

# MÜHENDİS BEYİNLER

Bilim, Mühendislik ve Teknoloji Dergisi

ISSN: 2528-9802



Sayı: 1 Cilt:1  
Yıl: 2016

**Bilimsel ve Akademik Yayınlar**

Temel Mühendislik · Tasarım · Ürün İnceleme · Projeler · Akademik Haberler

[www.muhendisbeyinler.net](http://www.muhendisbeyinler.net)

# MÜHENDİS BEYİNLER AKADEMİ

Cilt 1 / Sayı 1

## KÜNYE

### İmtiyaz Sahibi

Oğuzhan Mallı

### Genel Yayın Yönetmeni

Oğuzhan Mallı

### Yayın Koordinatörü

Furkan Gümüş

furkan.gumus@muhendisbeyinler.net

### Hukuk Danışmanı

Begüm Datlı

begum@muhendisbeyinler.net

### Editörler

Elif Yıldız

elif@muhendisbeyinler.net

Kemal Okur

kemal@muhendisbeyinler.net

### Reklam ve Pazarlama

Yalçın Yumlu

medya@muhendisbeyinler.net

### Yazılım ve Geliştirme

İbrahim Tuna

Oğuzhan Mallı

Burak Ateş

### Mail

info@muhendisbeyinler.net

## EDİTÖR NOTU

Akademik alandaki Türkçe kaynakların yetersizliği, literatürlerin içerik yönünden zayıf olması ve mühendislik uygulamalarının eksikliğinin giderilmesi amacıyla, mühendislik alanında okuyan lisans öğrencileri tarafından gönüllü olarak kurulan Mühendis Beyinler sitesi, ilgi oranının artmasıyla beraber aralarında yüksek lisans, doktora ve araştırma görevlilerinin de yer aldığı büyük bir ekip haline gelmiş bulunmaktadır.

## Dergi Politikası

Mühendis Beyinler Dergisi, ülkemizde yapılan bilimsel araştırmaları sahip olduğu sosyal medya ve haber siteleri sayesinde geniş bir okuyucu kitlesine doğrudan aktaran bilim, teknoloji ve mühendislik dergisidir. Blog sayfamızı aylık en az 30.000 kişi ziyaret etmekte olup facebook sayfamızda şu an 597 bin takipçi haber ve makaleleri okumaktadır.

*“Kelime hazineniz kadar düşünür,  
dilinizin zenginliği kadar  
olgularınızı ifade edebilirsiniz”*

## Odak ve Kapsam

Bilim, teknoloji ve tüm mühendislik alanlarında deneysel, teorik (kuramsal) veya uygulama alanlarında yapılan araştırma ve çalışma sonuçlarına ait özgün makalelerin yayımlandığı bir dergidir. Dergide yayımlanan makaleler izin alınmaksızın başka bir yerde yayımlanamaz veya bildiri olarak sunulamaz. Makalelerin bir kısmı veya tamamı dergimiz kaynak gösterilmeden kullanılamaz.

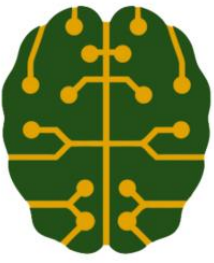
## Yayın Dili

Dergimiz Türkçe ve İngilizce dillerinde yazılmış makaleleri yayınlamaktadır.

# MÜHENDİS BEYİNLER AKADEMİ

## İçindekiler / Content

<b>Bilyalı Vida ile Aktarma Vidalarının Farkı</b> .....	<b>1</b>
Yüksek Lisans Furkan GÜMÜŞ	
<b>Nükleer Görüntüleme Sistemlerinde Kuantum Noktaların Kullanılması</b> .....	<b>6</b>
Yüksek Lisans Çağatay ÖZADA	
<b>Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Fark Denklemlerinin Rezidüel Hata Tahminiyle Çözümü için Boubaker Polinom Yaklaşımı</b> .....	<b>12</b>
Salih Yalçınbaş, Mehmet Sezer, Elif Zinnur Aykotalp	
<b>Cebirsel Friz Desenlerinin Permütasyonel Grupları Üzerine</b> .....	<b>28</b>
Uzman Mushab Bedirhan ANDIZ	



## Bilyalı Vida ile Aktarma Vidalarının Farkı

Furkan GÜMÜŞ<sup>1</sup>

Marmara University, Istanbul, Turkey, Mechanical Engineering

<sup>[1]</sup> [furkan.gumus@marun.edu.tr](mailto:furkan.gumus@marun.edu.tr)

**Özet:** Mekanik bir sistemde güç ve hareketin lineer aktarılmasında en çok kullanılan vida mekanizmaları incelenmiştir. Özellikle CNC ve 3B yazıcı yapımında sıklıkla tercih edilen makine elemanlarının arasındaki farklar, avantajları ve kullanım alanlarının daha iyi belirlenmesi için bir derleme çalışması yapılmıştır.

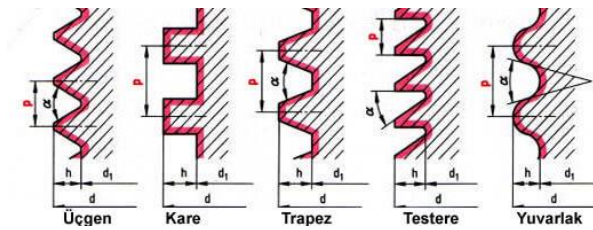
**Anahtar Kelime:** Bilyalı Vida, Aktarma Vidaları, Güç Aktarım Sistemleri, Hareket Aktarma Mekanizmaları

**Abstract:** The most commonly used screw mechanisms were examined for linear transmission of power and motion. Especially, the differences between CNC and 3D printers often preferred construction of machine elements in a compilation was conducted to further determine the advantages and uses.

**Keywords:** Ball Screw, lead screws, Powertrain, Transmission Mechanisms of Motion

### GİRİŞ

Üretici firmalar vida mekanizmalarını mil çapına göre fiyatlandırdığından bir proje için olabildiğince küçük çaplı ama işlevsel olarak en uygun vida türünü almak istersiniz. Ayrıca vida mekanizmasının veriminin fazla olması sayesinde daha düşük torklu yani daha ucuz motor seçmenize olanak verir. Kaplin ve yatakları da hesaba kattığımızda maliyet açısından önemli bir tablo ortaya çıkmaktadır.



Şekil 1 Vida Profilleri

Vida mekanizmaları, tespit cıvatalarına (metrik vidalara) göre daha çok aşınma tehlikesine maruz kalacakları için sivri uçlu üçgen diş profili yerine daha az sürtünme gösterecek Trapez vida tercih edilir. Kirlilik tehlikesinin çok olduğu yerlerde ise yuvarlak vida seçilir [1].

Hareket cıvataları veya vida mekanizmaları, genelde dönme hareketinin vida eksenini yönünde öteleme hareketine çevrilmesinde kullanılır. Çoğu zaman öteleme hareketinden de (pres, vana, mengene, krik) gibi düzeneklerde) bir kuvvet elde etmek için

yararlanılır [1]. Bu mekanizmalar kendi içinde diş geometrisine göre adlandırılmaktadır.



Bilyalı Vida



Aktarma Vidası - Trapez

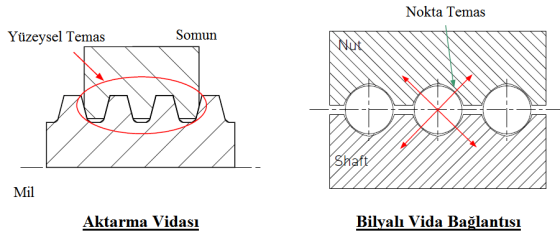
Şekil 2 Bilyalı ve Aktarma Vidası

### 1. AKTARMA VİDALARI – LEAD SCREW

Aktarma vidaları, güç vidası [2] veya hareket vidası [3] olarak da bilinmektedir. Bu vidalar, bir makinede yer alan mevcut dönme hareketini doğrusal (lineer) harekete dönüştürülmesini sağlar.

Diğer bağlantı türleri ile kıyaslandığında, somun ve vida arasındaki dişlerde temas alanı geniş olduğundan sürtünme çok fazla olmaktadır. Bu da daha fazla enerji kaybına yani daha güçlü motor seçmemize neden olur. Bu yüzden genel olarak çok büyük güçlerin taşınması için kullanılmazlar.





Şekil 3 Vida Bağlantısı

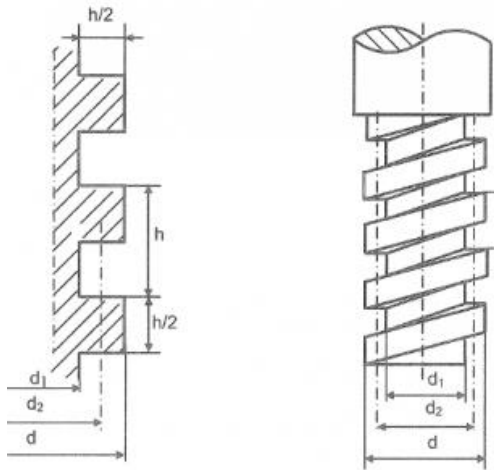
Daha çok düşük güç uygulamalarında, aralıklı kullanımlar ile çalıştırma veya mekanizmalarda pozisyoner olarak kullanılmasında tercih edilir. Yaygın uygulama alanları; lineer aktüatörler, araçların kaydırılması (örneğin takım tezgâhlarındaki arabanın hareketi gibi), mengene, presler ve krikolar örnek olarak verilebilir. [4]

### 1.1. Aktarma Vidası Çeşitleri

Güç vidaları, kendi diş geometrisine göre sınıflandırılır. Diş açılarının farklı olması değişken sürtünme kuvvetlerinin olmasına sebep olur. Aktarma vidaları, sürtünmesi en az olacak şekilde tasarlanır [5]. Diş açılarına göre en çok kullanılan 3 çeşit aktarma vidası ise şöyledir:

#### 1.1.1. Kare Dişli Vida

Kare dişler, sahip olduğu kare geometrisi ile adını taşır. En yüksek verime ve en düşük sürtünmeye sahip olduğundan sık sık yüksek güç taşıyan uygulamalarda kullanılan vida türüdür. Kuvvet ve hareket iletiminde kullanılır. Diğer türleri gibi belli bir standardı olmadığı için özel üretilir ve bu nedenle çok daha pahalı olmaktadır.



Şekil 4 Kare Vida

#### 1.1.2. Trapezoidal Dişli Vida

Tepe açısı  $30^\circ$  olan yamuk bir profil vardır. Genellikle hareket vidası olarak kullanılır. Çoğunlukla tek yönden gelen yük kuvvetinin olduğu uygulamalarda kullanılır [6]. Bu tür uygulamalarda en az kare dişli vidalar kadar verimli olmakla birlikte üretimleri çok daha kolaydır. Trapez vidalar, hareket iletimi maksadıyla ana millerinde, sonsuz vidalarda ve pres millerinde kullanılırlar [7]



Şekil 5 Trapezoidal Vida

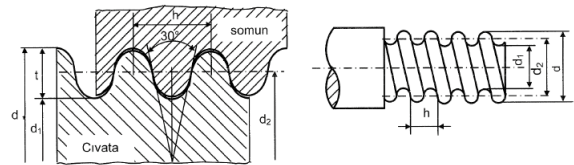
#### Standart Gösterimi

Örnek: Tr 30×6 (Nominal çap x adım)

#### 1.1.3. Yuvarlak Dişli Vida

Toz toprak gibi zararlı etkilere maruz ve sık sık sökülüp takılan uygulamalarda kullanılır. Tepe açısı  $30^\circ$  olan yuvarlak vidalardır. [8]

Keskin kenarlı olmadıklarından gereksiz maddeler, toz, kum ve pastan daha az zarar görür. Bu nedenle kirli su vanalarında, düzgünlük gerekmeyen ampullerde ve gerci plastik veya cam gibi kırılma tehlikesi olan yerlerde kullanılır. [9]



Şekil 6 Yuvarlak Dişli Vida

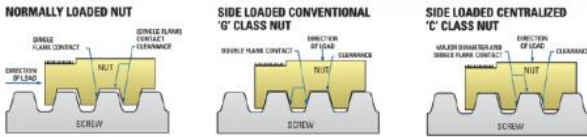
#### Standart Gösterimi

Örnek: Yv 60×1/6" (Nominal çap x 1"deki diş sayısı)

## 2. Neden Aktarma Vidası Tercih Etmeliyim?

Aktarma vidaları, derin helis dişleri olan ve genellikle polimer kompozit veya bronz somundan oluşan lineer aktarma mekanizmasıdır. Bilyalı vida veya aktarma vidaların kullanımına karar vermeden önce yapacağımız özel uygulama için ihtiyacınızı karşılayacak karakteristikleri anlamamız gereklidir. Bu konuda çoğunlukla; taşınacak yük miktarı, hassasiyet, doğruluk gibi özelliklerin belirlenmesi ile aktarma vidası mı yoksa bilyalı vida mı kullanmamız gerekli, bunu tespit etmeye çalışacağız.

Öne çıkan profiller kare, trapez ve yuvarlak vida ancak bunlardan sadece trapez ve yuvarlak vida standartlaşmış durumdadır. Eğer özel üretim yaptıracak bir atölye bulursanız kare profil seçimi yapmanızda pek mümkündür. Piyasa şartlarında en kolay bulabileceğiniz ürün ise trapez vida olarak karşımıza çıkmaktadır.

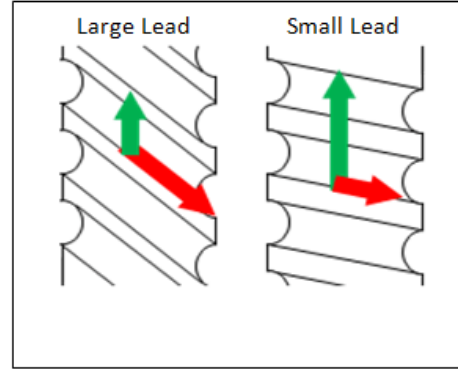


Şekil 7 Aktarma Vidası

Aktarma vidalar içerisinde Trapez vidayı seçtiğimizde bilyalı vidaya göre oluşacak farkı aşağıdaki gibi olacaktır.

### Avantajları

- Düşük Maliyetlidir
- Büyük yük taşıma kapasitesi vardır
- Herhangi bir frenleme sistemi olmaksızın kendini kitleyebilir (otoblokaj)
- Dikey uygulamalar için en iyi çözümü sağlar
- Bazı aktarma vidalarında yağlama gerekmez
- Üretimleri kolaydır
- Pürüzsüz, az bakım gerektirir ve sessiz çalışır
- Hız, doğruluk, hassasiyet ve rijitlik gerektiren basit taşıma uygulamalarda daha uygun bir seçenektir.



Şekil 8 Otoblokaj

Otoblokaj yani kendiliğinden çözülme özelliği güvenlik için çok önemlidir. Örneğin büyük bir pres makinesinde tabla üst noktaya çıktığında kendiliğinden aşağı çözülerek inmesini istemeyiz veya kriko ile kaldırılan bir aracın üst noktadayken birden aşağı düşmesi istenmeyecek bir durumdur.

### Dezavantajları

- Genellikle çok daha az verimlidir. Bu yüzden bilyalı vidaya göre kıyaslandığında daha fazla tork ihtiyacı yani daha büyük motor ve sürücüsü gerekebilir!
- Düşük verimleri nedeniyle sürekli güç iletiminde kullanılmaz. Bunun anlamı, dişler üzerindeki kuvvetler sürtünmeleri arttıracak için gücü iletmeye daha güçlü motor seçmeniz gerekecek demektir.
- Dişler arasında daha büyük sürtünmeler meydana geldiği için vidanın işletme anındaki sıcaklığı daha yüksek olmaktadır.
- Çoğu aktarma vidaları büyük değerlerde ve yüksek hızlı, sürekli veya çok uzun çevrim süresi olan uygulamalar için uygun değildir.
- Bilyalı vidalara göre daha fazla değiştirilmesi gerekmektedir.

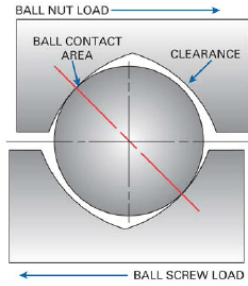
## 3. Bilyalı Vidalara Genel Bakış

Yarı dairesel helis oyuklara sahip bir vida ve bununla eşleşen bilyalı rulmanın (somun) oluşturduğu taşıma sistemidir. Aynı aktarma vidalarında olduğu gibi bilyalı vidalarda dairesel taşıma hareketini lineer harekete çeviren mekanik bir aktuatördür, ancak en büyük farkı daha az sürtünme ile bunu yapabmesidir.



Şekil 9 Bilyalı Vida

Daha az sürtünme, daha çok verim yani daha küçük motor seçimleri anlamına gelmektedir. Kullandığımız projede eğer motor maliyeti çok yüksek oluyorsa bakmanız gereken önemli bir unsur haline geliyor. Ayrıca diğer başka mekaniksel üstünlükleri de projelerde kullanım amacına göre değişiklik gösterebilir.



Şekil 10 Bilyalı Vida Kesiti

Bilyalı vidalar, aktarma vidalarındaki yuvarlak diş profiline benzeyen bir yapısı vardır ancak somun ile vida dişleri arasında bilyalar yer almaktadır. Aktarma vidasında diş yüzeyleri temas ettiği için sürtünme daha fazla olurken bilyalı vidalarda bilyalar dişlere nokta teması halindedir. Bu yüzden daha az sürtünme ile çalışırlar.

#### Avantajları

- Daha verimlidir, yani daha az tork ihtiyacı olduğu için daha küçük motor veya daha ucuz sürücü seçme imkânı sağlar. Tipik bir bilyalı vida verimi %90 civarında olup bu oran eşit boyutlu bir trapez vidada %20-25 olarak kalmaktadır.
- En büyük avantajı, çok yakın tolerans değerlerinde yapıldıkları için hassasiyetin gerekli olduğu durumlarda kullanılması daha uygun olmasıdır.
- Daha az sürtünme olduğu için aktarma vidasına göre daha soğuk işletme sıcaklığında olur.
- Aktarma vidasına göre daha az değiştirilme ihtiyacı duyar.
- Somun ve vida arasındaki sürtünmeler en az olduğu için kullanım ömürleri daha fazladır.

- Bilyalı vidalar büyük değerlerde, yüksek hızlı uygulamalarda veya sürekli ve uzun çevrim süreli uygulamalar için idealdir.



Şekil 11 Bilyalı Vida Kesiti

#### Dezavantajları

- Aktarma vidalarına göre önemli ölçüde pahalıdır
- Diş açısına bağlı olarak, sürtünmeler de çok az olduğu için otoblokaj yoktur.
- Kendiliğinden çözülmeyi engellemek için ek bir frenleme mekanizmasına gerek duyar
- Dikey uygulamalar için güvenli işletme ortamının olması lazımdır.
- Çalışma boyunca önemli ölçüde gürültü yaratır
- Uzun ömürlü olması için yağlama veya gres gerektirir. [10]

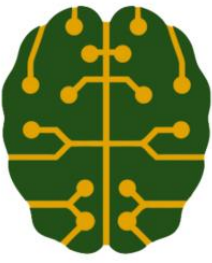
#### 4. Sonuç

Bugünün hareket odaklı otomasyon sistemlerinde çok fazla kullanılan lineer hareketli kontrollere, aktarma vidaları veya bilyalı vidaların verimine bağlıdır. Aktarma vidaları, genellikle bilyalı vidaların daha ucuz alternatifi olarak görülüyor olmasına rağmen hangi tip vidanın kullanılacağına karar verilirken maliyete odaklandığımızda işler çok daha karmaşık oluyor. İki vida arasında maliyet açısından büyük bir fark olmaktadır. Aktarma vida ve bilyalı vida arasındaki temel fark, bir bilyalı vida somunu ile vida arasındaki sürtünmeyi en aza indirmek için bilyalı rulmanın kullanılıyor olmasıdır. Aktarma vidalarında ise bu yoktur. Bilyalı vidalar için aktarma vidalarının rulmanlı somun kullanılmış hali olarak değerlendirilebilirsiniz.

**Kaynak**

- [1] Makine Elemanları ve Konstrüksiyon Örnekleri, Fatih C. Babalık, syf. 230, 3.Baskı
- [2] Ball&Lead Screws, <http://www.thomsonbsa.com/> (06.01.2017)
- [3] Bhandari, V. B. (2007), Design of Machine Elements, Tata McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-061141-2 Sayfa 202.
- [4] Shigley, Joseph E.; Mischke, Charles R.; Budynas, Richard Gordon (2003), Mechanical Engineering Design (7th ed.), McGraw Hill, ISBN 978-0-07-252036-1, Sayfa 400.
- [5] Bhandari, V. B. (2007), Design of Machine Elements, Tata McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-061141-2 Sayfa 203.
- [6] Bhandari, V. B. (2007), Design of Machine Elements, Tata McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-061141-2 Sayfa 204.
- [7] Standart Makine Elemanları, MEGEP, 2012
- [8] Cıvata-Somun Bağlantıları, Prof.Dr. İrfan Kaymaz
- [9] Sökülebilen Birleştirme Elemanları, MEGEP, 2006
- [10] Lead Screws vs. Ball Screw, Helix Linear Technologies, [goo.gl/lIsFuw](http://goo.gl/lIsFuw) (09.01.2017)





# Nükleer Görüntüleme Sistemlerinde Kuantum Noktaların Kullanılması

Çağatay ÖZADA<sup>1</sup>

Ege University, Izmir, Turkey

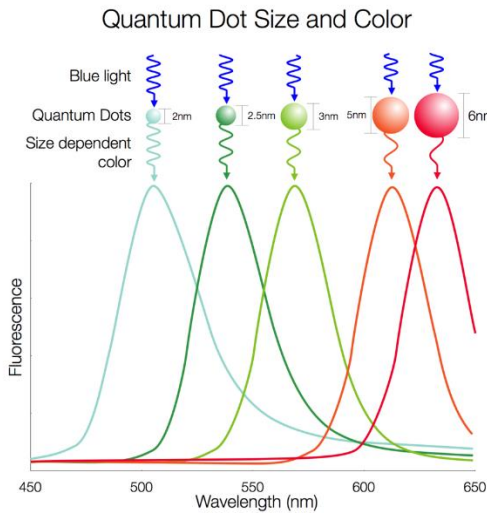
<sup>[1]</sup>[cagatayozada@outlook.com.tr](mailto:cagatayozada@outlook.com.tr)

**Özet:** Kuantum noktalar nano biyoteknoloji alanında son yıllarda ilgiyle araştırması yapılmaktadır. Kuantum noktalar, her üç boyutta da sınırlı uyarılmış nükleonlar ile bir yarı iletkenidir. Kuantum noktalar biyolojik ve tıbbi analiz ve araştırma çalışmalarında kullanılmakta olan geleneksel boyaaların yerini almaktadır. Bu sayede gerçek zamanda tek hücre göçünün in vitro görüntülenmesi için kullanılmaktadır. Kuantum noktaların birçok ürünü ticarileşmiş (özellikle nano problemler gibi) ve bu ürünlerin çeşitli tedavilerde kullanılması umut vericidir. Bu makale de nükleer görüntülenme sistemlerinde kuantum noktaların önemi, avantajları ve yapılan çalışmalar ele alınmaktadır.

**Anahtar Kelime:** Kuantum Noktalar, Nanoteknoloji, Biyoteknoloji, Medikal Görüntüleme, Nanoproblemler.

## 1. GİRİŞ

Yarı kristal nano partiküller ya da bilenen ismiyle kuantum noktalar cam matrislerde ve Louis E. Brus tarafından yapılan koloidal çözeltileri çalışmaları sırasında Alexie Ekimov tarafından 1980'li yıllarda keşfedilmiştir. [1. Review: Quantum Dots and Application in Medical Science].



**Şekil 1** Kuantum noktaların boyutlarının renk ışınması

Nano yapıdaki malzemeler genel olarak 100 nm altında ki boyutlarda kuantum mekaniğinin özelliklerini göstermeye başlamaktadır. Bu sayede farklı optik ve elektronik özellikler, ayarlanabilir boyutları ile ışık emisyonu, yüksek sinyal parlaklığı, uzun süreli foto

kararlılık özelliklerini barındırmaktadır. Hemen hemen bütün yarı-iletken metal bileşiklerinden kuantum noktaların elde edilmesinin yanı sıra en çok kullanılan kuantum noktalar: CdSe, InAs, CdS, CdTe, ZnS, PbSe'dir. Kuantum noktaların en önemli özelliği olan boyut kontrolü bize bir renk skalası sunmaktadır. En küçük noktalar mavi ışınması ve en büyük noktaların kırmızı ışınması yapılması sağlanarak güneş enerjisi, LED teknolojisi ve medikal görüntüleme de kullanılmaktadır.

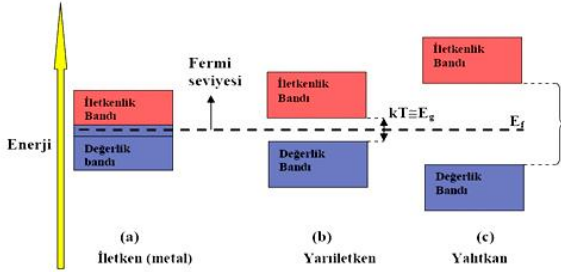
## 2. Kuantum noktaların Mekaniği

Kuantum noktalar bugün tıp alanında önemli çalışmalarda kullanılmaktadır. Özellikle kanser araştırmalarında, tümörün tanı ve tedavisi için çok sık kullanılır. Gerek optik özellikleri sayesinde yaptığı ışınması sayesinde, gerek manyetik özelliklerinin verdiği avantajlarla yeni umutlar açmaktadır. Kuantum noktaların mekaniğini ve renk ışınmasını nasıl yaptığını anlamak gereklidir.

100 nm altındaki parçacıklar klasik fizik kurallarına dışına çıkıp, kuantum mekaniğinin bir parçasıdır. Kuantum noktalarda mekanizmanın nasıl olduğunu anlamak için önce iletkenlik bandı kavramını hatırlamamız gerekmektedir.

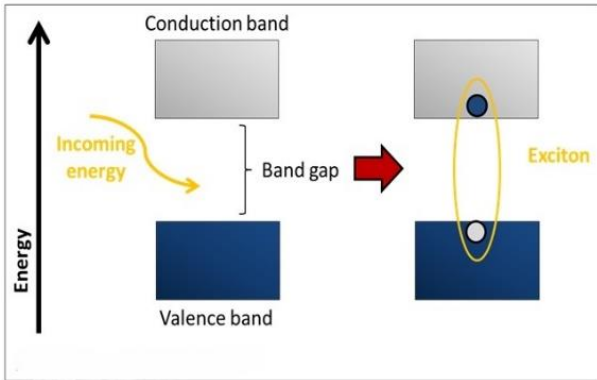
Bir malzemenin iletken, yarı iletken ve yalıtkan olduğunu anlamak için valans elektron bandı ve iletkenlik bandı arasında kalan mesafeyi incelemek

gerekmektedir. Bir malzemenin iletken olması için valans elektronunun bulunduğu valans bandı ile iletkenliğe geçmesi için gereken iletkenlik bandı arasında mesafenin çok küçük olması gerekmez.



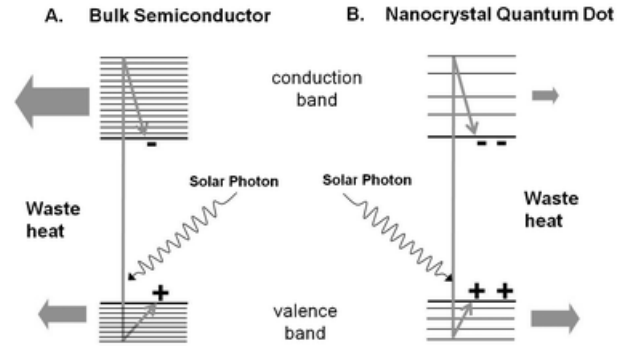
Şekil 2 İletkenlik kavramı

Kuantum noktalar yarı iletken malzemelerdir. Bu anlamda elektron geçişi dış etkenler tarafından uyarılması ile sağlanabilmektedir. Kuantum noktaların özellikleri elektronların uyarılması sonucu ortaya çıkmaktadır. Malzeme de uyarılmış atom ve boşluk mesafesine eksiton bohr yarıçapı, elektron-boşluk çiftine ise eksiton denilmektedir. Bulk malzemelerde kristalin boyutu eksiton bohr yarıçapından büyüktür. Bu da eksiton için yeterli mesafeyi sağlamaktadır.



Şekil 3 Eksiton gösterimi

Ancak kristalin daha küçük olduğu durumda, enerji seviyeleri artık sürekli davranmamaktadır. Enerji seviyeleri aralarında ki boşluk açılmaktadır bu da kuantum sınırlandırılması olarak adlandırılmaktadır. Sıkışan elektron üst seviye çıkamayıp enerjisini harcayamadığı için kinetik enerjisi artmaktadır. Bunun sonucunda dalga boyunu kısaltır ve elektronun yaptığı ışınma değişir. Yani malzemeyi exciton bohr yarıçapının altına indirdiğimizde kuantum özelliği olan renk değişimini gözlemleriz. Bunu da şekil 4 de görmekteyiz.



Şekil 4 Kuantum noktalarda enerji bantları

Kuantum noktaların renk ışımasını nasıl gerçekleştirdiğini bu mekaniğe anlamaktayız. Kuantum noktaların nükleer görüntüleme sistemlerinde bu yararlarından faydalanarak kullanılması incelenecektir.

## Nükleer Görüntüleme Sistemleri

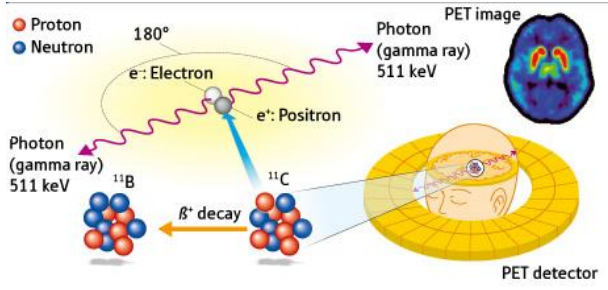
Hastalıkların tanı ve tedavisinde radyonüklitler yardımıyla yapılan görüntüleme işlemleridir. Kullanılan radyonüklit ve görüntülenecek organ, uzuv ya da dokuya göre değişik yöntemler arz etmektedir. Nükleer görüntüleme sistemlerinde kullanılan bazı kavramların üzerinde durmak gerekir. Radyasyon, stabil olmayan çekirdeğin çeşitli bozunmalar sonucu dışarıya yaydığı elektromanyetik dalgalardır. Çekirdekte ki nötronlar, alfa, beta ve gama ışınları yaymaktadır. Alfa, beta ve gama ışınlarının özellikleri ve etkileşimleri Tablo 1 de verilmektedir.

Tablo 1 Radyasyon Çeşitleri

Radyasyon Tipi	Radyasyon Oluşumu	Menzili	Birim Mesafede etki	Yıyonlaşma etkisi
Alfa	Parçalanmada çıkan helyum	Kısa	Çok fazla	Fazla
Beta	Bir elektron ve pozitron	Alfadan büyük	Alfadan küçük	Alfadan düşük
Gama	Işık gibi fotonlardan oluşur	Çok uzun	Çok az	Yapmazlar

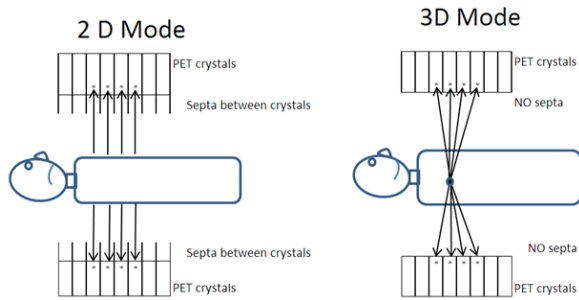
## PET (Pozitron Emission Tomography)

PET, radyofarmasötikler ile işaretmiş ilaçlar aracılığıyla vücudun metabolik fonksiyonlarını görüntülemek için kullanılan bir yöntemdir. PET görüntüleme de pozitron yani artı yüklü beta radyasyonu yayan radyonüklitler kullanılmaktadır. 511 keV'lik anihilasyon (yok olma olayı) enerjisine sahip F-18, C-11, N-13, I-124 radyonüklitleri kullanılmaktadır.



Şekil 5 PET görüntüleme

Anihilasyon fotonları çarpışıp, birbirlerine zıt 180°'lik doğrultuda saçılmaktadır. PET sistemlerinde tünel etrafında dizilmiş değişken sayıda ki dedektörler sayesinde bu fotonlar eş zamanlı olarak algılanmaktadır. Bilgisayar dedektörden aldığı anihilasyon fotonları ile bir matris oluşturmakta ve böyle 2 ya da 3 boyutlu görüntü sağlamaktadır. Eğer aynı düzlemdeki dedektördeki sayımlar alınmışsa 2 boyutlu, farklı yerlerde bulunan halkalardaki karşılıklı dedektör sayımları dikkate alındıysa 3 boyutlu görüntü sağlamaktadır.



Şekil 6 PET 2D ve 3D görüntü oluşumu

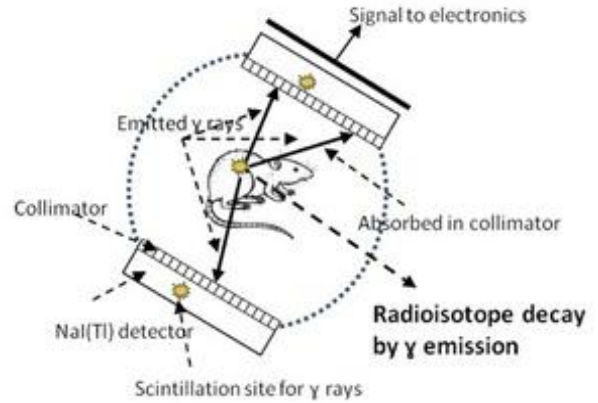
PET yönteminin uygulama alanları: [23]

- Kanser görüntüleme
- Vücutta kanserin yayılması
- Kanser gibi tedavi planının etkinliğini değerlendirmek
- Kalp kasına giden kan akışını
- Kalp bölgelerinde kalp krizinin veya miyokard enfarktüsü etkilerini
- Normal insan beyni ve kalp fonksiyonunu haritalandırılması
- Tümörler, hafıza bozuklukları, nöbetler ve diğer merkezi sinir sistemi bozuklukları gibi beyin anormalliklerini değerlendirebilir.

### SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography)

Tek foton emisyon tomografisi, gama ışınını yapan radyonüklidlerin kullanılıp gama kameralar ile

deteksiyonun sağlanmasıyla yapılan bir yöntemdir.



Şekil 7 SPECT

SPECT görüntüleme için en çok kullanılan radyonüklid jeneratörden elde edilen Tc-99m'dur. 126 ile 154 keV anihilasyon enerjisine sahiptir.

Sürekli dönen gama kameralar saçılan gama radyasyonu algılayarak bunu bilgisayar ortamında bir matrise aktarmaktadır. Matematiksel ifade edilip çeşitli algoritmalar sayesinde 3 boyutlu görüntü elde edilmesi sağlanmaktadır.

Uygulama alanları:

- Miyokard perfüzyon görüntüleme
- Fonksiyonel beyin görüntüleme
- Kemik görüntüleme
- Nöroendokrin veya nörolojik tümör taraması

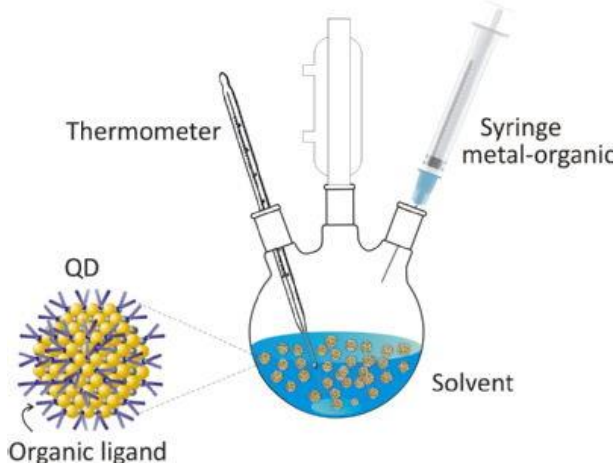
### 3. Kuantum Noktaların Sentezlenmesi

Kuantum noktalar çeşitli yöntemlerle sentezlenmektedir. Kuantum noktalar sentezlenirken en dikkat edilmesi gereken nokta kuantum noktaların boyutu ve dağılımıdır. Kuantum noktaların boyutu çözeltinin miktarı, kullanılan metal prekürsür miktarı ve çözgen miktarı, sıcaklık ve pH önemli parametreleri oluşturmaktadır. Üretim yöntemleri: [6]

- Koloidal Sentez
- Plasma sentez
- Fabrikasyon
- Viral birleşme
- Elektrokimyasal birleşme
- Bulk üretim
- Ağır metallsiz üretim

### 3.1 Koloidal Sentez

Kolay ve basit bir üretim yöntemidir. Laboratuvar koşullarında gerçekleşmesi pratiktir. Daha az toksik olduğu kabul edilmektedir. Üç ana bileşeni bulunmaktadır: prekürsörler, organik yüzey etkin maddeleri ve çözücüler.



Şekil 8 Koloidal Sentez

### 3.2 Fabrikasyon

Bu yöntem temelde nanoteknoloji üretimini oluşturmaktadır. İki yaklaşım vardır. Aşağıdan-yukarı ve yukarıdan-aşağıya olmak üzere. Yukarıdan-aşağıya yöntemde litografi ve aşındırma işlemleri uygulanarak büyük parçacıklardan daha küçük parçacıkların eldesi sağlanmaktadır. İkinci yaklaşım aşağıdan-yukarıya ise kendiliğinden oluşan yaklaşım olarak bilinmektedir. Şekil de görülen bir yukarıdan-aşağıya yöntemdir.

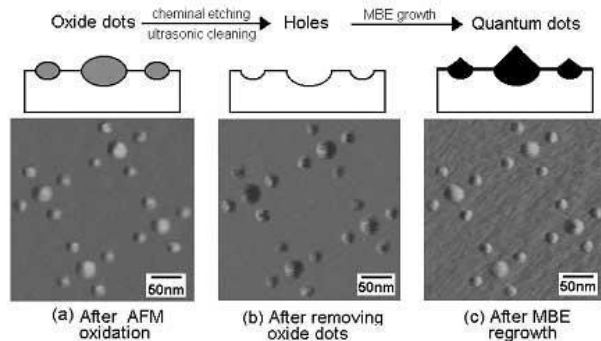


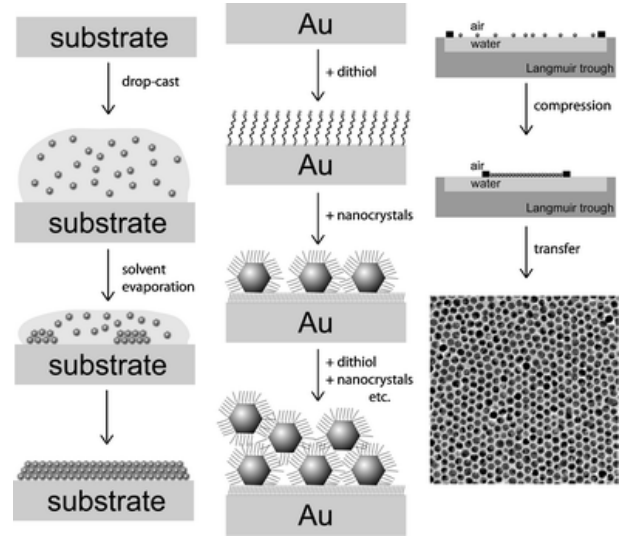
FIG. 1 Quantum dot fabrication processes and array of fabricated quantum dots

Şekil 9 Fabrikasyon

### 3.3 Elektrokimyasal Birleşme

Bu yöntemle düzenli kuantum noktalar kendiliğinden oluşabilir. Elektrolit-metal ara yüzünde iyonik

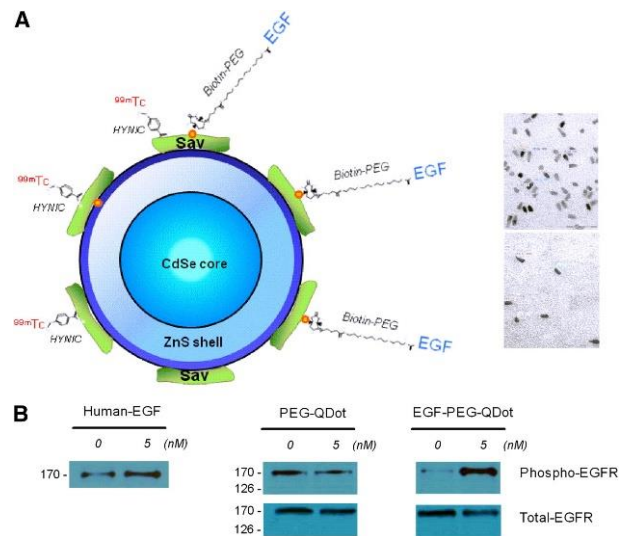
reaksiyonla sonuçlanan bir şablon yaratılır. Nano yapıların metal üzerinde kendiliğinden oluşmasıyla sonuçlanır.



Şekil 10 Elektrokimyasal birleşme

### 4. Kuantum Noktaların Uygulanması

Kuantum noktalar, kanser araştırma çalışmalarında önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda görüntüleme ve tedavi için kuantum noktaların kullanımı artmıştır. Kuantum noktalar sentezlendikleri halleriyle insan ya da hayvan çalışmalarında kullanılmaya uygun değildir. Bu nedenden ötürü sentezlenen kuantum noktaların yüzey modifikasyonları yapılmalı, toksik etkisinin ölçülmeli ve hedef moleküllere bağlanması hedeflenmelidir. İnsan vücuduna uyumlu çeşitli enkapsülasyon çalışmaları sayesinde toksik etki azalmaktadır.



Şekil 11 Kuantum noktaların yüzey modifikasyonu



*Gopee NV* ve ark. Yapmış olduğu çalışmada peligasyon yapılmış CdSe kuantum noktaları sentezlenmiştir. Polietilen glikol (PEG) sentezlenen kuantum noktaları toksik etkiyi azaltmakta ve diğer moleküllerle etkileşimi sağlamaktadır. Farelerin sağ dorsal kanadı, ICP-MS ile biyolojik dağılımı izlenmiştir. Nanoparçacıkların bağışıklık tepkisine karışan organlara spesifik olmayan birikiminin belirlenmesi sağlanmıştır. [17]

Nükleer görüntüleme sistemlerinde kuantum noktaların kullanımı, sentezlenmiş kuantum noktaların radyonüklid ile işaretlenmesi ve hedefe gönderilmesi esasına dayanmaktadır. Hao-Wen Kao ve ark. Yaptıkları çalışmada bilgisayarlı tomografi ajanı olan altın nanoparçacıkları sentezlemişlerdir. Epidermal büyüme faktör antikolarla konjuge edilmiş ve I-131 ile işaretleme yapmışlardır. A549 insan akciğer hücreleri hedeflenmiştir. [18]

## 5. Sonuç

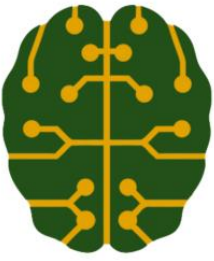
Bugün kanserin erken tanı ve tedavisi önem arz etmektedir. Özellikle invaziv yöntemlerin dışında invaziv olmayan yöntemler tercih edilmektedir. Hastalıkların, doku ve organ fonksiyonlarında ki aksaklıkların tanısı için kuantum noktaların kullanımı artmaktadır. Radyonüklid ve hedeflenecek bozukluğa spesifik ajanlar sayesinde görüntüleme ve tedavi süreci oluşmaktadır. Gelecekte ilaç taşıma sistemlerinde ve kanserin tedavisinde kullanımı ve yapılacak çalışmalar artacaktır.

## Kaynak

2016. [Çevrimiçi] 24 12 2016. [http://www.med.lu.se/var/plain/storage/images/media/images/bilder\\_bioimaging\\_center/principle\\_of\\_spect/447444-1-eng-GB/principle\\_of\\_spect\\_large.jpg](http://www.med.lu.se/var/plain/storage/images/media/images/bilder_bioimaging_center/principle_of_spect/447444-1-eng-GB/principle_of_spect_large.jpg).
2016. [Çevrimiçi] 24 12 2016. <http://image.slidesharecdn.com/1-160409221620/95/spect-with-clinical-application-5-638.jpg?cb=1460241484>.
2016. [Çevrimiçi] 24 12 2016. <http://www.intechopen.com/source/html/45883/media/image4.png>.
2016. [Çevrimiçi] 24 12 2016. <https://tonygood4.files.wordpress.com/2012/11/pos1.png>.
2016. [Çevrimiçi] 2016. <http://jnm.snmjournals.org/content/52/9/1457/F1.large.jpg>.
2016. Wikipedi. [Çevrimiçi] 2016. [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum\\_dot](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dot).
- Bahar Guler, Bilal Demir, Emine Guler, Kadri Gulec, Ozan Yesiltepe, Dilek Odaci Demirkol and Suna Timur. 2016. Targeting and imaging of cancer cells using nanomaterials. *Nanobiomaterials in Medical Imaging*. 2016.
- BAŞAK, Neşe. 2010. SCHIFF BAZI BAKIR-MANGAN KOMPLEKSİNİN PROSTAT KANSERLİ HÜCRE HATLARINDA SİTOTOKSİTESİNİN BELİRLENMESİ. basım yeri bilinmiyor : SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ, 2010.
- Biological applications of quantum dots. Timothy Jamiesona, Raheleh Bakhshia, Daniela Petrovaa, Rachael Pockocka, Mo Imanib, Alexander M. Seifaliana,. 2007. 2007, *Biomaterials*, s. 4717-4732.
- Biyolojik Ölçümler ve Nanopartiküller. Portakal, Oytun. 2008. 2008, *Türk Biyokimya Dergisi*, s. 35-38.
2016. Cancer.net. [Çevrimiçi] 24 12 2016. <http://www.cancer.net/navigating-cancer-care/diagnosing-cancer/tests-and-procedures/positron-emission-tomography-and-computed-tomography-pet-ct-scans>.
- DURMUŞOĞLU, Emek Göksu. Kuantum Noktalar. basım yeri bilinmiyor : TMMOB Metalurji Mühendisleri Odası.
- Evaluation of EGFR-targeted radioimmuno-gold-nanoparticles as a theranostic agent in a tumor animal model. Hao-Wen Kao , Yi-Yu Lin , Chao-Cheng Chen, Kwan-Hwa Chi, Der-Chi Tien, Chien-Chung Hsia. 2013. 2013, *Bioorganic & Medicinal Chemistry Letters*, s. 3180-3185.
- KANSERİN TEŞHİS VE TEDAVİSİNDE NANOTEKNOLOJİNİN ÖNEMİ. TEKİN, Ömer OYLAR İsmail. 2011. 2011, *Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*.
2016. NCBI. [Çevrimiçi] 24 12 2016. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1126321/>.



16. Positron Emission Tomography - Computed Tomography (PET/CT). RadiologyInfo.org. [Çevrimiçi]  
<http://www.radiologyinfo.org/en/info.cfm?pg=pet>.
17. Quantitative determination of skin penetration of PEG-coated CdSe quantum dots in dermabraded but not intact SKH-1 hairless mouse skin. Gopee NV, Roberts DW, Webb P, Cozart CR, Siitonen PH, Latendresse JR, Warbitton AR, Yu WW, Colvin VL, Walker NJ, Howard PC. 2011. 2011.
18. Quantum dots hold promise for early cancer imaging and detection. Pericles Pericleous, Maria Gazouli, Anna Lyberopoulou, Spyros Rizos, Nikolaos Nikiteas and Efstathios P Efstathopoulos. 2012. 2012, International Journal of Cancer, s. 519-528.
19. RADYOFARMASÖTİK KİMYA ARGE ÇALIŞMALARI. ÜNAK, Perihan. 2013. 2013. TAEK.
20. Teranostik Platformlarda Moleküler Görüntüleme Yöntemleri. Fuat Nurili, Gülin Uçmak Vural, Ömer Aras. 2015. 2015, Nükleer Tıp Seminerler.
21. 2016. Wikipedi. [Çevrimiçi] 2016.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Positron\\_emission\\_tomography](https://en.wikipedia.org/wiki/Positron_emission_tomography).
22. 2016. Wikipedi. SPECT. [Çevrimiçi] 2016.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Single-photon\\_emission\\_computed\\_tomography](https://en.wikipedia.org/wiki/Single-photon_emission_computed_tomography).
23. 2016, [www.radiologyinfo.org/en/info.cfm?pg=pet](http://www.radiologyinfo.org/en/info.cfm?pg=pet)
24. Termoelektrik SnTe Bileşiğinin Elektrokimyasal Sentezi, Yük. Kimyager Hasan ÖZ, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2011.



# Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Fark Denklemlerinin Residüel Hata Tahminiyle Çözümü için Boubaker Polinom Yaklaşımı

Salih YALÇINBAŞ<sup>1</sup>, Elif Zinnur AYKUTALP<sup>2</sup>, Mehmet SEZER<sup>3</sup>

Department of Mathematics, Celal Bayar University, 45047, Muradiye, Manisa, Turkey

[syalcin35@gmail.com](mailto:syalcin35@gmail.com)<sup>[1]</sup>, [aykotalp.elif@gmail.com](mailto:aykotalp.elif@gmail.com)<sup>[2]</sup>, [mehmet.sezer@cbu.edu.tr](mailto:mehmet.sezer@cbu.edu.tr)<sup>[3]</sup>

**Özet:** Bu çalışmanın temel amacı başlangıç-sınır koşulları altında fonksiyonel argümentli yüksek mertebeden lineer diferansiyel-fark denklemlerinin çözümü için Boubaker polinomlarını uygulamaktır. Kullandığımız teknik, aslında sıralama noktaları ile birlikte kesilmiş Boubaker serisine ve bunların matris gösterimlerine dayandırılır. Ayrıca, Ortalama-Değer Teoremini ve rezidüel fonksiyonu kullanarak, etkili bir hata tahmin tekniği önerilir; metodun etkinliğini ve uygulanabilirliğini göstermek için bazı açıklayıcı örnekler sunulur.

**Anahtar Kelime:** Boubaker polinomları ve serileri, sıralama noktaları, diferansiyel-fark denklemleri, matris metodu.

## Boubaker Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Differential-Difference Equations with Residual Error Estimation

**Abstract:** The main aim of this study is to apply the Boubaker polynomials for the solution of high-order linear differential-difference equations with functional arguments under the initial-boundary conditions. The technique we have used is essentially based on the truncated Boubaker series and its matrix representations together with collocation points. Also, by using the Mean-Value Theorem and residual function, an efficient error estimation technique is proposed and some illustrative examples are presented to demonstrate the validity and applicability of the method.

**Keywords:** Boubaker polynomials and series, collocation points, differential-difference equations, matrix method

### 1. Introduction

Differential-difference equations [1-10], which are a class of functional differential-equations, have been treated as models of some physical phenomena. When a mathematical model is developed for a physical system, it is usually assumed that all of the variables, such as space and time, are continuous. This assumption leads to a realistic and justified approximation of the real variables of the system. However, for some of the physical systems, these continuous variable assumptions can't be made. Then differential-difference equations have played an important role modeling problems that appear in various branches of science; e.g., mechanical engineering, condensed matter, biophysics mathematical statistic and control theory. In recent years, the studies of differential-difference equations are developed very rapidly and intensively. It is well known that linear differential-difference equations have been considered by many authors, and have been used in the applications of difference models to problems in biology, physics and engineering.

Recently, a number of different methods associated with the solution of higher-order differential-difference equations, which are the inverse scattering method [11], Hirota's bilinear form method [12], Tanh-method [13], Jacobian elliptic function method [14], numerical techniques [15,16], Taylor polynomial methods [17,18] and Chebyshev methods [8,16], have been given.

In this study, the basic ideas of the mentioned studies are developed to obtain the approximate solutions of high-order linear differential-difference equation with functional arguments (advanced, neutral or delayed) and variable coefficients in the form

$$\sum_{k=0}^m f_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^J P_j(x)y^{(j)}(\alpha x + \beta) = g(x), \quad J \leq m \quad (1)$$

under the mixed conditions

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk}y^{(k)}(a) + b_{lk}y^{(k)}(b)) = \lambda_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2)$$

Here  $f_k(x)$ ,  $P_j(x)$  and  $g(x)$  are known functions defined on the interval  $a \leq x \leq b$ ;  $\alpha, \beta, a_{lk}, b_{lk}$  and  $\lambda_l$  are appropriate constants;  $y(x)$  is an unknown function to be determined. The aim of this study is to get the solution of the problem (1) – (2) as the truncated Boubaker series defined by

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad N \geq m, \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

where  $a_n, n = 0, 1, \dots, N$  are unknown coefficients;  $B_n(x); n = 0, 1, 2, \dots, N$ , denote the Boubaker polynomials defined by [11,13]

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \frac{(n-4p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} x^{n-2p} \quad (4)$$

or recursively

$$B_n(x) = xB_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) \quad ; \quad n \geq 2$$

with  $B_0(x) = 1$  and  $B_1(x) = x$ .

On the other hand, by using (4), the first four Boubaker polynomials are given by

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x, \quad B_2(x) = x^2 + 2, \quad B_3(x) = x^3 + x, \dots$$

and the Boubaker polynomials  $B_n(x)$  are solution of the following differential equation:

$$(x^2 - 1)(3nx^2 + n - 2)B_n''(x) + 3x(nx^2 + 3n - 2)B_n'(x) - n(3n^2x^2 + n^2 - 6n + 8)B_n(x) = 0$$

## 2. Fundamental Matrix Relations

We first consider the solution  $y(x)$  of Eq. (1) defined by the truncated Boubaker series (3), which is given in the form

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad N \geq m, \quad a \leq x \leq b .$$

Then we can convert the finite series (3) to the matrix form as, for  $n = 0,1,2, \dots, N$

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \tag{5}$$

So that

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \quad B_1(x) \quad \dots \quad B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T.$$

On the other hand, by using the relation (4), the matrix  $y(x)$  is obtained as

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{H} \tag{6}$$

where

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N]$$

and if N is odd,

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1, \frac{N-1}{2}} & 0 & \phi_{N-1, \frac{N-3}{2}} & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ 0 & \phi_{N, \frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

and if N is even,

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_{N-1, \frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ \phi_{N, \frac{N}{2}} & 0 & \phi_{N, \frac{N-2}{2}} & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

where

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi_{n,p} x^{n-2p}, \quad n = 0,1, \dots, N, \quad p = 0,1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$\phi_{n,p} = \left[ \frac{(n-4p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} \right] (-1)^p.$$

Also, it is clearly seen from (6) that the relation between the matrix  $X(x)$  and derivative  $B^{(k)}(x)$  is

$$\begin{aligned} B'(x) &= X'(x)H \\ &= X(x)MH \end{aligned}$$

and that repeating the process

$$B^{(k)}(x) = X(x)M^kH, \quad k = 0,1,2, \dots, m \tag{7}$$

where

$$\mathbf{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

From the matrix relations (5), (6) and (7), it follows that

$$\begin{aligned} y(x) &\cong y_N(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{H}\mathbf{A} \end{aligned}$$



and

$$\begin{aligned}
 y^{(k)} &\cong y_N^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)}(x)\mathbf{A} \\
 &= \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{H}\mathbf{A} \\
 &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A}, \quad k = 0,1,\dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

By substituting  $x \rightarrow \alpha x + \beta$  into the relation (8), we get,  $j = 0,1,2, \dots$

$$\begin{aligned}
 y^{(j)}(\alpha x + \beta) &= \mathbf{X}(\alpha x + \beta)\mathbf{M}^j\mathbf{H}\mathbf{A} \\
 &= \mathbf{X}(x)\mathbf{D}(\alpha, \beta)\mathbf{M}^j\mathbf{H}\mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{9}$$

so that, for  $\alpha \neq 0$ ,

$$\mathbf{D}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}\alpha^0\beta^0 & \binom{1}{0}\alpha^0\beta^1 & \binom{2}{0}\alpha^0\beta^2 & \dots & \binom{N}{0}\alpha^0\beta^N \\ 0 & \binom{1}{1}\alpha^1\beta^0 & \binom{2}{1}\alpha^1\beta^1 & \dots & \binom{N}{1}\alpha^1\beta^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\alpha^2\beta^0 & \dots & \binom{N}{2}\alpha^2\beta^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}\alpha^N\beta^0 \end{bmatrix}.$$

### 3. Boubaker Collocation Method

For constructing the fundamental matrix equation, we first consider the collocation points defined by, for  $i = 0,1, \dots, N$ ,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad (\text{Standard})$$

or (10)

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi i}{N}\right) \quad (\text{Chebyshev-Lobatto}).$$

Then, by using the collocation points (10) into (1), we have the system of the equations

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{f}_k(x_i)y^{(k)}(x_i) + \sum_{j=0}^J P_j(x_i)y^{(j)}(\alpha x_i + \beta) = g(x_i)$$

or briefly the corresponding matrix equation

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{Y}^{(k)} + \sum_{j=0}^J \mathbf{P}_j \mathbf{Y}_{(\alpha,\beta)}^{(j)} = \mathbf{G} \quad (11)$$

where

$$\mathbf{F}_k = \text{diag}[f_k(x_0) \quad f_k(x_1) \quad \dots \quad f_k(x_N)]$$

$$\mathbf{P}_j = \text{diag}[p_j(x_0) \quad p_j(x_1) \quad \dots \quad p_j(x_N)]$$

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{(\alpha,\beta)}^{(j)} = \begin{bmatrix} y_{(\alpha x_0 + \beta)}^{(j)} \\ y_{(\alpha x_1 + \beta)}^{(j)} \\ \vdots \\ y_{(\alpha x_N + \beta)}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}.$$

On the other hand, by substituting the collocation points (10) into (8) and (9), we obtain the matrix relations

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(x_0)M^k HA \\ X(x_1)M^k HA \\ \vdots \\ X(x_N)M^k HA \end{bmatrix} = X M^k HA$$

$$\mathbf{Y}_{(\alpha,\beta)}^{(j)} = \begin{bmatrix} y_{(\alpha x_0 + \beta)}^{(j)} \\ y_{(\alpha x_1 + \beta)}^{(j)} \\ \vdots \\ y_{(\alpha x_N + \beta)}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(x_0)D(\alpha, \beta)M^j HA \\ X(x_1)D(\alpha, \beta)M^j HA \\ \vdots \\ X(x_N)D(\alpha, \beta)M^j HA \end{bmatrix} = X D(\alpha, \beta) M^j HA$$

so that

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix}.$$

Therefore the fundamental matrix equation for Eq. (1) becomes

$$\left[ \sum_{k=0}^m F_k X M^k + \sum_{j=0}^J P_j X D(\alpha, \beta) M^j \right] H A = G \quad (12)$$

Now we can find the fundamental matrix form for the conditions (2), by using the relation (8), as follows:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk} X(a) + b_{lk} X(b)) M^k H A = \lambda_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (13)$$

Then we can write the fundamental matrix equations (12) and (13) corresponding to Eq. (1) and the conditions (2), respectively, as follows:

$$W A = G \text{ or } [W; G] \quad (14)$$

and

$$U_l A = \lambda_l \text{ or } [U_l; \lambda_l], \quad l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (15)$$

where

$$W = [w_{pq}] = \left\{ \sum_{k=0}^m F_k X M^k + \sum_{j=0}^J P_j X D(\alpha, \beta) M^j \right\} H$$

and

$$U_l = [u_{l0} \quad u_{l1} \quad \dots \quad u_{lN}] = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk} X(a) + b_{lk} X(b)) M^k H A = \lambda_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1$$

Consequently, the obtain the solution of Eq. (1) under the conditions (2), by replacing the row matrices (15) by the last (or any) m rows of the augmented matrix (14), we have the required matrix

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] \text{ or } \tilde{W} A = \tilde{G} \quad (16)$$

If  $\text{rank } \tilde{W} = \text{rank}[\tilde{W}; \tilde{G}] = N + 1$ , then we can write  $A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G}$ . Thus the matrix  $A$  (thereby the coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_N$ ) is uniquely determined. Also, Eq. (1) under the conditions (2) has a unique solution. This solution is given by the truncated Boubaker series (3).

#### 4. Accuracy of Solutions and Residual Error Estimation

We can easily check the accuracy of the obtained solutions as follows. Since the truncated Boubaker series (3) is approximate solution of (1), when the function  $y_N(x)$  and its derivatives

are substituted in Eq. (1), the resulting equation must be satisfied approximately; that is, for  $x = x_r \in [a, b], r = 0, 1, \dots$

$$R_N(x_r) = \sum_{k=0}^m f_k(x_r) y^{(k)}(x_r) + \sum_{j=0}^J P_j(x_r) y^{(j)}(\alpha x_r + \beta) - g(x_r) \cong 0$$

or

$$R_N(x_r) \leq 10^{-k_r}, \quad (k_r \text{ is any positive integer}).$$

If  $\max 10^{-k_r} = 10^{-k}$  ( $k$  is any positive integer) is prescribed, then the truncation limit  $N$  is increased until the difference  $R_N(x_r)$  at each of the points becomes smaller than the prescribed  $10^{-k}$  [8,9,19].

On the other hand, by means of the residual function defined by  $R_N(x)$  and the mean value of the function  $|R_N(x)|$  on the interval  $[a, b]$ , the accuracy of the solution can be controlled and the error can be estimated. If  $R_N(x) \rightarrow 0$  when  $N$  is sufficiently large enough, then the error decreases. Also, by using the Mean-Value Theorem, we can estimate the upper bound of the mean error,  $\bar{R}_N$  as follows:

$$\left| \int_a^b R_N(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx$$

and

$$\begin{aligned} \int_a^b R_N(x) dx &= (b-a)R_N(c), \quad a \leq c \leq b \\ \Rightarrow \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| &= (b-a)|R_N(c)| \\ \Rightarrow (b-a)|R_N(c)| &\leq \int_a^b |R_N(x)| dx \\ |R_N(c)| &\leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N \end{aligned}$$

## 5. Numerical Examples

The method of this study is useful in finding the solution of higher order linear differential-difference equations in terms of Boubaker polynomials. We illustrate the numerical solution with the following examples.

**Example 1.** [11,18] Let us first consider the boundary value problem

$$y''(x) - xy'(x - 1) + y(x - 2) = -x^2 - 2x + 5$$

$$y(0) = -1, y'(-1) = -2.$$

with exact solutions  $y(x) = x^2 - 1$

We assume that the problem has a Boubaker polynomial solution in the form

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 a_n B_n(x).$$

Here,  $N = 4, P_0(x) = 0, P_1(x) = 0, P_2(x) = 1, Q_0(x) = 1, Q_1(x) = -x,$

$$\alpha_0 = 1, \beta_0 = -2, \alpha_1 = 1, \beta_1 = -1, -\le x \le 0, g(x) = -x^2 - 2x + 5$$

and the collocation points are

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N}\right)i, i = 0,1,2,3,4 \Rightarrow \left\{x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0\right\}.$$

From Eq. (12), the matrix representation of the equation is

$$\{F_0XH + F_1XMH + F_2XM^2H + P_0XDH + P_1XDMH\}A = G,$$

such that

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 6 \\ 95/16 \\ 23/4 \\ 87/16 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3/4 & 9/16 & -27/64 & 81/256 \\ 1 & -1/2 & 1/4 & -1/8 & 1/16 \\ 1 & -1/4 & 1/16 & -1/64 & 1/256 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(1, -2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D(1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

For the fundamental equation and the conditions  $y(0) = -1$  and  $y'(-1) = -2$ , the augmented matrices are obtained as



$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -23 & 59 & ; & 6 \\ 1 & -2 & 143/16 & -653/32 & 11741/256 & ; & 95/16 \\ 1 & -2 & 35/4 & -69/4 & 533/16 & ; & 23/4 \\ 1 & -2 & 135/6 & -439/32 & 5741/256 & ; & 87/16 \\ 1 & -2 & 8 & -10 & 14 & ; & 5 \end{bmatrix}$$

and

$$[u_0; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -2; \ -1],$$

$$[u_1; \lambda_1] = [0 \ 1 \ -2 \ 4 \ -4; \ -2],$$

By replacing the condition matrices by the two rows of the matrix, we have the required augmented matrix

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & -23 & 59 & ; & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & ; & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -4 & ; & -2 \\ 1 & -2 & 135/6 & -439/32 & 5741/256 & ; & 87/16 \\ 1 & -2 & 8 & -10 & 14 & ; & 5 \end{bmatrix}.$$

This system has the solution

$$\mathbf{A} = [-3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T.$$

Therefore, we obtain the approximate solution as

$$y_4(x) = \sum_{n=0}^4 a_n B_n(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) + a_4 B_4(x) \rightarrow y_4(x) = x^2 - 1$$

which is the exact solution.

**Example 2.** [16] Let us consider the multi-pantograph problem

$$y'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} y\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} y(x)$$

$$y(0) = 1$$

with the exact solution  $y(x) = e^x$ . To find the Boubaker polynomial solution of the problem above, we first take  $N = 5$ , where

$$F_0(x) = -\frac{1}{2}, \quad F_1 = 1, \quad P_0 = -\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad g(x) = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0.$$

Hence, the collocation points are

$$x_i = a + \left(\frac{b-a}{N}\right) i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{4}{5}, \quad x_5 = 1 \right\}$$

and the matrix form of the problem is defined by

$$\{\mathbf{F}_0 \mathbf{X} \mathbf{H} + \mathbf{F}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{H} + \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha, \beta) \mathbf{H}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}.$$

Also, the augmented matrices of the system and conditions are obtained as follows;

$$[W;G] = \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 & 2.0000 & -3.0000 & ; & 0 \\ -1.0526 & 0.8447 & -1.7307 & 0.9602 & 2.1363 & -2.6418 & ; & 0 \\ -1.1107 & 0.6779 & -1.5258 & 1.1210 & 2.4636 & -2.3540 & ; & 0 \\ -1.1749 & 0.4975 & -1.3906 & 1.4513 & 3.1436 & -1.8389 & ; & 0 \\ -1.2459 & 0.3016 & -1.3312 & 1.9179 & 4.3159 & -0.6446 & ; & 0 \\ -1.3244 & 0.0878 & -1.3548 & 2.4848 & 6.0972 & 1.8138 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$[u_0; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -2 \ 0; 1]$$

$$[W;G] = \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 & 2.0000 & -3.0000 & ; & 0 \\ 1.0000 & 0 & 2.0000 & 0 & -2.0000 & 0 & ; & 1 \\ -1.1107 & 0.6779 & -1.5258 & 1.1210 & 2.4636 & -2.3540 & ; & 0 \\ -1.1749 & 0.4975 & -1.3906 & 1.4513 & 3.1436 & -1.8389 & ; & 0 \\ -1.2459 & 0.3016 & -1.3312 & 1.9179 & 4.3159 & -0.6446 & ; & 0 \\ -1.3244 & 0.0878 & -1.3548 & 2.4848 & 6.0972 & 1.8138 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Solving the augmented system, we find the coefficients of  $A$  as

$$A = [0.0681 \ 0.8574 \ 0.4986 \ 0.1869 \ 0.0327 \ 0.0148]^T.$$

Therefore, we have the solution

$$y_5(x) = 1 + x + 0.4986x^2 + 0.1721x^3 + 0.0270x^4 + 0.0148x^5.$$

In addition, the approximate solutions for  $N = 3, N = 4,$  and  $N = 5$  are compared with the exact solutions in Table 1, Figure 1 and Figure 2.

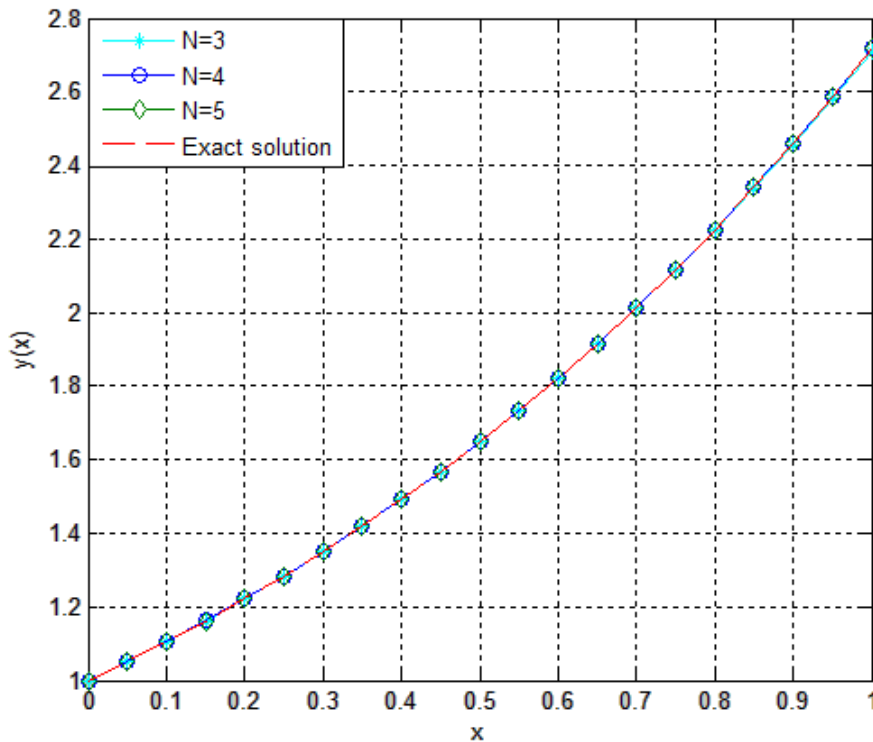


Figure 1. Graphics of the exact solution and numerical solutions of Example 2 for  $N = 3, 4, 5$

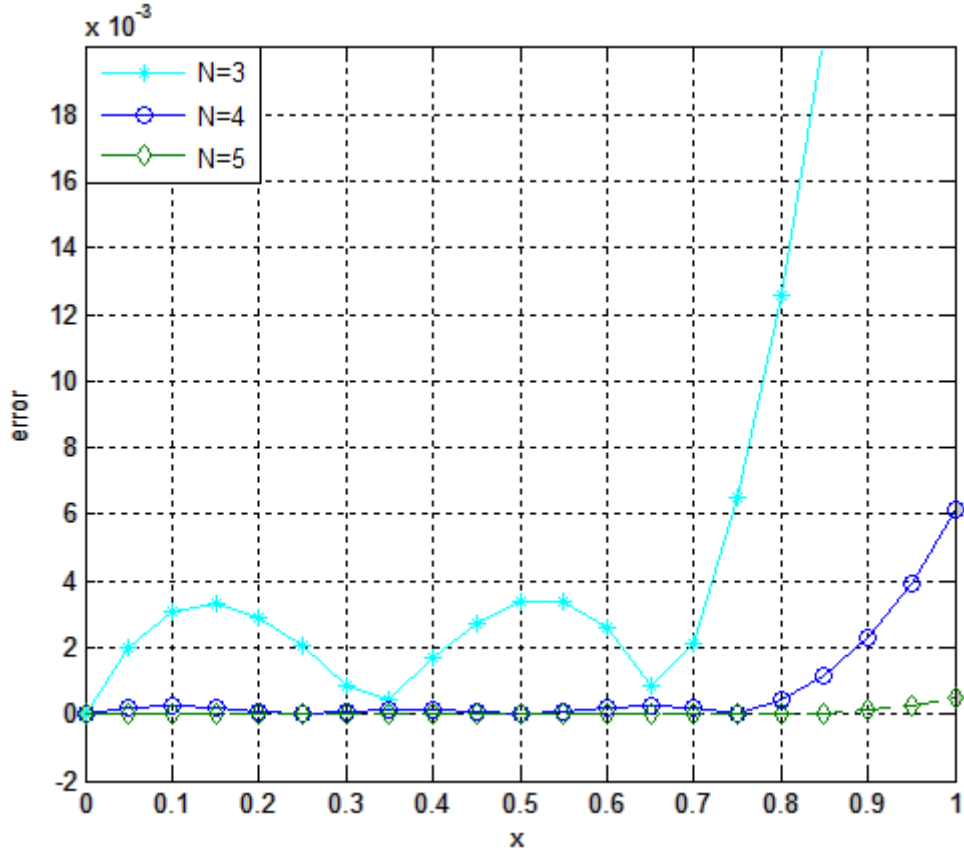


Figure 2. Graphics of Residual Error Functions of Example 2 for  $N = 3, 4, 5$

Table 1. Numerical results of Example 2

$x_i$	$y(x_i)$	$y_3(x_i)$	$ e_3(x_i) $	$y_4(x_i)$	$ e_4(x_i) $	$y_5(x_i)$	$ e_5(x_i) $
0.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0
0.1	1.105170918	1.104981763	1.89155e-04	1.105187735	1.6817e-05	1.105169791	1.127e-06
0.2	1.221402758	1.220869635	5.33123e-04	1.221439736	3.6978e-05	1.221400844	1.914e-06
0.3	1.349858808	1.349077492	7.81316e-04	1.349899384	4.0576e-05	1.34985711	1.698e-06
0.4	1.491824698	1.491019210	8.05488e-04	1.491856987	3.2289e-05	1.491823152	1.546e-06
0.5	1.648721271	1.648108663	6.12608 e-04	1.648749773	2.8502e-05	1.648719174	2.097e-06
0.6	1.8221188	1.821759727	3.59073e-04	1.822161892	4.3092e-05	1.822116063	2.737e-06
0.7	2.013752707	2.013386277	3.6643e-04	2.013824418	7.1711e-05	2.013750422	2.285e-06
0.8	2.225540928	2.224402189	1.138739e-03	2.225615347	7.4419e-05	2.225539606	1.322e-06
0.9	2.459603111	2.456221339	3.381772e-03	2.459559598	4.3513e-05	2.459596762	6.349e-06
1.0	2.718281828	2.7102576	8.024228e-03	2.717829011	4.52809e-04	2.718245858	3.5962e-05

The residual error for  $N = 3, 4, 5$ ;

$$\bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{1-0} dx = 8.575113393 \times 10^{-3},$$

$$\bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{1-0} dx = 6.302235207 \times 10^{-4},$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|}{1-0} dx = 3.842434519 \times 10^{-5}.$$

**Example 3.** Our last example is given by [18], for  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

$$y'''(x) - \cos(x)y'(x) - \sin(x)y'(x - \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2}y(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(x) - 2\cos(x) - 1$$

with the exact solution  $y(x) = \sin x$  and with conditions

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$$

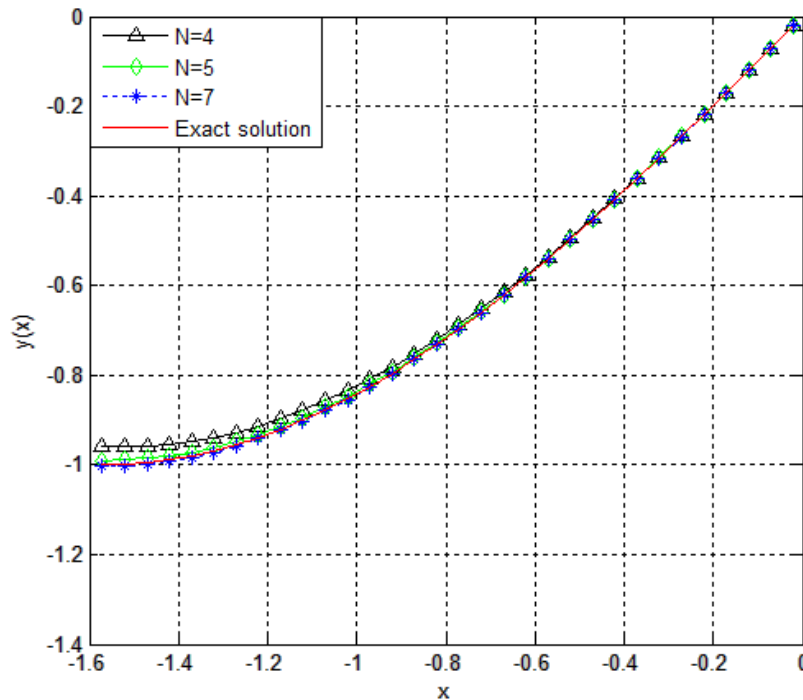
where

$$F_0 = 0, F_1 = -\cos(x), F_2 = 0, F_3 = 1, P_0 = \sqrt{2}, P_1 = -\sin(x), \alpha_0 = 1, \beta_0 = -\frac{\pi}{4}, \alpha_1 = 1, \beta_1 = -\frac{\pi}{2},$$

and the fundamental matrix form of the given differential-difference equation becomes

$$\{F_0XH + F_1XMH + F_2XM^2H + F_3XM^3H + P_0XDH + P_1XDMH\}A = G$$

Now, let us find the solutions of this problem taking  $N = 4, N = 5$  and  $N = 7$ . The comparison of the solutions is given in Table 2, Figure 3 and Figure 4.



**Figure 3.** Graphics of the exact solution and the numerical solutions to Example 3 for  $N = 4, 5, 7$

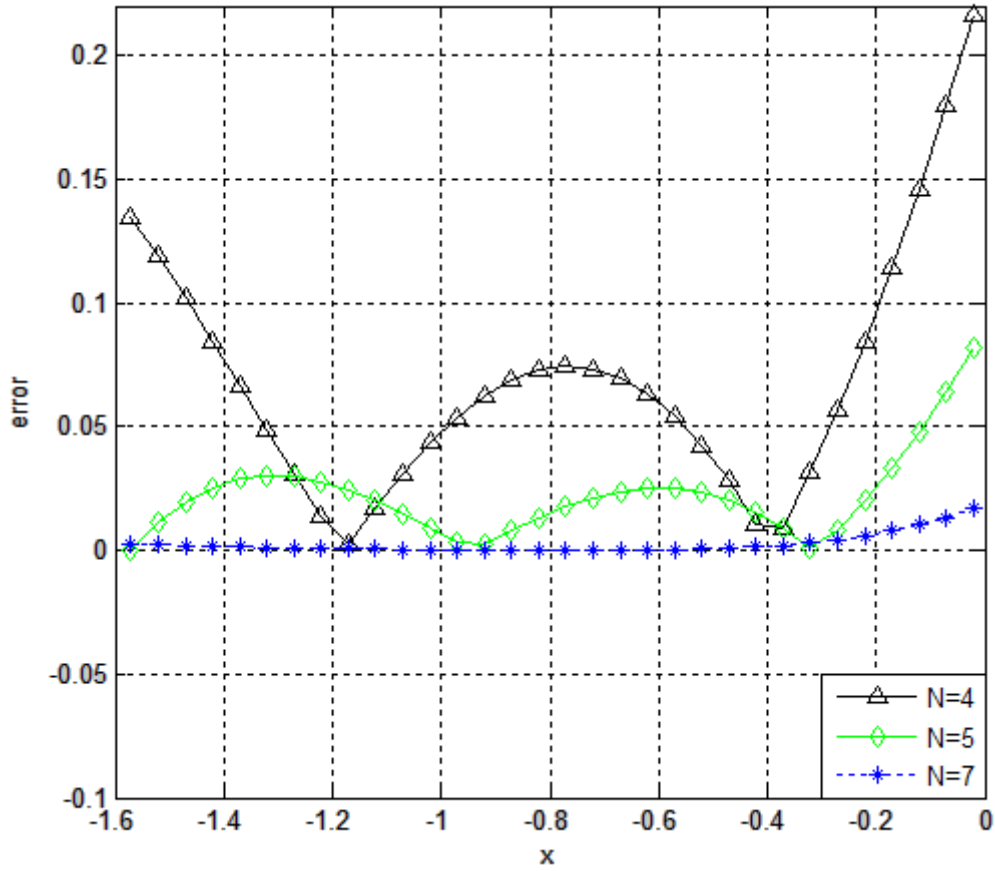


Figure 4. Graphics of Residual Error Functions of Example 3 for  $N = 3, 4, 5$

Table 2. Numerical results of Example 3

$x_i$	$y(x_i)$	$y_4(x_i)$	$ e_4(x_i) $	$y_5(x_i)$	$ e_5(x_i) $	$y_7(x_i)$	$ e_7(x_i) $
$\pi/2$	-1.0	-0.9589265665	4.10734335e-02	-0.9897292856	1.02707144 e-02	-1.003932979	3.932979e-03
$\pi/3$	-0.8660254038	-0.8468051665	1.92202373e-02	-0.8607567010	5.2687028e-03	-0.8675589895	1.5335857e-03
$\pi/4$	-0.7071067812	-0.6968292175	1.02775637e-02	-0.7040225957	3.0841855e-03	-0.7078760680	7.692868e-04
$\pi/6$	-0.5	-0.4961625224	3.8374776e-03	-0.498738576	1.261424e-03	-0.5002806396	2.806396e-04
0	0.0	-1.0e-11	1.0e-11	1.159016994e-10	1.159016994e-10	-4.3388e-08	-4.3388e-08

The residual error for  $N = 3, 4, 5$ ;

$$\bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{\left|0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|} dx = 6.740208465 \times 10^{-2},$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|}{\left|0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|} dx = 2.232083286 \times 10^{-2},$$

$$\bar{R}_7 = \int_0^1 \frac{|R_7(x)|}{\left|0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|} dx = 2.516258961 \times 10^{-3}.$$

## 6. Conclusions and Discussions

A new technique based on the Boubaker polynomials to numerically solve the high-order linear differential-difference equations with functional arguments is presented. High-order linear differential-difference equations are usually difficult to solve analytically. Then, numerical methods are required to obtain the approximate solutions. For this reason, the present method has been proposed for approximate solution and also analytical solution.

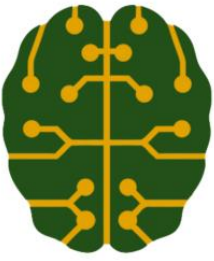
On the other hand, from Table 1, it may be observed that the errors found for different  $N$  show close agreement for various values of  $x_i$ . Tables and Figures indicate that as  $N$  increases, the errors decrease more rapidly; hence for better results, the large number  $N$  is recommended. Another considerable advantage of the method is that Boubaker coefficients of the solution are found very easily by using the computer programs. On the other hand,  $N$ th order approximation gives the exact solution when the solution is polynomial of degree equal to or less than  $N$ . If the solution is not polynomial, Boubaker series approximation converges to the exact solution as  $N$  increases.

## 7. References

- [1] Ablowitz, M., L., Ladik, J., F. (1976). A nonlinear difference scheme and inverse scattering, Stud. Appl. Math., 55, 213-229.
- [2] Hu, X., B., Ma, W., X. (2002). Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice some special soliton – like solutions, Phys. Lett. A 293, 161-165.
- [3] Fan, E. (2001). Soliton solutions for a generalized Hirota-Sotsuma coupled KdV equation a Coupled MKdV equation, Phys. Lett. A 282, 18-22.
- [4] Dai, C., Zhang, J. (2006). Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations, Chaos, Soliton Fract. 27, 1042-1047.
- [5] Elmer, C., E., Van Vleck, E., S. (2001). Traveling wave solutions for Bistable Differential-Difference Equations with Periodic Diffusion, SIAM J. Appl. Math. 61(5), 1648-1679.



- [6] Elmer, C., E., Van Vleck, E., S. (2002). A Variant of Newton's Method for the Computation of Traveling Waves of Bistable Differential-Difference Equation, *J. Dyn. Different. Equat.* 14, 493-517.
- [7] Arıkoğlu, A., Özkol, I. (2006). Solution of difference equations by using differential transform method, *Appl. Math. Comput.* 174, 1216-1228.
- [8] Sezer, M., Gülsu, M. (2005). Polynomial solution of the most general linear Fredholm İntegro- differential- difference equation by means of Taylor matrix method, *Complex variables*, 50(5), 367-382.
- [9] Gülsu, M., Sezer, M. (2005). A method for the approximate solution of the high-order linear difference equations in terms of Taylor polynomials, *Intern. J. Comput. Math.* 82(5), 629-641.
- [10] Saaty, TL. (1981). *Modern nonlinear equations*, Dover publications Inc., New York, P.225.
- [11] Akkaya, T., Yalçınbaş, S., Sezer, M. (2013). Numeric solutions for the pantograph type delay differential equation using first Boubaker polynomials, *Applied Mathematics and Computation* 219, 9484–9492.
- [12] Akgönüllü, N., Şahin, N., Sezer, M. (2011). A Hermite Collocation Method for the Approximate Solutions of High-Order Linear Fredholm İntegro-Differential Equations, *Numerical Methods Partial Differential Eq.* 27: 1707–1721.
- [13] Boubaker, K. (2007). *Trends Appl. Sci. Res. On Modified Boubaker Polynomials: Some Differential and Analytical Properties of the New Polynomials Issued from an Attempt for Solving Bi-varied Heat Equation* 2(6), (ss: 540–544).
- [14] Akyuz-Dascioglu, A. (2006). A Chebyshev polynomial approach for linear Fredholm – Volterra İntegro differential equations in the most general form, *Appl Math Comput* 181, 103–112.
- [15] Yalçınbaş, S., and Sezer, M. (2006). A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-difference equations with mixed argument *Appl Math Comput* 175, 675–690.
- [16] Evans, D.J., Raslan, K.R, (2005). The Adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.* 82 (1), 49–54.
- [17] Yalçınbaş, S., Aynigül, M., Sezer, M. (2011). A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations, *J. Franklin Inst.* 348 (6), 1128–1139.
- [18] Sezer, M., Akyuz-Dascioglu, A. (2006). Taylor polynomial solutions of general linear differential – difference equations with variable coefficients, *Appl Math Comput* 174, 1526–1538.
- [19] Arıkoğlu, A, I. (2006). Solution of difference equations by using differential transform method, *Appl. Math. Comput.* 174, 1216-1228.



# CEBİRSEL FRİZ DESENLERİNİN PERMÜTASYONEL ANLAMINI ÜZERİNE

Mushab Bedirhan ANDIZ  
Recep Tayyip Erdoğan University, Rize, Turkey  
<sup>[1]</sup>[bedirhanandiz94@gmail.com](mailto:bedirhanandiz94@gmail.com)

**Özet:** Bu çalışmada bazı Frize desenlerini matematiksel olarak tanımlamaya çalıştık. Grupları cebirsel olarak tanımlarla destekleyerek döndürme, yansıma ve simetri kavramlarını örnekler ve tanımlar yardımıyla sonsuz gruplar üstüne inşaat ettik.

**Anahtar Kelime:** Frize Deseni, Grup Teori

## GİRİŞ

Friz dediğimiz yapılar  $Sym(X)$  yapılarını içeren  $X$  kümelerinin oluşturduğu ve geçişme özelliğini sağlayan "T" bir yapıdır. Daha düzgün bir söyleyişle belli bir kurala göre dize gelen düzgün doğrusal tek bir yöndeki sezgisel kümeler toplamıdır.

Yukarıda söz ettiğimiz tanımda "Sym(X)"  $X$  kümelerinin simetrilerinin oluşturduğu kümelerin hepsine verdiğimiz bir notasyon olup bu kümede açıkta kalan  $X$ 'e bağlı hiçbir simetrik friz yoktur. Şayet iki desen (pattern) simetrik grup ise çok bariz olarak bu çift izomorfik yapılardır ki bu yapı izometrilere içerir. (Örnek: Yansıma, döndürme...). Her friz ya da cebirsel şekillerin en az 7 desen kuralından birisine uymak zorundadır.

Örneğin;

**..FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF..**

Yukarıdaki harf sinsilesi simetri içermiyor dikkat edin biz buna tek bir yönde geçişme simetrileri demektediriz. Matematiksel olarak bu simetri grubu sonsuz bir grup  $C_\infty = \langle T, I \rangle$  olarak göstereceğiz ki öyle T'ler var ki sağdan bir birim yansımalıdır yani  $T(x,y) = (x+1,y)$ .

**..EEEEEEEEEEEEEEEEEEE..**

Bu desen ise paralel eksenlerin ayna simetrisi olarak adlandırılır. Bu simetri grubu ise  $C_\infty \times C_2 = \langle T, X \mid X^2 = I, XT = TX \rangle$  olarak göstereceğiz. Bu noktada okurun gösterimleri anlamaya çalışmasını şiddetle tavsiye ediyoruz.  $X$ -eksenine göre yansıma olduğu için ve  $X(x, y) = (x, -y)$  için  $XT = TX$  eşitliği çok bariz. (Dikkat!  $x$  ve  $X$ 'ler matematiksel olarak farklılık göstermektedir).

**..AAAAAAAAAAAAAAAAAAA..**

Bu desen yukarıda "E" desenine çok benzer ve aynadaki simetri düşüme'dür. Geçişme simetrisi de diyebiliriz. Ama bu deseni farklı sadece bir tane değil sonsuz tane ayna simetri eksenine vardır. Simetri grubunu;

$D_{\infty} = \langle T, Y \mid Y^2 = I, YT = T^{-1}Y \rangle$  olarak gösterebiliriz.

T'yi yukarıda olduğu gibi bu sefer y-eksenine göre simetri olarak tanımladık ve eğer  $Y(x, y) = (-x, y)$  olduğunda  $YT = T^{-1}Y$  eşitliğini gösterirsek işimiz daha açık ve net. Ayrıca biraz optikle ilgili olsa da, eğer ayna eksenini  $x=1/2$  seçersek ve bu seçimi M ile tanımlarsak  $M(x, y) = (1-x, y)$  olur ve sadece  $T^{-1}Y$  olur. Devam edelim...

**...pbpbpbpbpbpbpb...**

Bu sefer desende ayna simetrisi olmayıp düzgün simetri eksenini var yani belirli bir kural etrafında sonsuza uzanan anlamlı ya da anlamsız bloklar sinsilesi. Bu kuralı tanımlayacağız fakat desen iki farklı bileşke olarak görülebilir. **pb** frizi mi yoksa **bp** mi? Bu sorunun yanıtını sonsuz grup tanımıyla verelim.  $C_{\infty} = \langle G \mid \rangle$  gösterimi bu desen için uygun olacaktır ki buradaki G'leri de  $G(x, y) = (x + 1/2, y)$  tanımlamak mümkündür.

**..NNNNNNNNNNNNNN..**

Bu desen ise ne ayna simetrisi veya düzgün simetri eksenini içerir. Ama şanstın elimizde bu deseni tanımlayacağımız bir döndürme simetrisi vardır. Her **N** harfinin merkezleri bir döndürme simetrisi içindedir. Şayet bir tanesini ele alıp incelersek yani bir **N** harfinin merkezini alıp belli bir açıyla döndürüp belli bir müddet öteleme yaparsak istediğimiz deseni elde ederiz. Matematiksel olarak yine sonsuz bir grup olup gösterimi

$D_{\infty} = \langle T, R \mid R^2 = I, RT = T^{-1}R \rangle$  şeklindedir.

Buradaki R ve T'leri ise döndürmelerin bir tanesine R dedik, R'lerin oluşturduğu geçişmeleri de T olarak tanımladık.

**...HHHHHHHHHHHHHH..**

**H** harflerinin oluşturduğu sonsuza giden bir desen. Bu desen çok şanslı. Nedeni ise 2 yönde hem döndürme hem de ayna simetrisine sahip. Bu deseni bir matematiksel simetri grubu olarak tanımlarsak bu grup düzgün bir gruptur. Bu simetri grubu geçişme, T ve 180°'lik merkezi döndürme biçimlerine sahiptir. Aslında matematiksel olarak;

$D_{\infty} \times C_2 = \langle T, M, R \mid M^2 = R^2 = 1, MT = TM, RM = MR, RT = T^{-1}R \rangle$  olarak tanımlayabiliriz.

Yukarıda anlatmak istediğimiz her şeyi hatta daha fazlasını bu şekilde anlattık ki burada M'ler yansımalar, R'ler döndürmeler ve T'ler ise tüm geçişmelerin oluşturduğu parça olarak tanımlayabiliriz.

**MWMMWMMW**

Yukarıdaki şekil ise sonsuza gittiğini düşünelim. Ne dersiniz? Bir ters bir düz M harfinin oluşturduğu desenler ne anlam ifade etmektedir. Bu desen ardışık iki harfin merkezleri arasında

döndürme simetrisi ayrıca yatay doğrular boyunca her harfin tam orta noktasında ayna simetrini elde ederiz. Başımız hemen sıkıştığı için matematiksel bir tanımlara yer verelim.

$G(x, y) = (x + 1/2, -y)$  ve  $T(x, y) = (x + 1, y)$ ' lerin oluşturduğu parçalardır ki iki eşitlikten  $G^2 = T$  çok bariz! Şayet  $180^\circ$ 'lik bir döndürme simetrisi uygularsak bu son oluşan döndürmeyi  $R(x, y) = (-x, -y)$  ile gösterebiliriz ve  $x=1/4$  ekseninin yansıma simetrilerini  $M(x, y) = (1/2 - x, y)$  olarak tanımlayabiliriz. Aynı şekilde  $RM = G$  okur tarafından çok kolay şekilde açığa çıkarılabilir.

$\langle R, M \mid R^2 = M^2 = 1 \rangle$  bu tanım yukarıda verdiğimiz  $G(x,y)$  ve  $T(x,y)$  lerin ortak gösterimi diyebiliriz. Bu desen için aslında bu tanım daha uygun olur. Ama şu bir gerçek ki  $R$  ile  $M$  arasında hiçbir ilişki bulamayız. Ama

$S = RM$  gibi bir ifade seçersek  $D_\infty = \langle S, R \mid R^2 = 1, RS = S^{-1}R \rangle$  olur. Yukarıda anlattığımız bilgi topluluğunu bir teoremlerle açıklayalım.

**Teorem:** Tüm friz desenleri yukarıda saydığımız kurallardan en az birisine uymak zorundadır.

**Kanıt:** Diyelim  $X$  friz deseni olsun ve içinde  $Sym(X)$  ve yatay eksenler boyunca geçişme sağlayan  $T$ 'yi içersin. Şimdi tanımlamamız gereken simetri biçimlerini açıklayalım.

**V:** Yatay eksenlerde dikey yansımalar

**H:** Yatay eksenlerdeki yansımalar

**R:** Döndürmeler - Rotasyonlar

**G:** Düzgün yatay yansımalar

Toplam en fazla  $2^4 = 16$  tane friz desen çeşidi vardır.

**H  $\Rightarrow$  G:** Eğer  $Sym(X)$  yatay eksenlerde yansıma içeriyorsa bunun sonucunda düzgün simetride içerir.

**RG  $\Rightarrow$  H:** İki döndürme bileşkesinin çarpımı bütün düzgün yatay yansımalarda belirgindir ve bu durum dikey eksende yatay yansıma olmak zorundadır.

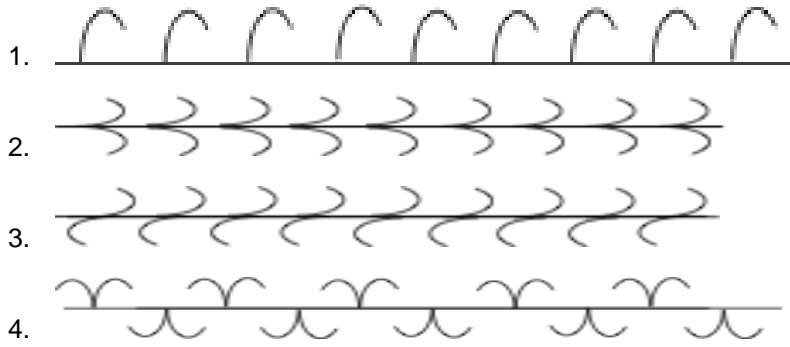
**GV  $\Rightarrow$  R:** Düzgün yatay yansımalar ve dikey yansımaların çarpımı bir noktada belirgindir. Bu isometrilere döndürme olmak zorundadır.

**RV  $\Rightarrow$  G:** Döndürme ve yatay yansımaların çarpımı sadece yatay bir doğrudur. Bu yüzden ya yatay yansıma ya da yatay glide'tir. Kısacası  $Sym(X)$  glide içerir.

Dediğimiz gibi her şekil friz olmayabilir. Friz olabilmenin şartı yukarıda saydığımız kombinasyonları sağlamasıdır. Bu yazıyı en iyi anlatacak çok sade bir tablo oluşturacağız. Tabloyu anlayan okur vereceğimiz örnekleri çözmesinde bir mahsur görmemekteyiz.

Kombinasyon	Desen Çeşitleri
Hiçbiri	F
V	A
R	N
G	pb
HG	E
VG	MW
VRGH	H

**Örnekler:** Aşağıdaki friz örneklerini inceleyelim.



5.  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cotan x$ , fonksiyonlarının grafikleri hangi friz desenlerine denk gelmektedir.

### Kaynak

1. Duane M.Broline, D.W.Crowe & I.M. Isaacs, The geometry of frieze pattern Geometriae Dedicata, 3(1974)