenin Voronoi diyagramı oluşur. Bu diyagram en yakın nokta problemlerinin çözümü için kullanılan

bir yapıdır. Voronoi diyagramı hesaplamalarında genellikle Öklidyen düzlemdeki uzaklık fonksiyonları kullanılmaktadır.

Birçok matematik çalışmasında olduğu gibi Voronoi diyagramlarının da oldukça geniş uygulama sahası vardır. Genellikle astronomide gezegen yüzeylelerinin incelenmesinde, coğrafya ve arkeolojide bölgedeki suyun akışının bölge topografyası üzerine etkisinin incelenmesinde, yol güzergâhlarının planlanmasında, biyolojide bazı bitkilerin yapısında, zürafanın vücut desenlerinde ve sanatsal ürünlerde Voronoi diyagramı ile karşılaşılmaktadır.

*Corresponding Author: zakca@ogu.edu.tr

Örneğin, birçok marketin yer aldığı bir semtte büyük bir market zinciri bir şubesini açmak isterse bu marketin açılacağı yer için yapılan araştırmalarda en fazla kazanç sağlayacak bölgenin belirlenmesi gerekmektedir. Bu semt için nüfusun düzgün dağılımlı olduğunu kabul ederek marketin açılacağı yerin doğru belirlenmesi gerekmektedir. Çünkü hiç bir yatırım rastgele yapılamaz. Dolayısıyla yeni açılacak marketin eski marketlerden oldukça uzağa konumlandırılması gerekmektedir. Bunun için açılacak market için seçilecek bölge, merkezi bu market olan ve içerisinde başka market bulunmayan en büyük çember bölgesi seçilir.

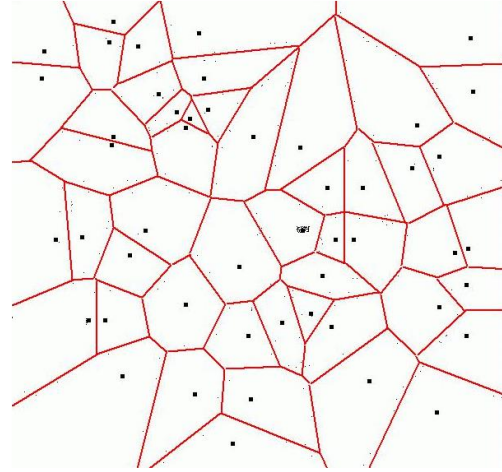
Yani en yakın diğer markete olan uzaklık çemberin yarıçapı kadar olmalıdır.

Şimdi Voronoi diyagramı ile ilgili bazı temel kavramları verelim (Fortune, 1987; Horn ve Weber, 2004; Miu, 2001; Özbek, 2010; Toma, 2010; Vassilev ve Eades, 2013).

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ Öklidyen düzlemde noktalar kümesi olsun. Düzlemdeki p_i noktaları ve herhangi bir q noktası için

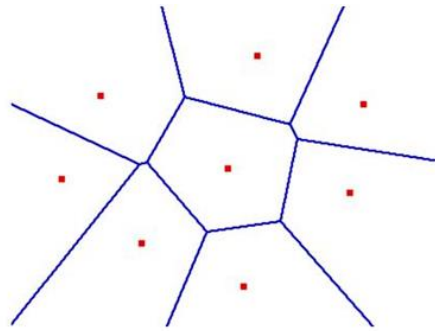
$$d_E(q, p_i) < d_E(q, p_j), p_j \in P, i \neq j$$

koşulunu sağlıyorsa q noktası p_i hücresi içindedir denir ve bu yapı 1. dereceden Voronoi Diyagramı olarak adlandırılır. P nin Voronoi diyagramı $\text{Vor}(P)$ ile gösterilir.



2. Voronoi Kenarı

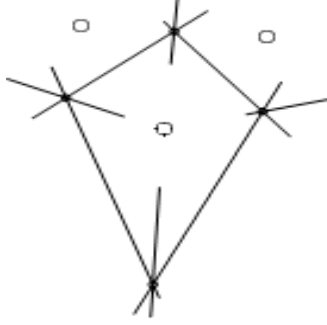
Öklidyen düzlemde verilen noktalar kümesi $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olsun. Her Voronoi kenarı herhangi iki noktaya en yakın ve eşit uzaklıktaki noktaların kümesinden oluşur. Her Voronoi kenarı $\text{Vor}(p_i)$ ve $\text{Vor}(p_j)$ Voronoi hücrelerini sınırlar. Aynı zamanda Voronoi kenarı p_i ve p_j yi birleştiren doğru parçasının orta dikmesi üzerinde bulunmaktadır.



3. Voronoi Köşesi

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ noktalar kümesi verilsin. Bu kümeden herhangi dördü dairesel olmayan noktalar ele alındığında bunlardan herhangi üç noktadan geçen en büyük çemberin merkezi bir Voronoi köşesidir. Eğer üçten fazla nokta dairesel ise oluşan çemberin

kirişlerinin orta dikmelerinin arakesit noktası ile bir tane Voronoi köşe bulunur.



4. Voronoi Hücresi

Öklidyen düzlemde $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ seçilen noktalar kümesi olsun. Herhangi bir p_j noktasını üzerinde bulunduran, Voronoi kenarları ile sınırlı ya da sınırsız alt bölgelere Voronoi hücresi denir. Hücrelerinin birleşmesi ile Voronoi diyagramı oluşur. Yani Öklidyen düzlemde noktalar kümesi $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ iken bu kümedeki herhangi iki eleman birbirine en yakın olacak şekilde düzlemin parçalanması ile Voronoi diyagramı oluşturulur.

5. Fortune algoritması

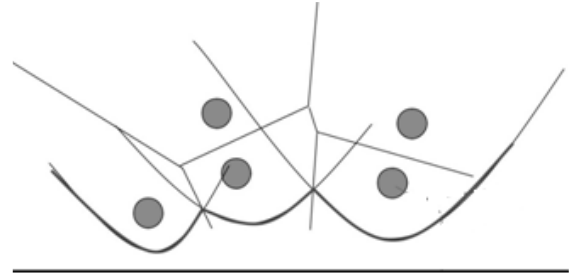
Fortune algoritması, düzlemdeki noktalar kümesinden Voronoi diyagramının oluşturulmasında kullanılan bir düzlem tarama algoritmasıdır. Algoritma ilk olarak Steven Fortune tarafından "A Sweepline Algorithm For Voronoi Diagrams" başlıklı çalışmasıyla yayınlanmıştır (Fortune, 1987). Algoritma bir tarama çizgisi bir de kıyı çizgisinden oluşur. Bu çizgiler algoritmanın işlemi sırasında düzlem boyunca hareket eder.

Fortune algoritmasında bir noktanın Voronoi diyagramını hesaplamak için tarama çizgisi kullanılır. Bu çizgi düz bir çizgidir ve klasik olarak düzlemde soldan sağa veya yukarıdan aşağıya doğru hareket eden bir çizgi olarak düşünülebilir. Dikey (veya yatay) çizgi düzlemi süpürür. Süpürme sırasında, nokta olayları ve çember olayları ile karşılaşıl-

dığında gerekli olay işleyiciyi harekete geçirir.

Aslında bir p noktasına ve bir l çizgisine eşit mesafedeki noktaların geometrik yeri, odağı p ve doğrultmanı l olan bir paraboldür. Başlangıçta parabolün genişliği sıfırdır. Bu ise l ye dik bir ışındır. Tarama çizgisi ilerledikçe parabolün genişliği artar ve diğer noktalar ile kesişir. Parabollerin kesiştikleri noktalara kırılma (kesme) noktaları denir. Voronoi diyagramlarının kenarları bu noktadan geçen doğrulardır.

Kıyı çizgisi ise tarama çizgisinin üstünde birçok parabolden oluşan karmaşık bir eğridir. Tarama çizgisinin üstündeki her nokta için bir parabol oluşur. Kırılma noktalarında kesişen bu parabolik yayların birleşimi kıyı çizgisini oluşturur.



Taksi geometride trigonometrik fonksiyonlar, taksi çemberleriyle ilgili özellikler, küre üzerinde taksi uzaklık, dönmeler altında taksi uzaklık, koniklerin sınıflandırılması gibi çalışmalar (Akça ve Kaya, 1997; Bayar ve Ekmekçi, 2015; Bayar ve Kaya, 2005; Çalış, 2019; Ekici vd., 1998; Ekmekçi, 2001; Kaya vd., 2000; Özcan vd., 2002) de yapılmıştır.

Aşağıdaki bölümde taksi düzlemde bazı temel kavramlar verildikten sonra taksi düzlemde Fortune algoritması, taksi düzlemde taksi parabollerini yardımıyla kıyı çizgisi ve tarama çizgisi kullanılarak bir taksi Voronoi diyagramı örneği verilecektir.

6. Taksi Düzlemde Voronoi Diyagramı

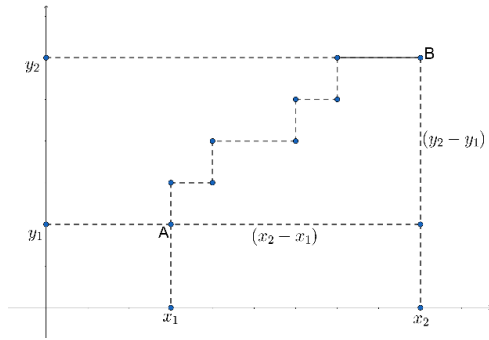
Taksi düzlemde noktalar, doğrular ve açı ölçülmesi Öklidyen düzlemdeki ile aynıdır. Taksi düzlem geometri kenar – açı – kenar özelliğini sağlamadığından Öklidyen olmayan bir geometridir. Dolayısıyla uzaklık fonksiyonları bu iki geometriyi birbirinden ayırır. Düzlemde verilen $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktaları için A ve B noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

iken A ve B noktaları arasındaki taksi uzaklık

$$d_T(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

şeklinde tanımlıdır.

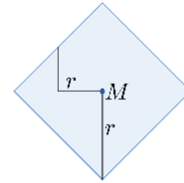


7. Taksi çemberi

Taksi düzlemde bulunan sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yeri taksi çemberi olarak adlandırılır. Taksi düzlemindeki sabit nokta taksi çemberinin merkezini, sabit taksi uzaklığı da taksi çemberinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı r olan taksi çemberi

$C = \{(x, y) : |x - a| + |y - b| = r \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlıdır.



8. Taksi Düzlemde Doğuların Sınıflandırılması

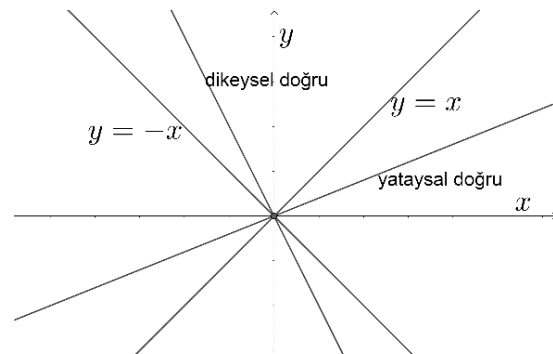
Taksi düzlemde $l: ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna,

i-) $\left| \frac{a}{b} \right| > 1$ ise dikeysel doğru,

ii-) $\left| \frac{a}{b} \right| < 1$ ise yataysal doğru,

iii-) $\left| \frac{a}{b} \right| = 1$ ise ayıraç doğru

adı verilir.



9. Taksi Düzlemde Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı

Taksi düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna uzaklığı, P nin l doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır.

Bu uzaklık $d_T(P,l) = \min_{X \in l} \{d_T(X,P)\}$ şeklindedir.

10. Taksi Düzlemde En Kısa Uzaklık Kümesi

Taksi düzlemde herhangi A ve B noktaları için

$$d_T(A,B) = d_T(A,X) + d_T(X,B)$$

özelliğindeki tüm X noktalarının kümesine en kısa uzaklık kümesi denir.

11. Taksi Düzlemde Orta Küme

Taksi düzlemde herhangi A ve B noktalarına eşit taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yerine A ve B noktalarının orta kümesi denir.

Bu küme

$$\{P = (x, y) : d_T(P, A) = d_T(P, B), x, y \in R\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu bölümde taksi düzleminde taksi parabolleri ve taksi orta kümeleri kullanılarak bir taksi Voronoi diyagramı örneği verilecektir.

Örnek: Taksi düzlemde odak noktaları

$A=(0,4)$, $B=(-4,0)$ ve $C = (4,0)$ ve doğrultmanı $y = -2$ olan taksi parabollerinin denklemleri belirlenerek taksi parabolleri çizilir ve kıyı çizgisi oluşturularak taksi Voronoi diyagramı oluşturulur. Bunun için;

1) Odak noktası $A = (0,4)$ ve doğrultmanı

$y = -2$ olan taksi parabol denklemi

$$|x|+|y-4|=|y+2|$$

dir. Bu denklemin çözümünden

$x \geq 0$ ve $y \geq 4$ için $x = 6$ doğru parçası,

$x \geq 0$ ve $0 \leq y \leq 4$ için $x-2y = -2$ doğru parçası,

$x \leq 0$ ve $y \geq 4$ için $x = -6$ doğru parçası,

$x \leq 0$ ve $0 \leq y \leq 4$ için $-x-2y = -2$ doğru parçası elde edilir.

2) Odak noktası $B = (-4,0)$ ve doğrultmanı

$y = -2$ olan taksi parabol denklemi

$$|x+4|+|y|=|y+2|$$

dir. Bu denklemin çözümünden

$x \geq -4$ ve $y \geq 0$ için $x = -2$ doğru parçası,

$x \geq -4$ ve $-2 \leq y \leq 0$ için $x-2y = -2$ doğru parçası,

$x \leq -4$ ve $y \geq 0$ için $x = -6$ doğru parçası,

$x \leq -4$ ve $-2 \leq y \leq 0$ için $-x-2y = 6$ doğru parçası elde edilir.

3) Odak noktası $C = (4,0)$ ve doğrultmanı $y = -2$ olan taksi parabol denklemleri

$$|x-4|+|y|=|y+2|$$

dir. Bu denklemin çözümünden

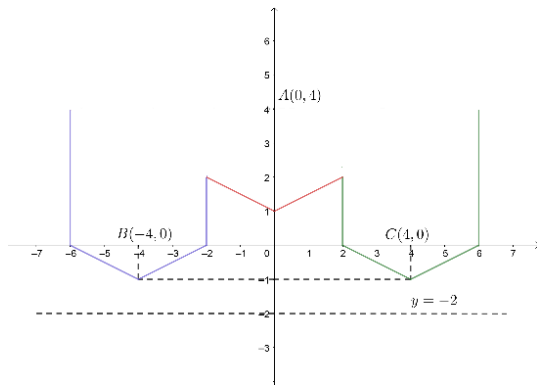
$x \geq 4$ ve $y \geq 0$ için $x = 6$ doğru parçası,

$x \geq 4$ ve $-2 \leq y \leq 0$ için $x-2y = 6$ doğru parçası

$x \leq -4$ ve $y \geq 0$ için $x = 2$ doğru parçası,

$x \leq -4$ ve $-2 \leq y \leq 0$ için $-x-2y = -2$ doğru parçası elde edilir.

Dolayısıyla bu denklemlerle oluşan taksi düzlemde odak noktaları A, B, C noktaları ve doğrultmanı $y = -2$ olan taksi parabolleri çizilip kırılma noktalarında kesişen bu taksi parabollerinin birleşimi taksi kıyı çizgisini oluşturur ve oluşan taksi kıyı çizgisi aşağıdaki gibidir.



Tarama çizgisi iki birim aşağı kaydırıldığında taksi kıyı çizgisinin ve taksi parabollerinin durumlarını incelenirse.

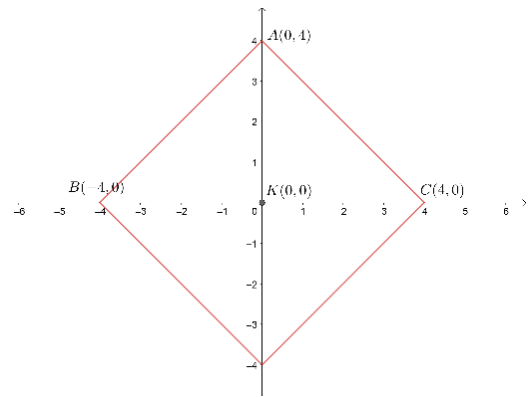
O zaman doğrultmanı $y = -4$ doğrusu olmak üzere odak noktaları

$A = (0, 4), B = (-4, 0)$ ve $C = (4, 0)$ olan taksi parabollerinin denklemleri sırasıyla,

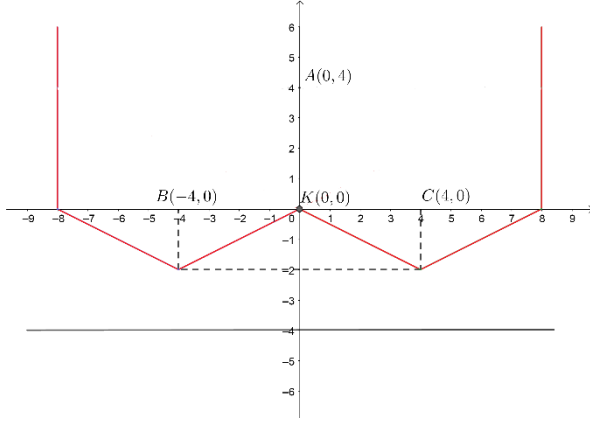
$$|x|+|y-4|=|y+4|, |x+4|+|y|=|y+4| \text{ ve}$$

$|x-4|+|y|=|y+4|$ dir. Bu denklemlerin çözümünden

$x = \pm 8, x = 0, x = \pm 2y, -x-2y = 8$ ve $x-2y=8$ doğru parçalarından oluşan taksi parabollerinin arakesit noktası $K=(0,0)$ noktasıdır. Tarama çizgisi aşağı doğru hareket ettirildiğinde kenardaki taksi parabol ortada bulunan parabol üzerine genişleyerek bir noktada kesişirler. Dolayısıyla $K=(0,0)$ kesişim noktası A, B, C noktalarından geçen taksi çemberin merkezidir ve bir taksi köşe noktasıdır.



Dolayısıyla oluşan taksi kıyı çizgisi aşağıdaki gibidir.



12. Kaynaklar

- Akça Z., Kaya R. 1997. "On the Taxicab Trigonometry", *J. of Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser.*, 10, 151-159.
- Bayar A., Ekmekçi, S. 2015. "On Complex Numbers and Taxicab Plane", *Mathematical Sciences & Applications E-Notes*, 3(1), 58-64.
- Bayar A., Kaya R. 2005. "On the Taxicab Distance on a Sphere", *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 41-51.
- Çalış C. 2019. "Taksi Düzleminde Voronoi Diyagramları Üzerine", Yüksek Lisans, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 1-60.
- Ekici C., Kocayusufoğlu İ., Akça Z. 1998. "The Norm in Taxicab Geometry", *Turkish J. Math.*, 22(3), 295-307.
- Ekmekçi, S. 2001. "Taksi Çemberleriyle İlgili Özellikler", Doktora, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 5-11.
- Fortune S. 1987. "A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams", *Algorithmica*, 2, 153-174.
- Horn, M., Weber J. 2004. "Computational Geometry Lecture Notes Voronoi Diagrams", URL: www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring12/cos423/bib/vor, 25.03.2021.
- Kaya R., Akça Z., Özcan M., Günaltılı İ. 2000. "General Equation for Taxicab Conics and Their Classification", *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 19(0), 135-148.
- Miu A. 2001. "Computational Geometry, Lecture 7: Voronoi Diagrams", nms.csail.mit.edu/~aklmiu/6.838/L7.pdf, 25.03.2021.
- Özcan M., Ekmekçi S., Bayar A. 2002. "The Taxicab Lengths under Rotations", *The Pi Mu Epsilon Journal*, 381-384.
- Özbek B. 2010. "İki ve Üç Boyutlu Cisimlerin Voronoi Diyagramlarının Çıkarılması ve Delaunay Mozaiklemeinin Gerçekleştirilmesi", Yüksek Lisans, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 1-102.
- Toma L. 2010. "Computational Geometry", *Bowdin College*, 1-112.
- Vassilev S., Eades B. 2013. "Generations of the Voronoi Diagram", *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 91-96.