



Another odd log-logistic logarithmic class of continuous distributions

Morad Alizadeh
Department of Statistics,
Faculty of Sciences,
Persian Gulf University,
Bushehr, 75169, Iran
moradalizadeh@gmail.com

 [0000-0001-6638-2185](https://orcid.org/0000-0001-6638-2185)

Mustafa Ç. Korkmaz
Department of
Measurement and
Evaluation, Artvin Çoruh
University, Artvin,
Turkey.

mcagatay@artvin.edu.tr
 [0000-0003-3302-0705](https://orcid.org/0000-0003-3302-0705)

Jehhan. A. Almamy
Management Information
System Department,
Taibah University, Saudi
Arabia.

jmamy@taibahu.edu.sa
 [0000-0002-8493-7575](https://orcid.org/0000-0002-8493-7575)

A. A. E. Ahmed
Department of Statistics,
Mathematics and
Insurance, Helwan
University, Egypt.

aaeahmed@taibahu.edu.sa
 [0000-0003-3699-6199](https://orcid.org/0000-0003-3699-6199)

Abstract

In this work, a new class of continuous distributions is presented and the mathematical properties of the new distribution class is studied. We estimate the model parameters by the maximum likelihood method and assess its performance based on biases and mean squared errors in a simulation study framework. For the real data set, the special member of the new class provides a better fit than other models generated by other well-known families.

Keywords: *Odd Log-Logistic Family; Maximum Likelihood Estimation; Compound Class; Order Statistics.*

Öz

Sürekli dağılımların bir diğer odd log-logistik logaritmik sınıfı

Bu çalışmada, sürekli dağılımların yeni bir sınıfı sunulmuştur ve bu yeni dağılım sınıfının matematiksel özellikleri çalışılmıştır. Model parametreleri en çok olabilirlik tahmin yöntemi ile elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin performansları yan ve hata kareler ortalamasına dayalı olarak bir simülasyon çalışması üzerinde gözlemlenmiştir. Gerçek bir seti için, yeni sınıfın özel bir üyesi diğer iyi bilinen dağılım sınıflarının üyelerinden daha iyi uyum sağlamıştır.

Anahtar sözcükler: *Odd log-logistik ailesi; En çok olabilirlik tahmini; Birleştirilmiş sınıf; Sıra istatistikleri.*

1. Introduction

Several continuous univariate models have been extensively used for modeling data in many areas such as insurance, economics, environmental sciences, engineering and biological studies. So, several new families of distributions have been constructed by extending common classes of continuous distributions. These new families of distributions give high flexibility by adding one "or more" parameters to the baseline distribution. Many odd log-logistic-G families can be cited by Alizadeh et al. (2015), Cordeiro et al. (2016a, b), Alizadeh

et al. (2017), Brito et al. (2017), Cordeiro et al. (2017), Alizadeh et al. (2018) and Korkmaz et al. (2018), among others.

Let $G(x; \underline{\phi}) = G(x)$ be a baseline cumulative distribution function (cdf) and $\underline{\phi}$ be the $p \times 1$ vector of associated parameters. Recently, Gleanon and Lynch (2004, 2006 and 2010) introduced a class of distributions called the odd log-logistic family with one extra shape parameter $\alpha > 0$ defined by the cdf

$$H_{OLL-G}(x; \alpha, \underline{\phi}) = G(x; \underline{\phi})^\alpha \left[G(x; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x; \underline{\phi})^\alpha \right]^{-1}, \quad (1)$$

where $\bar{G}(x; \underline{\phi}) = \bar{G}(x) = 1 - G(x; \underline{\phi})$. In this paper, we introduce a new family of distributions called "another odd log-logistic logarithmic-G" (AOLLL-G) family. The cdf of this family is given by

$$F_{AOLLL-G}(x; \alpha, \beta, \underline{\phi}) = 1 - \left\{ \left[\log(1 - \beta) \right]^{-1} \log \left[1 - \frac{\beta \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha}{G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha} \right] \right\}, \quad (2)$$

where $G(x; \underline{\phi})$ is the baseline cdf depending on a parameter vector $\underline{\phi}$ and $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$ are two additional shape parameters. For each baseline G, it includes odd log-logistic (AOLL-G) family by Gleanon and Lynch (2004 and 2006) and logarithmic-G family. Some special models are given in Table 1.

Table 1. Some special models.

α	β	$G(x, \underline{\phi})$	Reduced distribution
-	$\uparrow 1$	$G(x, \underline{\phi})$	OLL-G family [Gleanon and Lynch (2004 and 2006)]
1	-	$G(x, \underline{\phi})$	Logarithmic-G family baseline distribution
1	$\uparrow 1$	$G(x, \underline{\phi})$	$G(x, \underline{\phi})$

This paper is organized as follows. In Section 2, we define the new family. Some of its special cases are presented in Section 3. In Section 4, we derive some of its mathematical properties. Section 5 provides maximum likelihood estimation procedure for model parameters. In Section 6, a simulation study is performed to see the efficiency of maximum likelihood method. In Section 7, we illustrate the importance of the new family by means of an application to real data set. The paper is concluded in Section 8.

2. The new family and its motivation

The corresponding density function of (2) is given by

$$f_{AOLLL-G}(x; \alpha, \beta, \underline{\phi}) = \alpha \beta g(x, \underline{\phi}) G(x, \underline{\phi})^{\alpha-1} \bar{G}(x, \underline{\phi})^{\alpha-1} \times \left\{ \frac{-\left[G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha \right]}{\times \left[G(x, \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta) \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha \right] \log(1 - \beta)} \right\}^{-1}, \quad (3)$$

where $g(x; \underline{\phi})$ is the baseline pdf, $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$. Equation (3) will be most tractable when the cdf $G(x)$ and the pdf $g(x)$ have simple analytic expressions. Hereafter, a random variable X with density function (3) is denoted by $X \sim \text{AOLLL-G}(\alpha, \beta, \underline{\phi})$. Henceforward $G(x) = G(x; \underline{\phi})$ and $g(x) = g(x; \underline{\phi})$ and so on. A motivation of this family can be explained as follows: Suppose that a parallel system is made up of N components and the lifetimes of the components are independent and identically distributed (iid) random variables, denoted as Z_1, \dots, Z_N , with common cdf (2). Then, the system fails

as soon as the last component fails, namely the lifetime of the whole system is represented by $X = \min\{Z_1, \dots, Z_N\}$. In many survival parallel systems, it is almost impossible to have a fixed number of components because some of them get lost or censored for various reasons. Therefore, we may assume that N is a discrete random variable. Suppose that N has the logarithmic distribution with, probability mass function given by

$$P(N = n) = -\beta^n / n \log(1 - \beta), \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \beta < 1.$$

Then the cdf of the life length of the whole system, X , is obtained as

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq x | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [-\beta^n / n \log(1 - \beta)] \left\{ 1 - \left[1 - \frac{G(x, \underline{\phi})^\alpha}{G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha} \right]^n \right\} \\ &= 1 - \left\{ [\log(1 - \beta)]^{-1} \log \left[1 - \frac{\beta \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha}{G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha} \right] \right\} \end{aligned}$$

which is identical to (2). The hazard rate function (hrf) of X becomes

$$\begin{aligned} h(x; \alpha, \beta, \underline{\phi}) &= -\alpha \beta g(x, \underline{\phi}) G(x, \underline{\phi})^{\alpha-1} \bar{G}(x, \underline{\phi})^{\alpha-1} \left[G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[G(x, \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta) \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha \right]^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \log \left[1 - \frac{\beta \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha}{G(x, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x, \underline{\phi})^\alpha} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

3 Special AOLLL-G models

3.1 The AOLLL-normal distribution

We define a new model called AOLLL-normal (AOLLL-N) distribution from (3) by taking $G(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ and $g(x; \mu, \sigma) = \sigma^{-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ with $\underline{\phi} = (\mu, \sigma)$, where $\phi(\cdot)$ and $\Phi(\cdot)$ are the pdf and cdf of the standard normal distribution, respectively. Then, the new pdf can be obtained using (3), where $x \in \mathfrak{R}$, $\mu \in \mathfrak{R}$, $\alpha, \sigma > 0, 0 < \beta < 1$. The pdf of the new model is denoted by AOLLL-N. We plot this pdf and its hrf in Figure 1. From Figure 1, we see that the pdf shapes of the AOLLL-N are skewed and bi-modal.

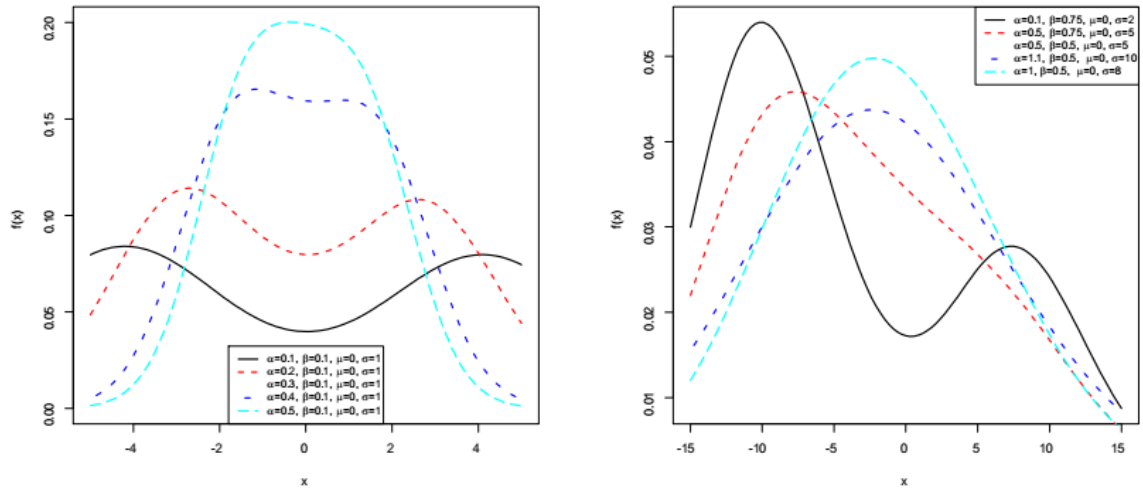


Figure 1. Plots of the pdf and hrf of the AOLLL-N distributions.

3.2 The AOLLL-Weibull distribution

We now consider the Weibull (W) distribution as a baseline distribution with pdf $g(x ; a, b) = ba^b x^{b-1} e^{-(ax)^b}$ and cdf $G(x ; a, \gamma) = 1 - e^{-(ax)^b}$. Then, the new pdf can be obtained via (3), where $x > 0, \alpha, a, b > 0, 0 < \beta < 1$. The new model is denoted by AOLLL-W and its pdf and hrf plots for selected parameter values are displayed in Figure 2. From Figure 2, we see that pdf of the new model have various important shapes, the pdf shapes are decreasing, unimodal, bi-modal, firstly decreasing then unimodal shaped. Also, its hrf shapes are increasing, decreasing, unimodal, bathtub and firstly unimodal and then increasing. So, we can say that new distribution can be useful for modelling various data sets.

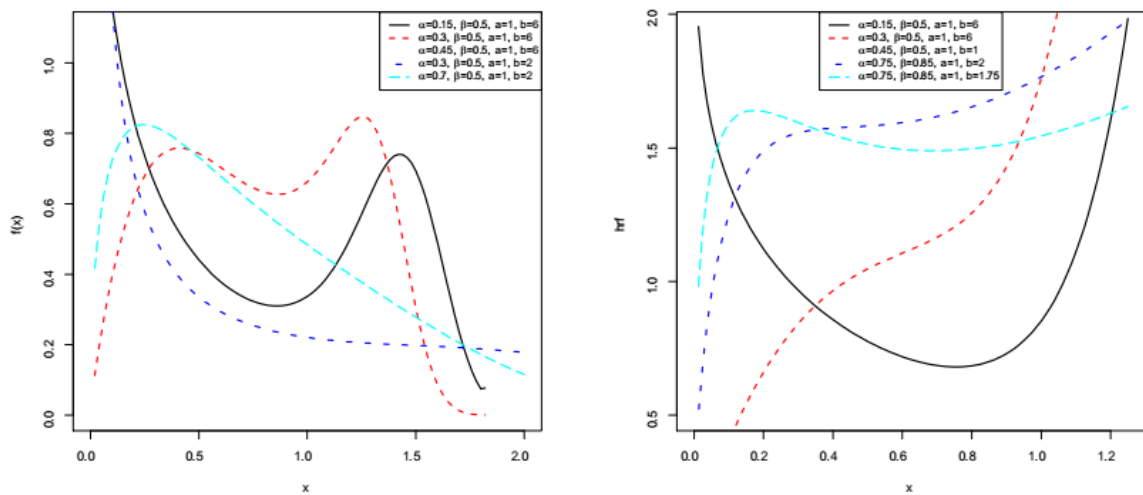


Figure 2. Plots of the pdf and hrf of the AOLLL-W distributions

4 Mathematical properties

4.1 Quantile function

The new family of distributions is easily simulated by inverting (2) as follows: if U has a uniform $U(0, 1)$ distribution, then

$$Q(U) = G^{-1} \left\{ \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \left[1 - (1 - \beta)^{1-u} \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha}}}{\left\{ \frac{1}{\beta} \left[1 - (1 - \beta)^{1-u} \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha}} + \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \left[1 - (1 - \beta)^{1-u} \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha}}} \right\} \quad (5)$$

has the density function (2). Although, we have stated that $\beta \in (0, 1)$, Equation (2) is still a cdf if $\beta < 0$. Hence, we can consider the new family for any $\beta < 1$.

4.2 Useful expansions

By using the power series

$$-\log(1-u) = \sum_{i=1}^{\infty} u^i / i \quad \text{for } |u| < 1,$$

the cdf of the new model follows as

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \bar{G}(x)^{\alpha i} / i \left[G(x)^{\alpha} + [1 - G(x)]^{\alpha} \right]^i, \quad (6)$$

where $|\beta| < 1$. Next, we obtain an expansion for $F(x)$. First, we use a power series for $\bar{G}(x)^{\alpha}$ ($\alpha > 0$ real) given by

$$\bar{G}(x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha) G(x)^k, \quad (7)$$

where

$$a_k(\alpha) = (-1)^k \binom{\alpha}{k}. \quad (8)$$

For any real $\alpha > 0$, we consider the generalized binomial expansion

$$[1 - G(x)]^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} G(x)^k. \quad (9)$$

Also, we have

$$\frac{G(x)^{\alpha i}}{\left\{ G(x)^{\alpha} + [1 - G(x)]^{\alpha} \right\}^i} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha i) G(x)^k}{\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k G(x)^k}_A},$$

where $b_k = h_k^*(\alpha, i)$ is defined in the Appendix. The ratio of the two power series can be expressed as

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha, i) G(x)^k, \quad (10)$$

where the coefficients $c_k(\alpha, i)$'s (for $k \geq 0$) are determined from the recurrence equation

$$c_k(\alpha, i) = \left(a_k(\alpha i) - b_0^{-1} \sum_{r=1}^k b_r c_{k-r}(\alpha, i) \right) / b_0.$$

Then, we can write

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} b_k H_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k H_k(x), \tag{11}$$

where

$$b_k = \sum_{i=1}^{\infty} [\beta^i c_k(\alpha, i)] / i, \quad d_0 = 1 - b_0$$

and for $k \geq 1$, $d_k = b_k$. The pdf of X follows by differentiating (11) as

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1} h_{k+1}(x), \tag{12}$$

where $h_{k+1}(x) = (k+1) G(x)^k g(x)$ is the exponentiated G (Exp-G) density function with power parameter $(k+1)$. Equation (12) reveals that the new density function is a linear combination of Exp-G densities for $|\beta| < 1$. Thus, some structural properties of the new family such as the ordinary and incomplete moments and generating function can be determined from well-established properties of the Exp-G distribution.

4.3 Moments

Let Y_k be a random variable with Exp-G distribution with power parameter $k+1$, i.e., with density $h_{k+1}(x)$. A first formula for the n^{th} ordinary moment of $X \sim \text{AOLLL-G}$ follows from (12) as

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1} E(Y_k^n). \tag{13}$$

A second formula for $E(X^n)$ follows from (12) in terms of the G quantile function (qf) as

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} \tau(n, k), \tag{14}$$

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} \tau(n, k),$$

where $\tau(n, k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x)^k g(x) dx = \int_0^1 Q_G(u)^n u^k du$. For empirical purposes, the shape of many distributions can be usefully described by what we call the incomplete moments. These types of moments play an important role for measuring inequality, for example, income quantiles and Lorenz and Bonferroni curves, which depend upon the incomplete moments of a distribution. The n^{th} incomplete moment of X is calculated as

$$m_n(y) = E(X^n | X < y) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} \int_0^{G(y)} Q_G(u)^n u^k du. \tag{15}$$

The last integral can be computed for most G distributions.

4.4 Generating function

Let $M_X(t) = E(e^{tX})$ be the moment generating function (mgf) of X . Then, we can write from (12) as

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1} M_k(t), \quad (16)$$

where $M_k(t)$ is the mgf of Y_k . Hence, $M_X(t)$ can be determined from the Exp-G generating function.

A second formula for $M(t)$ can be determined from (12) as

$$M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (k+1) d_{k+1} \zeta(t, k), \quad (17)$$

where

$$\zeta(t, k) = \int_0^1 \exp[tQ_G(u)] u^k du = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[tx] G(x)^k dx.$$

4.5 Order statistics

Order statistics make their appearance in many areas of statistical theory and practice. Suppose that X_1, \dots, X_n is a random sample from the new class. Let $X_{i:n}$ denote the i^{th} order statistic. From equations (2) and (3), the pdf of $X_{i:n}$ can be written as

$$f_{i:n}(x) = K \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \left[\sum_{r=0}^{\infty} d_{r+1} (r+1) G(x)^r g(x) \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} d_k G(x)^k \right]^{j+i-1},$$

where $K = n! / [(i-1)! (n-i)!]$ for a power series raised to a positive integer number. Following Gradshteyn and Ryzhik (2000) for power series raised, we obtain

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} d_k G(x)^k \right]^{j+i-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e_{j+i-1, k} G(x)^k,$$

where

$$e_{j+i-1, 0} = d_0^{j+i-1} \text{ and, for } k \geq 1,$$

$$e_{j+i-1, k} = \binom{k}{d_0}^{-1} \sum_{q=1}^k [q(j+i) - k] d_q e_{j+i-1, k-q}.$$

Setting $d_r^* = (r+1)d_{r+1}$ for multiplying two power series, we have

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(x) &= K \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} g(x) \left[\sum_{r=0}^{\infty} d_r^* G(x)^r \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} e_{j+i-1, k} G(x)^k \right] \\
 &= K \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} g(x) \sum_{k=0}^{\infty} e_k^* G(x)^k,
 \end{aligned}$$

where

$$e_k^* = \sum_{q=0}^k e_{j+i-1, q} d_{k-q}^*.$$

Hence, we can write

$$f_{i:n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k h_{k+1}(x), \tag{18}$$

where (for $k \geq 0$)

$$s_k = \frac{k}{k+1} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} e_k^*.$$

Equation (18) is the main result of this section. It reveals that the pdf of the AOLLL-G order statistics is a linear combination of Exp-G densities when $-1 < \beta < 1$. So, several mathematical quantities of the new family order statistics can be obtained from those quantities of the Exp-G distribution.

4.6 Entropies

The Rényi entropy (Rényi, 1961), of a random variable with pdf $f(x)$ is defined by

$$I_R(\gamma) = (1-\gamma)^{-1} \log \left[\int_0^{\infty} f^\gamma(x) dx \right],$$

for $\gamma > 0$ and $\gamma \neq 1$. The Shannon entropy (Shannon, 1948) of a random variable X is defined by $E\{-\log[f(X)]\}$. It is the special case of the Rényi entropy when $\gamma \uparrow 1$. Direct calculation gives

$$\begin{aligned}
 E\{-\log[f(X)]\} &= -\log\{\alpha\beta/[-\log(1-\beta)]\} - E\{\log[g(X; \underline{\phi})]\} + (1-\alpha)E\{\log[G(X; \underline{\phi})]\} \\
 &\quad + (1-\alpha)E\{\log[\bar{G}(X; \underline{\phi})]\} + 2E\{\log[G(X; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(X; \underline{\phi})^\alpha]\} \\
 &\quad + E\left[\log\left(1 - \left\{\beta\bar{G}(X, \underline{\phi})^\alpha / [G(X, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(X, \underline{\phi})^\alpha]\right\}\right)\right].
 \end{aligned}$$

First, we define and compute

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4; \alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{u^{a_1} (1-u)^{a_2}}{[u^\alpha + (1-u)^\alpha]^{a_3} \left[1 - \frac{\beta(1-u)^\alpha}{u^\alpha + (1-u)^\alpha}\right]^{a_4}} du.$$

By using the binomial expansion, we have (for $-1 < \beta < 1$)

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4; \alpha, \beta) = \sum_{i, j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{-a_4}{i} \binom{a_2 + \alpha}{j} \int_0^1 \beta^i \underbrace{\frac{u^{a_1+j}}{[u^\alpha + (1-u)^\alpha]^{a_3+i}}}_{A_{u_1}} du.$$

Further

$$A_{u_1} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* u^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* u^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* u^k$$

where

$$a_k^* = \sum_{q=k}^{\infty} \binom{a_1 + j}{q} \binom{q}{k} (-1)^{k+q},$$

$b_k^* = h_k^*(\alpha, a_3 + i)$ is defined in Appendix and the coefficients c_k^* 's for $k \geq 0$ are obtained from the following recurrence equation

$$c_k^* = c_k^*(a_1, a_3, \alpha, i, j) = \left(a_k^* - b_0^{*-1} \sum_{r=1}^k b_r^* c_{k-r}^* \right) / b_0^*.$$

Then,

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4; \alpha, \beta) = \sum_{i, j=0}^{\infty} \beta^i (-1)^{i+j} \binom{-a_4}{i} \binom{a_2}{j} c_k^*(a_1, a_3, \alpha, i, j) / (1+k).$$

After some algebraic manipulations, we obtain

$$E\{\log[G(X)]\} = \frac{\alpha\beta}{-\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha+t-1, \alpha-1, 2, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\},$$

$$E\{\log[\bar{G}(X)]\} = \frac{\alpha\beta}{-\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha+t-1, 2, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\},$$

$$E\{\log\{G(X; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(X; \underline{\phi})^\alpha\}\} = \frac{\alpha\beta}{-\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha-1, 2-t, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\},$$

$$E\left\{ \log \left[1 - \frac{\beta \bar{G}(X, \underline{\phi})^\alpha}{G(X, \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(X, \underline{\phi})^\alpha} \right] \right\} = \frac{\alpha\beta}{-\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha-1, 2, 1-t; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\}.$$

Then the simplest formula for the entropy of X is given by

$$\begin{aligned} E\{-\log[f(X)]\} &= -\log\{\alpha\beta/[-\log(1-\beta)]\} - E\{\log[g(X; \phi)]\} \\ &\quad - \frac{\alpha(1-\alpha)\beta}{\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha+t-1, \alpha-1, 2, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha(1-\alpha)\beta}{\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha+t-1, 2, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\} \\ &\quad - \frac{2\alpha\beta}{\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha-1, 2-t, 1; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha\beta}{\log(1-\beta)} \left\{ \partial[A(\alpha-1, \alpha-1, 2, 1-t; \alpha, \beta)|_{t=0}] / \partial t \right\}. \end{aligned}$$

For the Rényi entropy, after some algebraic developments, we obtain an alternative expression

$$I_R(\gamma) = \gamma(1-\gamma)^{-1} \log\{\alpha\beta/[-\log(1-\beta)]\} + (1-\gamma)^{-1} \log[B(\alpha, \beta, \gamma)],$$

where

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 \frac{g^{\gamma-1}[G^{-1}(u)] u^{(\alpha-1)\gamma} (1-u)^{(\alpha-1)\gamma}}{\left[u^\alpha + (1-u)^\alpha\right]^{2\gamma} \left[1 - \frac{\beta(1-u)^\alpha}{u^\alpha + (1-u)^\alpha}\right]^\gamma} du.$$

By using the binomial expansion, we have

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \beta^i \binom{-\gamma}{i} \binom{\gamma(\alpha-1) + \alpha - i}{j} \\ &\quad \times \int_0^1 \left\{ g^{\gamma-1}[G^{-1}(u)] \right\} \underbrace{\frac{u^{\gamma(\alpha-1)+j}}{\left[u^\alpha + (1-u)^\alpha\right]^{2\gamma+i}}}_{A_{i2}} du. \end{aligned}$$

Further,

$$A_{i2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k}^* u^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k}^* u^k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k}^* u^k,$$

where

$$a_{1,k}^* = \sum_{q=k}^{\infty} \binom{(\alpha-1)\gamma + j}{q} \binom{q}{k} (-1)^{k+q},$$

$b_{1,k}^* = h_k^*(\alpha, 2\gamma + i)$ is defined in Appendix and the coefficients $c_{1,k}^*$'s for $k \geq 0$ are obtained from the following recurrence equation

$$c_k^* = c_{1,k}^*(\gamma, \alpha, i, j) = \left(a_k^* - b_0^{*-1} \sum_{r=1}^k b_{1,r}^* c_{1,k-r}^* \right) / b_0^*.$$

Finally

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i, j, k=0}^{\infty} a_{i, j, k} E_{Y_k} \left\{ g^{\gamma-1} (G^{-1}(Y)) \right\},$$

where

$$a_{i, j, k} = (-1)^{i+j} \beta^i c_{1, k}^* (\gamma, \alpha, i, j) \binom{-\gamma}{i} \binom{\gamma(\alpha-1) + \alpha - i}{j} / (k+1)$$

and $Y_k \sim \text{Beta}(k+1, 1)$.

5 Estimation and Inference

Here, we determine the MLEs of the model parameters of the new family from complete samples. Let x_1, \dots, x_n be the observed values from the new family of distributions with parameters α, β and $\underline{\phi}$. Let $\Theta = (\alpha, \beta, \underline{\phi})^T$ be the parameter vector. The total log-likelihood function for Θ is then given by

$$\begin{aligned} \ell_n = \ell_n(\Theta) = & n \log \left\{ \alpha \beta / [-\log(1 - \beta)] \right\} + \sum_{i=1}^n \log [g(x_i; \underline{\phi})] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log [G(x_i; \underline{\phi}) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})] \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \log [G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha] - \sum_{i=1}^n \log [G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha]. \end{aligned} \quad (19)$$

The log-likelihood function can be maximized either directly or by solving the nonlinear likelihood equations obtained by differentiating (19). We use the goodness of fit function in R and NLMixed procedure in SAS to obtain the MLEs. The components of the score function $U_n(\Theta) = (\partial \ell_n / \partial \alpha, \partial \ell_n / \partial \beta, \partial \ell_n / \partial \underline{\phi})^T$ are

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n}{\partial \alpha} = & -2 \sum_{i=1}^n \frac{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha \log [G(x_i; \underline{\phi})] + (1 - \beta) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha \log [\bar{G}(x_i; \underline{\phi})]}{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha \log [G(x_i; \underline{\phi})] + \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha \log [\bar{G}(x_i; \underline{\phi})]}{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha} \\ & + n \alpha^{-1} + \sum_{i=1}^n \log [G(x_i; \underline{\phi}) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell_n}{\partial \beta} = n \beta^{-1} + n [(1 - \beta) \log(1 - \beta)]^{-1} + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha}{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta) \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_n}{\partial \underline{\phi}} = & \sum_{i=1}^n \frac{g^{(\underline{\phi})}(x_i, \underline{\phi})}{g(x_i, \underline{\phi})} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{G^{(\underline{\phi})}(x_i, \underline{\phi})}{G(x_i, \underline{\phi})} + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{G^{(\underline{\phi})}(x_i, \underline{\phi})}{\bar{G}(x_i, \underline{\phi})} \\ & - 2\alpha \sum_{i=1}^n \frac{G^{(\underline{\phi})}(x_i, \underline{\phi}) [G(x_i; \underline{\phi})^{\alpha-1} - (1 - \beta)\bar{G}(x_i; \underline{\phi})^{\alpha-1}]}{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + (1 - \beta)\bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha}, \\ & - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{G^{(\underline{\phi})}(x_i, \underline{\phi}) [G(x_i; \underline{\phi})^{\alpha-1} - \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^{\alpha-1}]}{G(x_i; \underline{\phi})^\alpha + \bar{G}(x_i; \underline{\phi})^\alpha}. \end{aligned}$$

where $h^{(\underline{\phi})}(\cdot)$ means the derivative of the function h with respect to $\underline{\phi}$.

6 Simulation study

In here, we obtain the graphical results to see MLEs of the model parameters. We generate $N = 1000$ samples of size $n = 20, 21, \dots, 500$ from AOLLL-W distribution with selected parameters values $\alpha = 2$, $\beta = 0.25$, $a = 2$ and $b = 0.5$. The random numbers generation is obtained by its quantile function. We also calculate the empirical means, standard deviations (sd), bias and mean square error (MSE) of the MLEs. The bias and MSE are calculated by (for $h = \alpha, \beta, a, b$)

$$Bias_h = N^{-1} \sum_{i=1}^N (\hat{h}_i - h) \quad \text{and} \quad MSE_h = N^{-1} \sum_{i=1}^N (\hat{h}_i - h)^2$$

respectively. All computations are obtained by using optim-CG routine in R program. We give results of this simulation study in Figure 3. From Figure 3, we observe that when the sample size increases, the empirical means for all parameters approach to true parameter value whereas the all biases, sd's and MSEs decrease as expected.

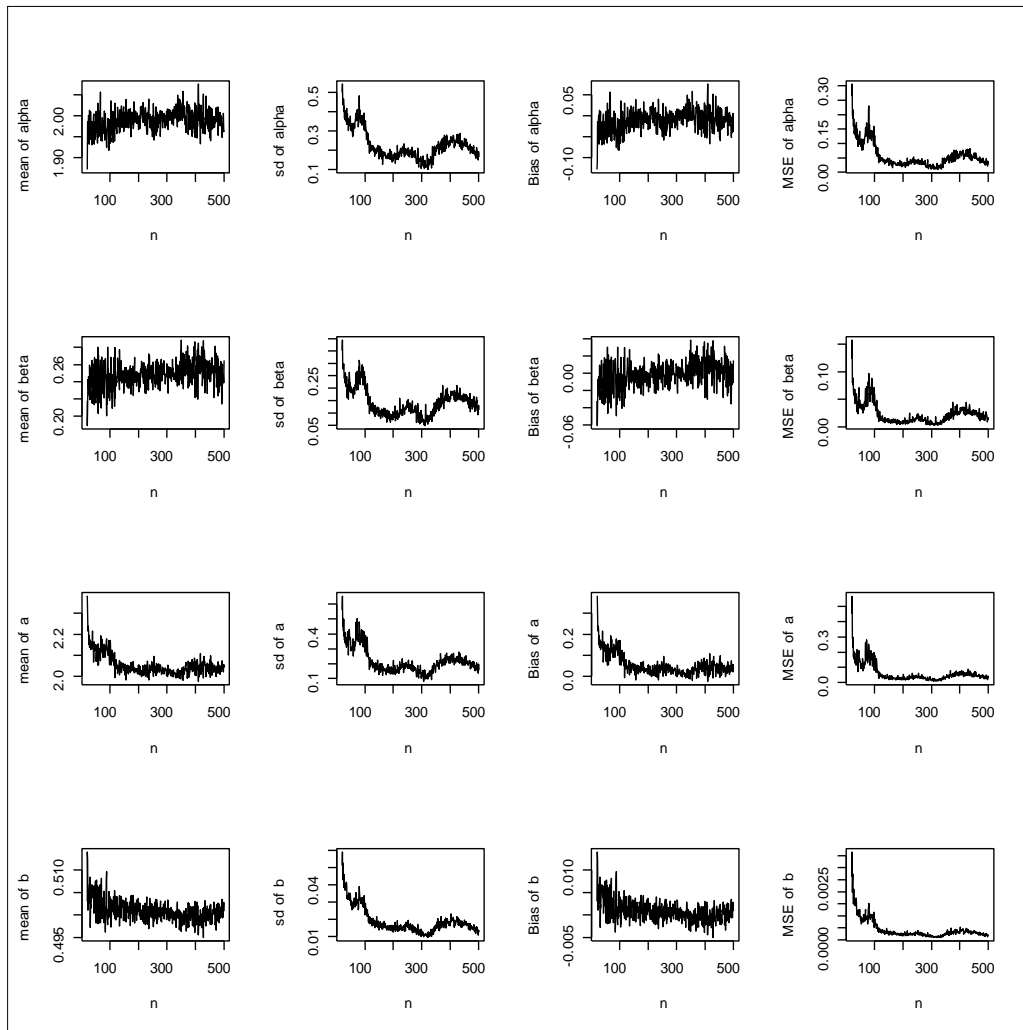


Figure 3. Simulation results for the AOLLL-W distribution.

7 An Application

In this section, we illustrate the flexibility of the AOLLL-W distribution on the real data set. We also compare this model with the beta Weibull (BW) model by Famoye et al. (2005), Kumaraswamy Weibull (KwW) model by Cordeiro, et al. (2010), odd log-logistic Weibull (OLL-W) model by Cruz et al. (2017) and generalized odd log-logistic Weibull (GOLL-W) model by Cordeiro et al. (2017). The cdfs of these models are given by (for $x > 0$, $\alpha, \beta, a, b > 0$):

$$F_{BW}(x) = B^{-1}(\alpha, \beta) \int_0^{1-\exp(-(bx)^a)} \omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1} d\omega, \quad ,$$

$$F_{KwW}(x) = 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-(bx)^a} \right)^\alpha \right]^\beta$$

$$F_{GOLL-W}(x) = \left(1 - e^{-(bx)^a}\right)^{\alpha\beta} \left[\left(1 - e^{-(bx)^a}\right)^{\alpha} + \left(1 - \left(1 - e^{-(bx)^a}\right)^{\beta}\right)^{\alpha} \right]^{-1}$$

and

$$F_{OLL-W}(x) = \left(1 - e^{-(bx)^a}\right)^{\alpha} \left[\left(1 - e^{-(bx)^a}\right)^{\alpha} + e^{-\alpha(bx)^a} \right]^{-1},$$

where $B(\alpha, \beta)$ is the complete beta function. To compare AOLLL-W model with above models process has been done under the estimated log-likelihood values $\hat{\ell}$, Akaike Information Criteria (AIC), Cramer von Mises (W^*) and Anderson-Darling (A^*) goodness of-fit statistics for all distribution models. We note that The AIC is by given by $AIC = -2\hat{\ell} + 2p$ where p is the number of the estimated model parameters and n is sample size. The W^* and A^* statistics have been described as

$$W^* = \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{F}(x_{(i)}) - [i - 0.5] n^{-1} \right\}^2 + (12n)^{-1}$$

and

$$A^* = -\sum_{i=1}^n \left[(2i - 1) n^{-1} \right] \left[\ln \hat{F}(x_{(i)}) + \ln \hat{F}(x_{(n+1-i)}) \right] - n.$$

It can be seen for W^* and A^* statistics Chen and Balakrishnan (1995) and Evans et al. (2008). In general, it can be chosen as the best model which has the smaller the values of the AIC, W^* and A^* statistics and the larger the values of $\hat{\ell}$. All computations are performed by the maxLike routine in the R programme. The real data set is the stress-rupture life of kevlar 49/epoxy strands which are subjected to constant sustained pressure at the 90% stress level until all had failed. This data set was studied by Andrews and Herzberg (1985) and Cooray and Ananda (2008). The data are: 0.01, 0.01, 0.02, 0.02, 0.02, 0.03, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.09, 0.09, 0.1, 0.1, 0.11, 0.11, 0.12, 0.13, 0.18, 0.19, 0.2, 0.23, 0.24, 0.24, 0.29, 0.34, 0.35, 0.36, 0.38, 0.4, 0.42, 0.43, 0.52, 0.54, 0.56, 0.6, 0.6, 0.63, 0.65, 0.67, 0.68, 0.72, 0.72, 0.72, 0.73, 0.79, 0.79, 0.8, 0.8, 0.83, 0.85, 0.9, 0.92, 0.95, 0.99, 1, 1.01, 1.02, 1.03, 1.05, 1.1, 1.1, 1.11, 1.15, 1.18, 1.2, 1.29, 1.31, 1.33, 1.34, 1.4, 1.43, 1.45, 1.5, 1.51, 1.52, 1.53, 1.54, 1.54, 1.55, 1.58, 1.60, 1.63, 1.64, 1.8, 1.8, 1.81, 2.02, 2.05, 2.14, 2.17, 2.33, 3.03, 3.03, 3.34, 4.2, 4.69, 7.89. In the applications, the information about the hazard shape can help in selecting a model. For this aim, a device called the total time on test (TTT) plot (Aarset, 1987) is useful. The TTT plot is obtained by plotting $T\left(\frac{r}{n}\right)$ against r/n where $T\left(\frac{r}{n}\right) = \left[\sum_{i=1}^n y_{(i)} + (n-r) y_{(r)} \right] / \sum_{i=1}^n y_{(i)}$, $r = 1, \dots, n$ and y_i are the order statistics of the sample. It is convex shape for decreasing hrf and is concave shape for increasing hrf. The TTT plot for the kevlar data in Figure 4 deals with convex-concave-convex shaped.

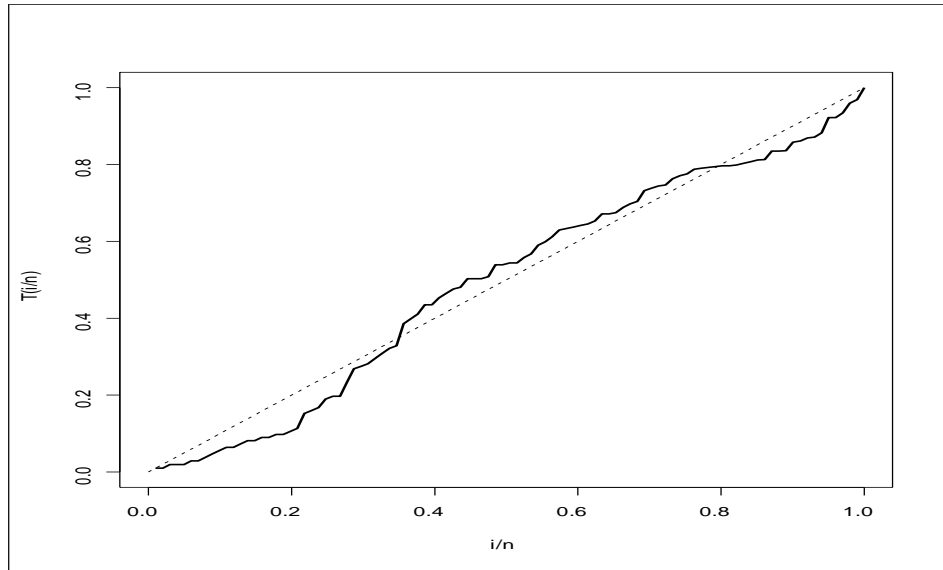


Figure 4. TTT plot for the kevlar data

The MLEs of all models parameters, $\hat{\ell}$, their standard errors, AIC, W^* and A^* statistics are given in Table mle. As it can be seen from Table MLE, the AOLLL-W model could be chosen as the best model among the fitted models under the comparing statistics.

Table 2. MLEs, standard errors of the estimates (in parentheses), $\hat{\ell}$, AIC, W^* and A^* statistics.

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{a}	\hat{b}	$-\hat{\ell}$	AIC	A^*	W^*
AOLLL-W	1.0520 (0.2562)	-18.1865 (6.8255)	0.7106 (0.1097)	2.8107 (0.6321)	101.7842	211.5684	0.7087	0.1187
GOLL-W	1.1651 (0.9266)	0.6119 (0.8888)	1.1100 (0.4325)	0.6195 (0.9775)	102.7667	213.5335	0.9353	0.1563
KwW	0.7358 (0.1818)	0.2288 (0.0274)	1.0252 (0.0214)	3.7984 (0.0196)	102.6115	213.2231	0.8577	0.1388
BW	0.7119 (0.1183)	0.2188 (0.0244)	1.0753 (0.0332)	3.5333 (0.3835)	102.2966	212.5933	0.7924	0.1280
OLL-W	0.8893 (0.1946)		1.0396 (0.1285)	1.0194 (0.1773)	102.8435	211.6869	1.0140	0.1813

The plots of the fitted pdfs, cdfs and hrfs of all models are displayed in Figures 5-7. These plots also show that the AOLLL-W model has the best fitting to these data compared to the other models. The fitted hrf of the AOLLL-W model provides better fitting than other models.

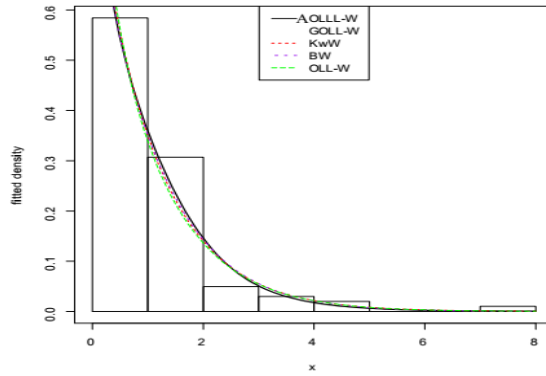


Figure 5. Fitted pdfs for the data set.

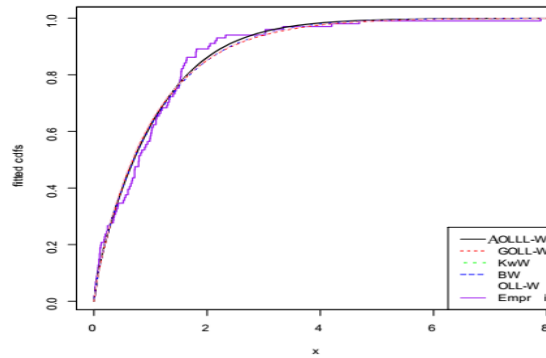


Figure 6. Fitted cdfs for the data set.

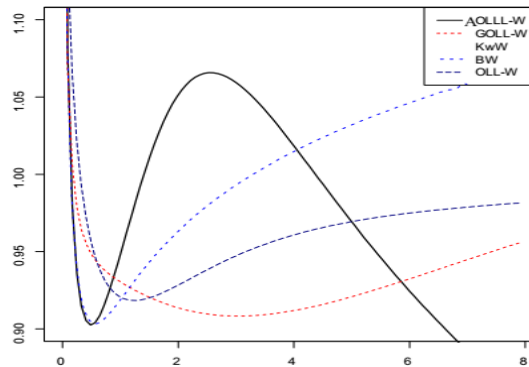


Figure 7. Fitted hrfs for the data set.

8 Conclusions

In this work, we present a new class of distributions called another odd log-logistic logarithmic-G (AOLL-G) family of distributions. The mathematical properties of this new family are provided. The model parameters are estimated by the maximum likelihood estimation method and the observed information matrix is determined. Simulation results to assess the performance of the maximum likelihood estimators are discussed. It is shown that a special case of the new class can provide a better fit than other models generated by well-known families.

References

- [1] M. V. Aarset, 1987, How to identify a bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability*, 36, 106-108.
- [2] D. F. Andrews, A. M. Herzberg, 1985, Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker, Springer Series in Statistics, New York.
- [3] M. Alizadeh, M. Emadi, M. Doostparast, M. G. M. Cordeiro, E.M.M. Ortega, R. R. Pescim, 2015. Kumaraswamy odd log-logistic family of distributions: Properties and applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44, 1491-1512.
- [4] M. Alizadeh, F. Lak, M. Rasekhi, T. G. Ramires, H. M. Yousof, E. Altun, 2017, The odd log-logistic Topp Leone G family of distributions: heteroscedastic regression models and applications. *Computational Statistics*, 33, 1217-1244.
- [5] M. Alizadeh, H.M. Yousof, M. Rasekhi, E. Altun, E. 2018, The odd log-logistic Poisson-G Family of distributions, *Journal of Mathematical Extensions*, 12-1.
- [6] E. Brito, G.M. Cordeiro, H. M. Yousof, M. Alizadeh, G. O. Silva, 2017, Topp-Leone odd log-logistic family of distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87, 3040- 3058.
- [7] G. Chen, N. Balakrishnan, 1995, A general purpose approximate goodness-of-fit test. *Journal of Quality Technology*, 27, 154-161.
- [8] K. Cooray, M. M. Ananda, 2008, A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37, 1323-1337.
- [9] G.M. Cordeiro, M. Alizadeh, E. M. M. Ortega, L. H. V. Serrano, 2016a, The Zografos Balakrishnan odd log-logistic family of distributions: Properties and Applications. *Hacet. J. Math. Stat*, 45, 1781-1803.
- [10] G. M. Cordeiro, M. Alizadeh, G. Ozel, B. Hosseini, B. E. M. M. Ortega, E. Altun, 2017, The generalized odd log-logistic family of distributions: properties, regression models and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87, 908-932.
- [11] G. M. Cordeiro, M. Alizadeh, M. H. Tahir, M. Mansoor, M. Bourguignon, G. G. Hamedani, (2016b). The beta odd log-logistic generalized family of distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45, 1175-1202.
- [12] J. N. D. Cruz, E. M. M. Ortega, G.M. Cordeiro, 2016, The log-odd log-logistic Weibull regression model: modelling, estimation, influence diagnostics and residual analysis. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86, 1516-1538.
- [13] D. L. Evans, J. H. Drew, L. M. Leemis, 2008, The distribution of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, and Anderson-Darling test statistics for exponential populations with estimated parameters, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37, 1396-1421.
- [14] F. Famoye, C. Lee, O. Olumolade, 2005, The beta-Weibull distribution, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 4, 121-136.
- [15] J. U. Gleaton, J. D. Lynch, 2004, On the distribution of the breaking strain of a bundle of brittle elastic fibers, *Adv. Appl. Probab.* 36, 98-115.
- [16] J. U. Gleaton, J. D. Lynch, 2006, Properties of generalized log-logistic families of lifetime distributions, *J. Probab. Stat. Sci.* 4, 51-64.
- [17] J. U. Gleaton, J. D. Lynch, 2010, Extended generalized log-logistic families of lifetime distributions with an application. *J. Probab. Stat. Sci.* 8, 1-17.
- [18] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, 2000, *Table of Integrals, Series and Products*, San Diego, Academic Press.
- [19] M. Ç. Korkmaz, H. M. Yousof, G. G. Hamedani, 2018, The exponential Lindley odd log-logistic G family: properties, characterizations and applications. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 17, 554-571.
- [20] A. Renyi, 1961, On measures of entropy and information. - In: *Neymann, J. (ed.), Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Probabil. (Vol. 1). Univ. of California Press*, 547-561.
- [21] C. Shanon, 1948, A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.* 27, 379-423.

Appendix: Useful power series

It can be seen Gradshteyn and Ryzhik (2000) for following equations.

By expanding z^λ in Taylor series, we can write

$$z^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)_k (z-1)^k / k! = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i, \tag{A1}$$

where

$$f_i = f_i(\lambda) = \sum_{k=i}^{\infty} (\lambda)_k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} / k!$$

and $(\lambda)_k = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$ is the descending factorial. Further, we obtain an expansion for $[G(x)^a + \bar{G}(x)^a]^c$. We can write

$$[G(x)^a + \bar{G}(x)^a]^c = \sum_{j=0}^{\infty} t_j G(x)^j,$$

where

$$t_j = t_j(a) = a_j(a) + (-1)^j \binom{a}{j}.$$

Then, using (A1), we have

$$[G(x)^a + \bar{G}(x)^a]^c = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} t_j G(x)^j \right)^i,$$

where $f_i = f_i(c)$. Finally, we obtain

$$[G(x)^a + \bar{G}(x)^a]^c = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(a, c) G(x)^j,$$

where $h_j(a, c) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i m_{i, j}$ and for $i \geq 0$

$$m_{i, j} = (j - t_0)^{-1} \sum_{m=1}^j [m(j+1) - j] t_m m_{i, j-m} \text{ (for } j \geq 1) \text{ and } m_{i, 0} = t_0^i.$$



A new zero-inflated regression model with application

Emrah Altun

Bartın Üniversitesi

İstatistik Bölümü, Bartın 74100, Türkiye

emrahaltun@bartin.edu.tr

 0000-0001-5065-2523

Abstract

In this paper, a new zero-inflated regression model, called Zero-Inflated Poisson-Lindley regression model, is proposed for count data modeling. Poisson-Lindley distribution arises from the Poisson distribution when its parameter follows a Lindley distribution. Contrary to Poisson distribution, Poisson-Lindley distribution allows for over-dispersion. Therefore, a new model is good candidate to model the over-dispersed and zero-inflated data sets. Application of proposed model to real data set is given and compared with Poisson and Zero-Inflated Poisson regression models. Empirical findings reveal that the Zero-Inflated Poisson-Lindley regression model provides better fits than Zero-Inflated Poisson regression model for zero-inflated and over-dispersed data set.

Keywords: Poisson-Lindley distribution; Over-dispersion; Inflated models; Power series distribution.

Öz

Yeni sıfır yığılmalı regresyon modeli ve uygulaması

Bu çalışmada, sayım verilerinin modellenmesi için sıfır yığılmalı Poisson-Lindley regresyon modeli olarak adlandırılan yeni bir sıfır yığılmalı regresyon modeli önerilmiştir. Poisson-Lindley dağılımı, Poisson dağılımının parameteresinin Lindley dağılımına sahip olduğu durumda ortaya çıkmaktadır. Poisson dağılımının aksine, Poisson-Lindley dağılımı aşırı yayılıma izin verir. Bu nedenle, yeni model aşırı yayımlı ve sıfır yığılmalı veri kümelerini modellemek için iyi bir seçenektir. Önerilen modelin gerçek veri seti üzerine uygulaması verilmiş, Poisson ve Zero-Inflated Poisson regresyon modelleriyle karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulgular, sıfır yığılmalı Poisson-Lindley regresyon modelinin, sıfır yığılmalı ve aşırı yayılım gösteren veri seti için, sıfır yığılmalı Poisson regresyon modelinden daha iyi uyum sağladığını göstermektedir.

Anahtar sözcükler: Poisson Lindley dağılımı, Aşırı yayılım, Yığılmalı modeller, Güç serisi dağılımı.

1. Introduction

Researches on the modeling of the count data in many fields such as insurance, public health, epidemiology, psychology etc. have been shown a great interest in the past two decades. Poisson regression model is widely used model for modeling the count data. It is widely documented that the count data displays over-dispersion. Using the Poisson distribution as an assumptional distribution on dependent variable causes the underestimated standard errors and damages the significance of regression parameters. In this case, quasi-Poisson regression model can be used to model the over-dispersion. Besides the quasi-Poisson regression model, researchers have been proposed alternative models for solving the over-dispersion problem such as Poisson-inverse Gaussian, Poisson-Lognormal and Negative Binomial regression models (see for details, Denuit et al. (2007)).

Count data has another phenomena, called as zero-inflation. Zero-inflation is occurred when the number of zero outcomes are higher than the represented by Poisson distribution. It is widely seen in data sets related to insurance and health. Zero-inflated regression models, such as Zero-inflated Poisson (ZIP) and Zero-inflated Negative-Binomial (ZINB), have been proposed to model the zero-inflated data sets. ZINB regression model can be more appropriate choice than ZINB regression model when the count data still exhibits over-dispersion. There are several researches on the Poisson and ZIP regression models in recent years. For example Avcı et al. (2015), Ismail and Zamani (2013), Lord et al. (2005) and Ayati and Abbasi (2014). Avcı et al. (2015) compared the Poisson, Negative Binomial, Conway-Maxwell-Poisson regression models in modeling the over-dispersed alga data. Ismail and Zamani (2013) compared the generalized Poisson and Negative Binomial regression models in modeling the Malaysian claim data and German healthcare data. Lord et al. (2005) compared the Poisson and Negative Binomial regression models in modeling the crash data. Ayati and Abbasi (2014) used the zero-inflated regression model to investigate the effective factors on frequency and severity of accidents on urban highways. Recently, Xavier et al. (2017) introduced an extension of zero-inflated Poisson-Lindley distribution, called as zero-modified Poisson-Lindley and demonstrated the usefulness of the proposed distribution in case of inflation of zeros and deflation of zeros.

The goal of this paper is to introduce an alternative zero-inflated regression model for count data modeling. For this goal, Poisson-Lindley distribution is applied to count data regression models for zero-inflated case. The advantage of Poisson-Lindley distribution in comparison with Poisson distribution is to allow the modeling of the over-dispersed dependent variable. The usefulness of proposed regression model is illustrated by means of real data application.

The rest of the paper is organized as follows: In section 2, count data models are presented. In Section 3, real data application is given to demonstrate the usefulness of proposed model against to Poisson and Zero-inflated Poisson regression models. Some concluding remarks are given in Section 4.

2. Zero-Inflated Poisson-Lindley regression model

In Poisson regression, the dependent variable y_i is modeled by,

$$P(y_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!} \quad (1)$$

where the conditional variance is equal to conditional mean, $E(y_i | x_i) = V(y_i | x_i) = \lambda_i = \exp(x_i^T \beta)$. The log-likelihood function of Poisson regression model is given by,

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i x_i^T \beta - \exp(x_i^T \beta) - \ln(y_i!)] \quad (2)$$

The regression coefficients, β , can be estimated by maximum likelihood method. The derivative of log-likelihood function with respect to vector of coefficients, β , is set equal to zero,

$$\frac{d\ell(\beta)}{d\beta} = \sum_{i=1}^n (y_i - e^{x_i^T \beta}) x_i = 0 \quad (3)$$

Estimation of regression parameters in (3) can be obtained by means of the Newton-Raphson iteration procedure. Zero-inflated distributions come from the zero-inflated power series distribution. Zero-inflated power series distribution is given by,

$$P(y_i|w_0, \theta) = \begin{cases} w_0 + (1-w_0)f(y_i|\theta), & y_i = 0 \\ (1-w_0)f(y_i|\theta), & y_i > 0 \end{cases} \quad (4)$$

where $f(y_i|\theta)$ is the probability mass function (pmf) of power series distribution and w_0 represents the degenerated part at zero. The most used discrete one parameter exponential families belong to the power series family is Poisson distribution. Using the Equation (4), the pmf of ZIP regression model is given by,

$$P(y_i) = \begin{cases} w_i + (1-w_i)e^{-\lambda_i}, & y_i = 0 \\ (1-w_i) \frac{\lambda_i^{y_i} e^{-\lambda_i}}{y_i!}, & y_i > 0 \end{cases} \quad (5)$$

where $0 \leq w_i < 1$. In ZIP model, the mean of Poisson distribution, λ_i is linked to a regression of independent variables, x_i by log link function and the probability of zero process, w_i to a regression of independent variables, z_i by logit link function. Log link function and logit link function can be given as follows:

$$\begin{aligned} \log(\lambda_i) &= x_i^T \beta \\ \log\left(\frac{w_i}{1-w_i}\right) &= z_i^T \gamma \end{aligned} \quad (6)$$

where β and γ are vectors of regression parameters. The log-likelihood function of ZIP regression model is given by,

$$\begin{aligned} \ell(\beta, \gamma) &= \sum_{y_i=0} \ln[\exp(z_i^T \gamma) + \exp(-\exp(x_i^T \beta))] + \sum_{y_i>0} [y_i x_i^T \beta - \exp(x_i^T \beta) - \ln(y_i!)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \ln([1 + \exp(z_i^T \gamma)]) \end{aligned} \quad (7)$$

The log-likelihood function (7) can be maximized using the statistical softwares such as R, MATLAB, S-PLUS etc.

Here, we introduce the Zero-inflated Poisson-Lindley (ZIPL) regression model. Poisson-Lindley (PL) distribution arises from the Poisson distribution when its parameter follows a Lindley distribution. PL distribution was introduced by Sankaran (1970) for modeling the count data. The pmf of PL distribution is given by,

$$P(y_i) = \frac{\theta^2 (y + \theta + 2)}{(\theta + 1)^{y+3}}, \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \theta > 0 \quad (8)$$

The mean and variance of PL distribution are given by,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(\theta + 2)}{\theta(\theta + 1)} \\ \sigma^2 &= \frac{\theta^3 + 4\theta^2 + 6\theta + 2}{\theta^2(\theta + 1)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Variance of PL distribution can be rewritten as follows:

$$\sigma^2 = \mu \left(1 + \frac{\theta^2 + 4\theta + 2}{\theta(\theta+1)(\theta+2)} \right) > \mu \tag{10}$$

As seen from (10), PL distribution is over-dispersed. Figure 1 displays the pmf shapes of PL distribution for various values of θ . It is clear that when the parameter θ increases, the degree of skewness to right increases.

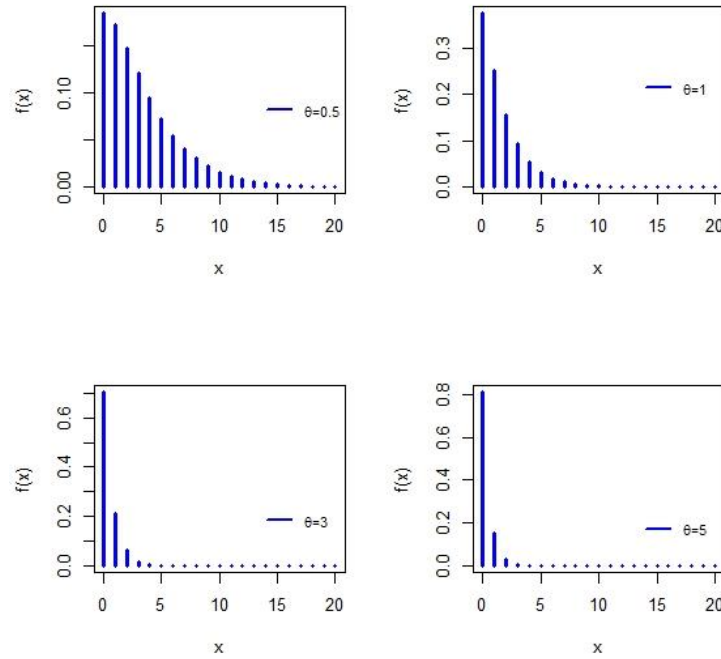


Figure 1. The pmf plots of Poisson-Lindley distribution for various parameters.

Let $\theta = \left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1} \right) / 2\mu$, then, PL distribution can be given by

$$P(y_i) = \frac{\left[\left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1} \right) / 2\mu \right]^2 \left(y + \left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1} \right) / 2\mu + 2 \right)}{\left(\left(1 + \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1} \right) / 2\mu \right)^{y+3}} \tag{11}$$

Using the Equation (4) and (11), Zero-inflated PL (ZIPL) distribution is given by

$$P(y_i) = \begin{cases} w_i + (1-w_i) \frac{\left[\left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu \right]^2 \left(\left[\left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu \right] + 2 \right)}{\left[\left\{ \left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu \right\} + 1 \right]^3}, & y_i = 0 \\ (1-w_i) \frac{\left[\left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu \right]^2 \left(y + \left(1 - \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu + 2 \right)}{\left(\left(1 + \mu + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}\right) / 2\mu \right)^{y+3}}, & y_i > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Note that when the parameter $w_i = 0$, ZIPL distribution reduces to PL distribution. In ZIPL regression model, the mean of PL distribution, μ_i is linked to a regression of independent variables, x_i by log link function, $\log(\mu_i) = x_i^T \beta$, and the probability of zero process, w_i to a regression of independent variables, z_i by logit link function $\text{logit}(w_i) = z_i^T \gamma$. The link function is chosen by considering the domain of the mean of response variable. Since the mean of PL distribution, μ_i , is defined on \mathbb{R}^+ , the log-link function is suitable choice for linking the covariates to mean of the response variable. The log-likelihood function of ZIPL regression model is obtained as

$$\ell(\beta, \gamma) = \sum_{y_i=0} \ln \left[\frac{\frac{\exp(z_i^T \gamma)}{1 + \exp(z_i^T \gamma)} + \left(1 - \frac{\exp(z_i^T \gamma)}{1 + \exp(z_i^T \gamma)}\right)}{\left[\left(1 - \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\mu \right]^2 \left(\left[\left(1 - \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\exp(x_i^T \beta) \right] + 2 \right)}{\left[\left\{ \left(1 - \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\exp(x_i^T \beta) \right\} + 1 \right]^3} \right] + \sum_{y_i>0} \ln \left[\frac{\left[\left(1 - \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\exp(x_i^T \beta) \right]^2 \left(y + \left(1 - \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\exp(x_i^T \beta) + 2 \right)}{\left(1 + \exp(z_i^T \gamma)\right) \left(\left(1 + \exp(x_i^T \beta) + \sqrt{\exp(x_i^T \beta)^2 + 6 \exp(x_i^T \beta) + 1}\right) / 2\exp(x_i^T \beta) \right)^{y+3}} \right] \quad (13)$$

The log-likelihood function (13) can be maximized using the statistical softwares. The **optim()** function of the R software is used to minimize the minus log-likelihood function given in (13). The function **optim()** is a function that can provide basic optimization capabilities and widely used functions in R. It contains several algorithms such as Nelder–Mead, quasi-Newton, conjugate-gradient and stochastic annealing algorithms. The parameter estimates in the model can be obtained using several initial values to guarantee the convergence to the global optimum. The estimated parameters of ZIP model is used as initial values for parameter estimation of ZIPL model.

3. Empirical Study

3.1. Data description

The data set of United States National Medical Expenditure Survey (NMES) for 1987/1988 is used to compare the proposed model with other competitive models. The data set is available in **countreg** package of R software. The response variable, (y_i) , number of physician visits is modeled by the following covariates: number of hospital stay (x_{i1}) , number of chronic conditions, (x_{i2}) , gender (x_{i3}) , number of years of education, (x_{i4}) , and indicator of private insurance (x_{i5}) . The descriptive statistics of used data set is given in Table 1.

Table 1. Descriptive statistics of NMES data set.

Variables	Min	Max	Mean	Median
Number of physician visits	0	89	5.77	4
Number of hospital stay	0	8	0.295	0
Number of chronic conditions	0	8	1.542	1
Gender(0:female, 1:male)	0	1	-	1
Number of years of education	0	18	10.291	11
Private insurance(0:no, 1:yes)	0	1	-	1

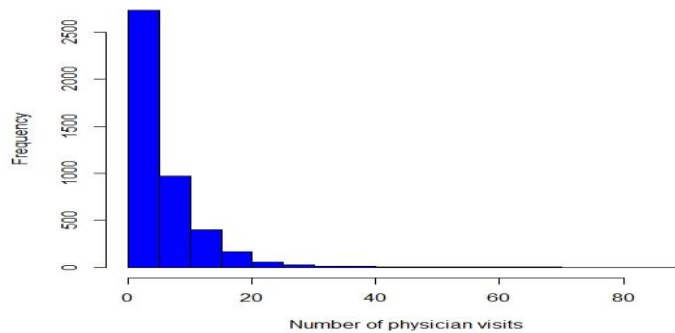


Figure 2. Histogram for the number of physician visits.

As seen from the Figure 2, the histogram of the number of physician visits is highly peaked at zero value.

3.2. Empirical Results

Here, NMES data set is modeled with Poisson, PL, ZIP andZIPL regression models. Table 1 shows the estimated $-\ell$, Akaike Information Criteria (AIC) and Bayesian Information Criteria (BIC). The smallest values of these statistics shows the best model. As seen from Table 1, ZIPL model has the smallest values of these statistics. Therefore, ZIPL regression model can be chosen as the best model for fitted data set.

Table 1. The goodness-of-fit statistics of fitted models for the NMES data set

Model Selection Criteria	P	PL	ZIP	ZIPL
$-\ell$	18151.35	12244.82	16293.57	12143.77
AIC	36314.70	24501.64	32611.14	24311.54
BIC	36353.04	24539.98	32687.83	24388.23

The test introduced by Cameron and Trivedi (1998) is used to test over-dispersion. The test statistic is asymptotically distributed as normal with zero mean and unit variance. The obtained test statistic is $z = 12.131$ and corresponding p value is $< 2.2 \times 10^{-16}$. Therefore, the dependent count data variable is over-dispersed. Van den Broek (1995) proposed the score test for testing whether the Poisson distribution provides sufficient representation for the frequency of zero observation. Score test statistic is given by

$$T_s(Y) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1_{\{y_i=0\}} - \tilde{p}_0}{\tilde{p}_0} \right)^2 \left[\left(\frac{1 - \tilde{p}_0}{\tilde{p}_0} \right) - n\bar{y} \right]^{-1}$$

where $\tilde{p}_0 = \exp(-\hat{\lambda})$ and n is the number of observations. Under the null hypothesis score test statistics is asymptotically distributed as χ^2 distribution with 1 degree of freedom. Score test statistic and corresponding p value are obtained as 33438.0888 and $< 2.2 \times 10^{-16}$, respectively. According to score test result, it is concluded that Poisson distribution is insufficient to represent frequency of zero values in the dataset.

Table 2 shows the estimated parameters of fitted models and corresponding standard errors and p values. It is observed that the estimates of all parameters, except γ_0 and γ_1 , are found significant at 5% level of significance as p value for all the parameter estimates are less than 5% level of significance.

Table 2. The estimated parameters of fitted models and corresponding standard errors and p values for the NMES data set.

Covariates	Poisson			PL			ZIP			ZIPL		
	Est.	S.E	p-value	Est.	S.E	p-value	Est.	S.E	p-value	Est.	S.E	p-value
β_0	0.987	0.037	<0.001	0.925	0.076	<0.001	1.446	0.037	<0.001	1.235	0.085	<0.001
β_1	0.182	0.006	<0.001	0.233	0.018	<0.001	0.175	0.006	<0.001	0.218	0.019	<0.001
β_2	0.175	0.004	<0.001	0.200	0.010	<0.001	0.129	0.004	<0.001	0.154	0.011	<0.001
β_3	-0.116	0.013	<0.001	-0.135	0.028	<0.001	-0.065	0.013	<0.001	-0.090	0.030	<0.001
β_4	0.022	0.002	<0.001	0.022	0.004	<0.001	0.015	0.002	<0.001	0.016	0.004	<0.001
β_5	0.183	0.017	<0.001	0.195	0.036	<0.001	0.061	0.017	<0.001	0.101	0.040	<0.001
Zero-inflation model coefficients												
γ_0	-	-	-	-	-	-	0.287	0.222	0.196	0.564	0.455	0.216
γ_1	-	-	-	-	-	-	-0.310	0.091	<0.001	-0.756	0.405	0.062
γ_2	-	-	-	-	-	-	-0.542	0.044	<0.001	-1.303	0.181	<0.001
γ_3	-	-	-	-	-	-	0.418	0.089	<0.001	0.633	0.205	<0.001
γ_4	-	-	-	-	-	-	-0.056	0.012	<0.001	-0.089	0.027	<0.001
γ_5	-	-	-	-	-	-	-0.751	0.102	<0.001	-1.190	0.224	<0.001

4. Conclusion

In this study, Zero-inflated Poisson-Lindley regression model is proposed and applied to real data set. The modeling ability of proposed regression model is compared with Zero-inflated Poisson regression model. Empirical findings show that proposed model provides more accurate fitting performance than Poisson regression model and its zero-inflated case. We hope that the results given in this paper will be useful for researchers and practitioners studying in field of count data modeling.

References

- [1] M. Sankaran, 1970, The Discrete Poisson-Lindley Distribution, *Biometrics*, 145-149.
- [2] M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, J. F. Walhin, 2007, *Actuarial modelling of claim counts: Risk classification, credibility and bonus-malus systems*, John Wiley & Sons.
- [3] E. Avcı, S. Alturk, E. N. Soylu, E, 2015, Comparison count regression models for overdispersed alga data, *IJRRAS*, 25(1), 1-5.
- [4] N. Ismail, H. Zamani, 2013, Estimation of claim count data using negative binomial, generalized Poisson, zero-inflated negative binomial and zero-inflated generalized Poisson regression models, *In Casualty Actuarial Society E-Forum*, 41(20),1-18.
- [5] D. Lord, S.P. Washington, J.N. Ivan, 2005, Poisson, Poisson-gamma and zero-inflated regression models of motor vehicle crashes: balancing statistical fit and theory, *Accident Analysis and Prevention*, 37, 35-46.
- [6] E. Ayati, E. Abbasi, 2014, Modeling Accidents on Mashhad Urban Highways, *Open Journal of Safety Science and Technology*, 4, 22-35.
- [7] D. Xavier, M. Santos-Neto, M. Bourguignon, V. Tomazella, 2017, Zero-Modified Poisson-Lindley distribution with applications in zero-inflated and zero-deflated count data. *arXiv preprint arXiv:1712.04088*.
- [8] J. Van den Broek, 1995, A score test for zero inflation in a Poisson distribution. *Biometrics*, 738-743.



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 11, 2018, 2, 81-92

Geliş/Received:24.05.2018, Kabul/Accepted: 04.11.2018

www.istatistikciler.org

Uygulama Makalesi / Application Article

Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin nokta tahmini

Özlem Türkşen

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi,
İstatistik Bölümü,
Ankara, Türkiye
turksen@ankara.edu.tr

 [0000-0002-5592-1830](https://orcid.org/0000-0002-5592-1830)

Fikret Akgün

T.C. Enerji Piyasaları
Düzenleme Kurumu
Ankara, Türkiye

fikretakgun1990@hotmail.com

 [0000-0002-6689-9901](https://orcid.org/0000-0002-6689-9901)

Öz

Bu çalışmada, Nelder-Mead Simpleks (NMS) algoritması ve Genetik Algoritma (GA) gibi türevden bağımsız optimizasyon algoritmalarının avantajlı yönlerinin birlikte kullanılması ile oluşturulan bir Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile doğrusal olmayan model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesine yer verilmiştir. Ayrıca, Taguchi deney tasarımı ile GA ayarlanabilir parametrelerinin optimal değerlerinin belirlenmesi konusunda çalışılmıştır. Çalışmada, önerilen optimizasyon yaklaşımları kullanılarak, literatürde tanımlı bir veri setine uygun olarak belirlenmiş negatif-üstel regresyon model parametrelerinin nokta tahminleri elde edilmiştir. Bulunan tahmin değerleri, literatürdeki tahmin sonuçları ile karşılaştırıldığında, Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile model parametrelerinin tahminlerine kolaylıkla ulaşıldığı ve amaç fonksiyonunun minimum değerine tutarlı bir biçimde yaklaşıldığı gözlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Doğrusal olmayan regresyon; Parametrelerin nokta tahmini; Genetik Algoritma (GA); Nelder-Mead Simpleks (NMS) Algoritması; Hibrit algoritma; Taguchi deney tasarımı.

Abstract

Point estimation of nonlinear regression model parameters with Genetic-Simplex hybrid algorithm

In this study, a Genetic-Simplex hybrid algorithm, which is composed of advantageous aspects of derivative-free optimization algorithms, such as Nelder-Mead Simplex (NMS) algorithm and Genetic Algorithm (GA), is used to obtain point estimates of nonlinear regression model parameters. In addition, it is studied to decide optimal values of GA tuning parameters by using Taguchi experimental design. In the study, point estimates of the parameters of a negative-exponential regression model, defined in the literature in accordance with a data set, are obtained by using the proposed optimization approaches. When the obtained results are compared with the results given in the literature, it is seen from the comparative results that estimates of model parameters are easily obtained and consistently approximated to the minimum value of the objective function by using Genetic-Simplex hybrid algorithm.

Keywords: Nonlinear regression; Point estimations of the parameters; Genetic Algorithm (GA); Nelder-Mead Simplex (NMS) Algorithm; Hybrid algorithm; Taguchi experimental design.

1. Giriş

Gerçek dünyada karşılaşılan bir probleme ilişkin gözlenen veri seti için, rastgelelik ve rastgele hata kavramlarını göz ardı etmeden, veri kümesindeki açıklayıcı ve açıklanan değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişki yapısının minimum hata ile tanımlanması istenir. Bu amaçla en çok kullanılan istatistiksel modelleme yöntemi regresyon analizidir. Doğrusal regresyon modellemesine yönelik analizlerin kullanımı yaygın olmasına rağmen, mevcut veri kümesinde açıklanan ve açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişki yapısının oluşturulmasında doğrusal olmayan regresyon analizinden de yararlanır. Matematiksel olarak bir modelin parametrelerine göre doğrusal olmaması, o modelin parametrelerine göre birinci türevleri (kısmi türevleri) alındığında elde edilen sonuçların model parametrelerine bağlı olması durumu olarak tanımlanabilir [2].

Doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesine ilişkin yapılan hesaplamalarda güçlüklerle karşılaşılmasına rağmen Marquardt [13], Hartley ve Booker [9], Gallant [6], Seber ve Wild [16] doğrusal olmayan regresyon modellerinde istatistiksel sonuç çıkarımı konusunda çalışmalar yapmışlardır. Doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametre tahmin edicilerinin analitik ifadesi kolaylıkla elde edilemediğinden, Jennrich [11], Malinvaud [12], Box [4], Gallant ve Fuller [5] çalışmalarında yer verdikleri tahmin ve hipotez testi konuları için asimptotik ifadelerden ve doğrusal yaklaşımlardan faydalanmışlardır. Bates ve Watts [3], çalışmalarında doğrusal olmayan regresyon modelleri konusunda açıklayıcı örneklere yer vermişlerdir.

Yapılan temel çalışmalar dikkatle incelendiğinde, doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin tahmini için en çok uygulanan yaklaşımın, türeve dayalı yinelemeli algoritmalar (örneğin, Gauss-Newton, En Hızlı İniş, Levenberg-Marquardt) kullanılarak, hata kareler toplamının en küçüklemesine dayalı olarak oluşturulan en küçük kareler (EKK) yönteminin uygulanması olduğu görülmüştür. Fakat, türeve dayalı algoritmalar ile yapılan eniyileme çalışmalarında problem için global değere yakınsayamama, yerel çözüm tuzaklarına takılma gibi sorunlar ortaya çıkabilmektedir. Ayrıca, bu yöntemler başlangıç çözüm değeri bilgisine ihtiyaç duyduğundan, parametrelerin başlangıç çözüm değerlerinin iyi belirlenememesi durumunda problem için optimal çözüme ulaşmanın oldukça zaman alıcı ve bazen mümkün olmadığı görülmüştür. Bu gibi dezavantajlarından dolayı türeve dayalı optimizasyon algoritmalarına alternatif olarak türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları ile doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesi de mümkündür.

Bu çalışmada, türevden bağımsız arama algoritmaları olan Nelder-Mead Simpleks (NMS) algoritması ve Genetik Algoritma (GA)'nın avantajlı yönlerinin bir arada kullanılması ile oluşturulan, Türkşen [18], Türkşen ve Tez [19] çalışmalarında önerdikleri hibrit algoritma yaklaşımına benzer olarak tanımlanan bir Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesine yer verilmiştir. NMS algoritması, Nelder-Mead [14] tarafından geliştirilmiş simpleks esaslı bir arama algoritması olup, bölgesel olarak tanımlanmış bir alanda türevden bağımsız yaklaşımla tek nokta aramaya dayalı, pratik ve etkili sonuçlar veren bir optimizasyon algoritmasıdır. GA ise, temelleri Holland [10] tarafından evrim mekanizmasının bilgisayar sistemine aktarılması ile oluşturulmuş, popülasyon tabanlı aramaya dayalı başlangıç çözüm değeri bilgisine ihtiyaç duymayan sezgisel bir optimizasyon algoritmasıdır. GA'nın doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin tahmininde kullanımı Altunkaynak ve Esin [1] çalışmalarında görülebilir.

NMS algoritmasının ve GA'nın ayarlanabilir (tunable / tuning) parametrelerinin probleme uygun tanımlanması, en iyi çözümün elde edilmesinde oldukça önemlidir. Özellikle GA ile elde edilecek model parametre tahmin değerleri, GA'nın ayarlanabilir parametre değerlerinden oldukça etkilenebilmektedir. Bu nedenle, GA için etkili bir ayarlanabilir parametre değerlerini belirleme yaklaşımına ihtiyaç olduğu düşünülmüştür. Bu çalışmada, en az sayıda deney ile en uygun GA ayarlanabilir parametre kombinasyonuna ulaşmak için etkili bir deney tasarımı yöntemi olan Taguchi deney tasarımından yararlanılmıştır. GA ayarlanabilir parametrelerinin olabilecek çok sayıda farklı kombinasyonları arasından seçim yapmak, güvenilir ve detaylı bir hesaplama yaklaşımı olmasına rağmen zaman alıcı olabilmektedir. Bu nedenle, en uygun GA ayarlanabilir parametre kombinasyonunun seçimine ihtiyaç duymadan

yürütülen Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile de oldukça düşük hata değerine sahip parametre tahminlerine ulaşıldığı gözlenmiştir.

Çalışmanın 2. Bölümünde, doğrusal olmayan regresyon modellerinin genel yapısı tanımlanarak, model parametrelerinin nokta tahminlerini elde etmek amacıyla EKK yöntemi kullanılarak oluşturulan amaç fonksiyonlarının belirlenmesine yer verilmiştir. Çalışmanın 3. Bölümünde, doğrusal olmayan regresyon modellerinin nokta tahminlerinin bulunmasında kullanılan türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları NMS ve GA hakkında bilgiler verilerek, bu iki algoritmanın hibriti ile oluşturulmuş olan Genetik-Simpleks hibrit algoritmasının adımları tanımlanmıştır. Ayrıca, GA'nın ayarlanabilir parametrelere düzeylerinin belirlenmesinde kullanılan Taguchi deney tasarım yöntemine yer verilmiştir. Çalışmanın 4. Bölümünde, literatürde tanımlı, Bates ve Watts [3] tarafından yapılan çalışmadan alınmış olan, "mikroorganizmaların biyokimyasal oksijen ihtiyacı (Biochemical Oxygen Demand-BOD)" olarak adlandırılmış veri setine ilişkin, negatif-üstel regresyon yapısına göre modellenmiş olan bir doğrusal olmayan regresyon modeli incelenmiştir. Analiz sonuçlarının değerlendirilmesine çalışmanın 5. Bölümünde yer verilmiştir.

2. Doğrusal olmayan regresyon modeli

2.1. Genel matematiksel yapısı

Parametrelerine göre doğrusal olmayan regresyon modelinin genel matematiksel yapısı vektörel formda

$$Y = f(X, \theta) + \varepsilon \quad (1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, Y , $n \times 1$ boyutlu açıklayıcı değişken vektörü; X , $n \times q$ boyutlu tasarım matrisi; θ , $q \times 1$ boyutlu model parametre vektörü ve ε , $n \times 1$ boyutlu rastgele hata vektörüdür. Modelin rastgele hata vektörünün, $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$, $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ ve $\varepsilon \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ varsayımlarını sağladığı kabul edilir. Ayrıca, f fonksiyonunun biçimsel olarak bilindiği, sürekli olduğu, parametre vektörüne göre en az iki defa türevinin alınabildiği de varsayımlar arasındadır.

2.2. Parametrelerin nokta tahmini için amaç fonksiyonu

Eşitlik (1) ile tanımlı modelde, f fonksiyonu biçimsel olarak bilinmesine rağmen oluşturduğu yüzey doğrusal değildir. Model parametrelerinin nokta tahminlerini elde etmek amacıyla f fonksiyonunun dönüşüm yapılarak doğrusallaştırılması durumunda, parametrelerin fiziksel gerçekliğine uygun olarak tahmin edilememesi söz konusu olabilir. Bu nedenle, doğrusal olmayan model için tanımlanan varsayımları dikkate alarak yapılan genel çözüm yaklaşımı

$$\phi(\theta) = \varepsilon' \varepsilon = (Y - f(X, \theta))' (Y - f(X, \theta)) \quad (2)$$

biçiminde tanımlı hata kareler toplamını amaç fonksiyonu olarak ele alıp, bu amaç fonksiyonunu minimum yapan parametre vektörünün elde edilmesi olarak tanımlanabilir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen parametre değerleri, parametrelerin EKK tahmin değerleri olarak bilinmektedir. Eşitlik (2) ile tanımlı ϕ fonksiyonunun minimizasyonu, kısıtsız bir optimizasyon problemi olarak ele alınabilir. Türeve dayalı optimizasyon algoritmaları ile problemin en iyilenmesi için ϕ fonksiyonunun model parametrelerine göre türevlerinin alınıp, kısmi türev fonksiyonlarının elde edilmesi gerekir. f fonksiyonunun parametrelerine göre doğrusal olmayan bir fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulduğunda, kısmi türev fonksiyonları da bilinmeyen parametrelerin fonksiyonları olacağından, analitik çözümlerin elde edilmesinin zorlayıcı olacağı açıktır. Ayrıca, türeve dayalı algoritmalar ile optimizasyonda, parametrelerin başlangıç değerlerinin belirlenmesi problemi de söz konusu olacaktır. Bu gibi nedenlerden dolayı, çalışmada, türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları ile hibrit yaklaşım

kullanılarak ϕ fonksiyonunu minimum yapacak model parametre tahminlerinin elde edilmesi hedeflenmiştir.

3. Türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları ve hibrit algoritma

Doğrusal olmayan regresyon model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesinde en çok izlenen yaklaşım, türeve dayalı yinelemeli algoritmalar kullanılarak modele en küçük kareler (EKK) yönteminin uygulanmasıdır. Fakat, bu algoritmalar kullanılarak yapılan aramalarda, model parametrelerinin başlangıç değerlerinin iyi tanımlanamadığı durumlarda yerel çözüm tuzaklarına takılma, global çözüme yakınsayamama gibi sorunlar ortaya çıkabilmektedir. Türev bilgisinin elde edilemediği, elde edilse bile türev bilgisi kullanımının pratik olmadığı problemlerin çözümünde kullanılan türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları, problemin çözümü için belirlenen kurallar çerçevesinde yinelemeli olarak ilerleyen, her yinelemede elde edilen sonuçları kullanarak optimal sonuca ulaşmaya çalışan algoritmalar [15].

3.1. Nelder-Mead Simpleks algoritması

Nelder-Mead Simpleks (NMS) algoritması, doğrusal olmayan modellerin optimizasyonunda, tek nokta aramalara dayalı, türev bilgisine ihtiyaç duymayan bir stokastik optimizasyon algoritmasıdır. NMS algoritması, Spendley vd. [17] tarafından tanıtılan simpleks esaslı arama algoritmasındaki yansıma ve küçülme operasyonlarına, Nelder-Mead [14] tarafından eklenen genişleme ve büzülme operasyonları ile geliştirilerek, doğrusal olmayan modellerin optimizasyonu için kullanılır biçime getirilmiştir. q sayıda parametreye sahip bir doğrusal olmayan regresyon modelinde, öncelikli olarak seçilen $q+1$ tane parametre tahmin vektörünün amaç fonksiyon değerlerinin bulunması ile işleme başlanır. Parametre tahminleri, ϕ amaç fonksiyonundaki değerlerine göre sıralanır. Sıralama işleminde, en düşük amaç fonksiyonu değerine sahip parametre tahmin vektörü (L), en düşük ikinci amaç fonksiyonu değerine sahip parametre tahmin vektörü (S), en yüksek amaç fonksiyonu değerine sahip parametre tahmin vektörü (H) ve en yüksek ikinci amaç fonksiyonu değerine sahip parametre tahmin vektörü (N) belirlenir. Sıralama işlemi sonrasında NMS algoritmasında sırasıyla yansıma, genişleme, büzülme ve küçülme operasyonları uygulanır. Bu operasyonlara ilişkin NMS ayarlanabilir parametreleri $\alpha (>0)$, $\beta (>1)$, $\gamma (0 < \gamma < 1)$ ve $\sigma (0 < \sigma < 1)$ ile tanımlıdır. Yapılan çalışmalarda genellikle bu parametre değerleri, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1/2$ ve $\sigma = 1/2$ olacak biçimde seçilir [8]. Her yineleme sonucunda algortmada bulunan $q+1$ parametre tahmin vektörü ϕ fonksiyonu değerine göre yeniden sıralanır ve L , H , S , N parametre tahmin vektörleri güncellenir. Böylece, NMS algoritması, bu operasyonlar ile adım adım ilerleyerek belirlenmiş iyi bir başlangıç çözüm değeri ile amaç fonksiyonu değerini en küçük yapacak parametre tahminine yakınsar. Algoritma, amaç fonksiyon değerlerinin birbirine çok yaklaşması veya belirli bir yineleme sayısına ulaşılması durumlarından birinin gerçekleşmesi yoluyla sonlandırılır.

3.2. Genetik Algoritma

Genetik algoritma (GA), evrim sürecini taklit ederek nesiller sonucunda "en iyi" çözümlerin topluluk içinde çoğunluğu oluşturması ve belli bir kuşak sayısı sonunda bu çözümler içinden de en iyisinin seçilmesine dayalı oluşturulmuş popülasyon tabanlı, türevden bağımsız, bir stokastik optimizasyon algoritmasıdır. Evrimin bilgisayar bilimlerine entegre edilmesinde 1950'li yıllardan itibaren pek çok bilim insanının katkısı olmasına rağmen GA kavramı John Holland ve öğrencileri tarafından geliştirilmiştir. Holland [10], GA konulu çalışmalarını "Adaptation in Natural and Artificial Systems" isimli kitabında toparlayıp, yayınlamıştır. Holland'ın öğrencilerinden Goldberg [7] ise yaptığı çalışmaları ile GA'nın tanınmasına büyük katkı sağlamıştır. GA, evrim ilkelerinin bilgisayar ortamına uyarlanması fikrine dayandığından genetik biliminde kullanılan pek çok terim (gen, kromozom, popülasyon, kuşak sayısı) GA için uyarlanmıştır.

GA, başlangıç popülasyonunun oluşturulması, uygunluk değerinin hesaplanması, genetik operatör işlemlerinin (seçim, çaprazlama, mutasyon) uygulanması, yeni kuşak popülasyonunun oluşturulması ve durdurma koşulunun kontrolü gibi adımlardan oluşmaktadır. Burada, genetik operatörler, GA'da evrim sürecinin taklit edildiği bölümdür. Önceki çözümlere göre yeni çözümlerin daha başarılı olması genetik operatörler aracılığı ile sağlanır. Bu nedenle genetik operatörlerin seçimi önemlidir. Literatürde tanımlı mevcut seçim yöntemleri (örneğin, rulet tekerleği, stokastik uniform, remainder, rank, turnuva), çaprazlama yöntemleri (tek nokta, iki nokta, scattered, aritmetik, heuristic) ve mutasyon yöntemleri (uniform, adaptive feasible) arasından probleme uygun kombinasyon seçimi önemlidir. Genetik operatörlerin yanı sıra, popülasyon büyüklüğü ve kuşak sayısının seçimi de model parametrelerinin tahminini etkileyen diğer GA ayarlanabilir parametreleridir.

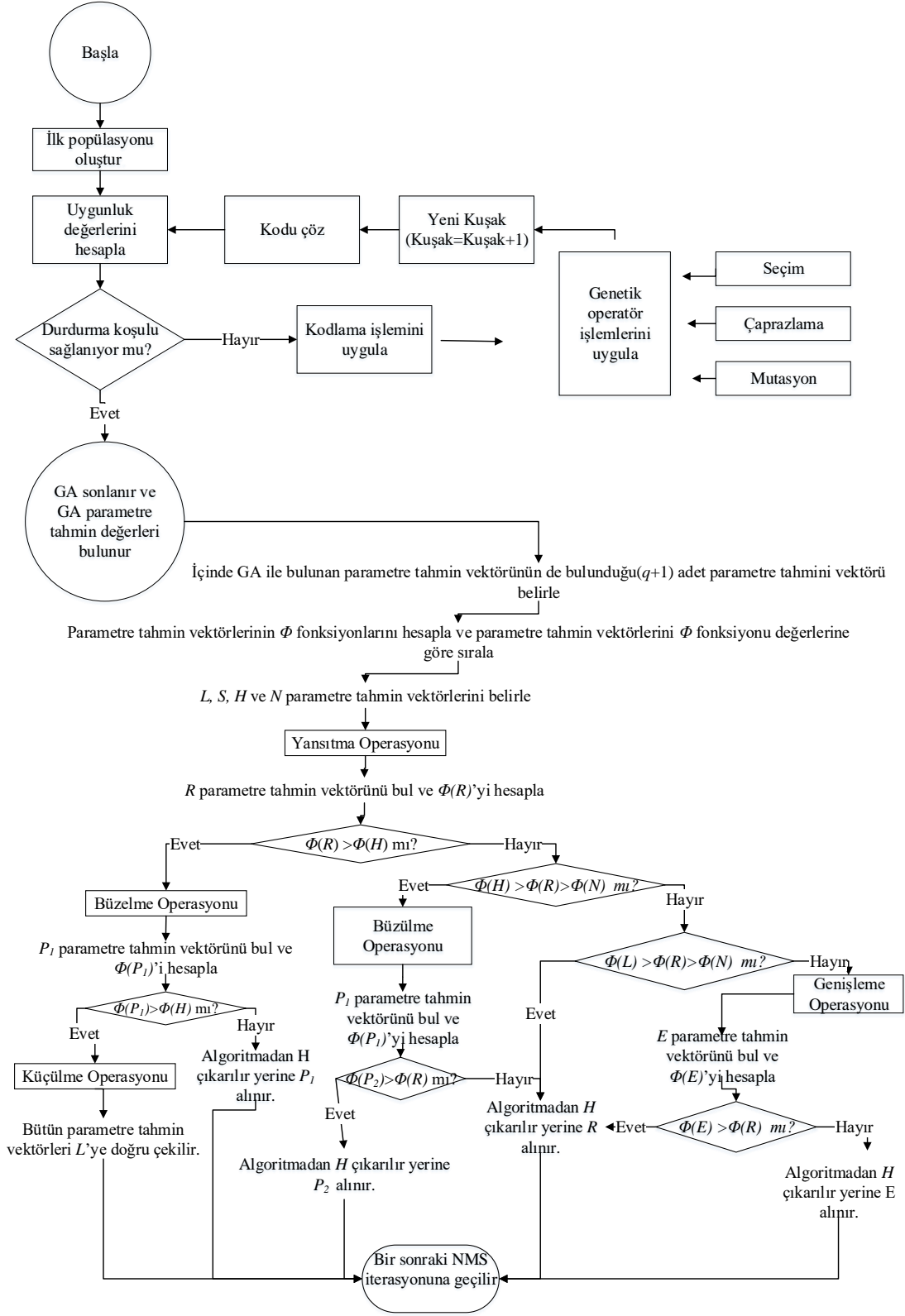
GA ayarlanabilir parametrelerinin kombinasyonları arasından seçim yapmak ciddi emek ve zaman kayıplarına yol açacağından, etkili ve güçlü bir GA araması için ayarlanabilir parametre değerlerini belirleme yöntemine ihtiyaç vardır. Bu amaçla çalışmada, etkin ayarlanabilir parametre kombinasyonuna ulaşabilmek için Taguchi deney tasarımı kullanılmıştır. Taguchi deney dizilimlerinin hazırlanmasında dikey dizilim kullanılmıştır. Dikey dizinlerden üretilen Taguchi tablolarının gösterimi $T_n(s^k)$ biçimindedir. Burada, n , dizindeki deneme sayısı (sıra sayısı), s , düzey sayısı (eleman sayısı) ve k etken sayısıdır (sütun sayısıdır). Akgün [2] çalışmasında, oluşturulma biçimlerine göre Taguchi tasarım sınıflandırmalarına ve Taguchi dizininde kullanılan üreteç matrislerinin oluşturulmasına yer verilmiştir.

3.3. Genetik-Simpleks hibrit algoritması

NMS algoritması ve GA'nın avantajlı yönlerinin bir arada kullanılması ile oluşturulan Genetik-Simpleks hibrit algoritmasında, öncelikle GA ile global arama yapılarak, geniş arama uzayı daraltılır. Daha sonra, GA ile bulunan model parametre tahminleri NMS için model parametrelerinin başlangıç değerleri olarak kabul edilerek, en iyi çözümün bulunduğu bölgeye indirgenir. Şekil 1'de, çalışmada kullanılan Genetik-Simpleks hibrit algoritmasının akış diyagramı verilmiştir.

4. Uygulama

Çalışmanın uygulama bölümünde, mikroorganizmaların biyokimyasal oksijen ihtiyacını belirlemek amacıyla, Bates ve Watts [3] tarafından yapılan çalışmadaki veri seti ele alınmıştır. Verilerin elde edilmesinde öncelikli olarak, nehir suyundan örnek alınmıştır. Suyu çözünmüş organik madde, inorganik besinler ve çözünmüş oksijen ilave edilmiştir. Su, şişelere bölüştürülmüştür. Her bir şişeye sabit sıcaklıkta ve eşit miktarda mikroorganizma kültürü enjekte edilmiş ve şişelerin ağzı kapatılmıştır. Daha sonra, şişeler günlere bağlı olarak sırasıyla açılmış ve şişelerdeki suyun içinde çözünmüş oksijen miktarları ölçülmüştür. Çizelge 1'de, mikroorganizmaların zamana göre biyokimyasal oksijen ihtiyacına ilişkin veriler yer almaktadır.



Şekil 1. Genetik-Simpleks hibrit algoritması akış diyagramı

Çizelge 1. Mikroorganizmaların zamana göre biyokimyasal oksijen ihtiyacı.

t (gün)	1	2	3	4	5	7
Biyokimyasal oksijen ihtiyacı (mg/l)	8.3	10.3	19	16	15.6	19.8

Çizelge 1’de verilen veri setine uygun olarak kabul edilen doğrusal olmayan regresyon modeli

$$Y = \theta_1 (1 - e^{-\theta_2 t}) + \varepsilon \quad (3)$$

biçimindedir. Burada, $\theta = [\theta_1 \theta_2]$ bilinmeyen model parametre vektörüdür. EKK kriterine göre oluşturulan amaç fonksiyonu

$$\phi(\theta) = \varepsilon' \varepsilon = (Y - \theta_1 (1 - e^{-\theta_2 t}))' (Y - \theta_1 (1 - e^{-\theta_2 t})) = \sum_{i=1}^6 (Y_i - \theta_1 (1 - e^{-\theta_2 t_i}))^2 \quad (4)$$

ifadesi ile tanımlanır. Buna göre kısıtsız optimizasyon problemi

$$\min_{\theta} \left\{ \phi([\theta_1 \theta_2]) = \sum_{i=1}^6 (Y_i - \theta_1 (1 - e^{-\theta_2 t_i}))^2 \right\} \quad (5)$$

biçiminde olur. Eşitlik (5) ile tanımlı minimizasyon problemini Bates ve Watts [3] çalışmalarında, türeve dayalı bir optimizasyon algoritması ile en iyileyerek, $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2] = [19.1426 \ 0.5311]$ ve $\phi(\hat{\theta}) = 25.9903$ sonuçlarına ulaşmışlardır.

Bu çalışmada, Eşitlik (5) ile tanımlı kısıtsız problemin GA ile optimizasyonu için öncelikli olarak, GA ayarlanabilir parametrelerinin probleme uygun tanımlanması gerekir. Bu amaçla çalışmada, GA ayarlanabilir parametreleri için (popülasyon büyüklüğü, kuşak sayısı, seçim yöntemi, çaprazlama yöntemi, mutasyon yöntemi) beş seviye belirlenmiştir. Çizelge 2’de GA ayarlanabilir parametrelerin uygun seviyeleri tanımlanmıştır.

Çizelge 2. GA ayarlanabilir parametreleri ve seviyeleri

GA Ayarlanabilir Parametreleri	Seviyeler				
	1	2	3	4	5
Popülasyon Büyüklüğü - A	30	50	100	150	200
Kuşak Sayısı - B	50	75	100	200	500
Seçim Yöntemi - C	Stokastik uniform	Remainder	Uniform	Rulet tekerleği	Turnuva
Çaprazlama Yöntemi - D	Scattered	İki nokta	Tek nokta	Heuristic	Aritmetik
Mutasyon Yöntemi - E	Uniform 0.2	Uniform 0.01	Uniform 0.05	Uniform 0.1	Adaptive feasible

Çizelge 3. Taguchi T_{25} tablosu

Deneme Sayısı	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4

7	2	2	3	4	5
8	2	3	4	5	1
9	2	4	5	1	2
10	2	5	1	2	3
11	3	1	3	5	2
12	3	2	4	1	3
13	3	3	5	2	4
14	3	4	1	3	5
15	3	5	2	4	1
16	4	1	4	2	5
17	4	2	5	3	1
18	4	3	1	4	2
19	4	4	2	5	3
20	4	5	3	1	4
21	5	1	5	4	3
22	5	2	1	5	4
23	5	3	2	1	5
24	5	4	3	2	1
25	5	5	4	3	2

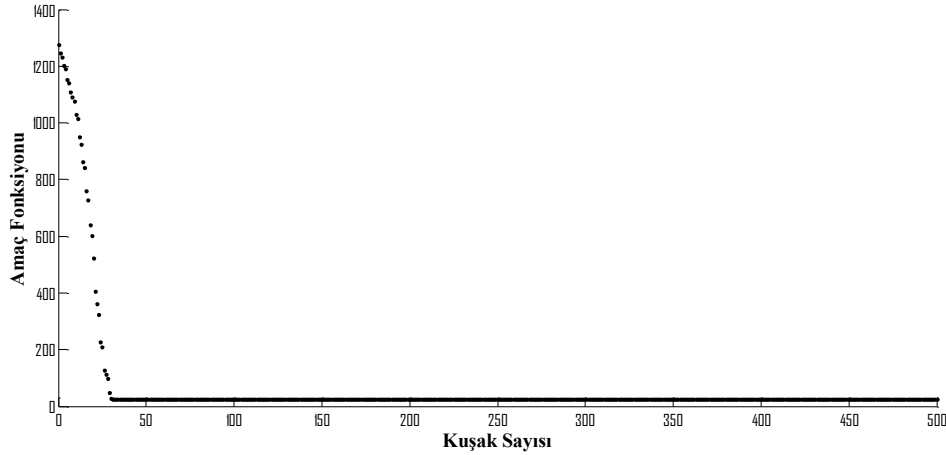
Beş parametrelili ve beş seviyeli duruma göre Çizelge 3'te tanımlı Taguchi' nin T_{25} tablosu kullanılarak, 25 farklı denemenin her biri için GA ile 200 defa hesaplama yapılmıştır. Hesaplamalarda MATLAB programı kullanılmıştır. Her bir denemede 200 hesaplama için hata kareler toplamının en küçük, ortalama, medyan ve en büyük değerleri ile standart sapma istatistikleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre hata kareler toplamının en küçük olduğu durumdaki parametre tahmini değerleri model parametrelerinin nokta tahmini olarak seçilmiştir. 25 deneme için elde edilen amaç fonksiyonu (hata kare toplamı) sonuçları ve bu sonuçlara ilişkin istatistikler Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 4. GA ile 25 deneme için elde edilen amaç fonksiyonu değerleri ve fonksiyon değerlerine ilişkin istatistikler

ϕ					
Deneme	En küçük	Ortalama	Medyan	En büyük	Std. Sapma
1	1266.1069	1268.1609	1267.7243	1275.3778	1.6948
2	1266.1809	1271.8305	1270.6387	1293.6239	4.8862
3	1266.1666	1270.3261	1269.2471	1288.8628	3.6711
4	25.9903	26.9687	26.0649	44.1037	2.6238
5	26.0154	28.4509	27.3296	45.0495	2.9837
6	1266.0197	1267.5013	1267.1452	1273.4304	1.3149
7	25.9903	26.0451	25.9907	36.6875	0.7563
8	1266.1611	1267.5561	1267.2924	1272.1778	1.0619
9	1266.2625	1270.1013	1269.7053	1281.3135	2.6714
10	1266.1006	1268.4849	1267.8787	1280.2719	2.2139
11	1266.5785	1273.5719	1272.8794	1286.0550	4.2411
12	1266.0438	1267.3516	1267.1156	1273.5329	1.1553
13	1266.0015	1266.8039	1266.5714	1270.5032	0.7305
14	25.9903	57.6098	26.0004	359.7778	86.2753
15	25.9903	25.9905	25.9903	25.9983	0.0010
16	25.9903	63.1432	26.0036731	425.3242	108.9083

17	1266.0071	1266.3736	1266.2989	1267.7037	0.2942
18	25.9903	27.4609	26.1367	37.1909	2.3987
19	1266.0686	1267.4308	1267.0441	1272.2281	1.2543
20	1266.0461	1266.8803	1266.6852	1268.9877	0.6845
21	1211.4667	1232.8045	1233.3594	1252.2715	8.36306
22	1266.0349	1266.7299	1266.5748	1269.9987	0.6045
23	25.9903	58.6576	25.9915	310.2354	86.7679
24	1266.0026	1266.4471	1266.3649	1268.2569	0.3673
25	1266.0279	1267.0354	1266.7937	1270.8184	0.8839

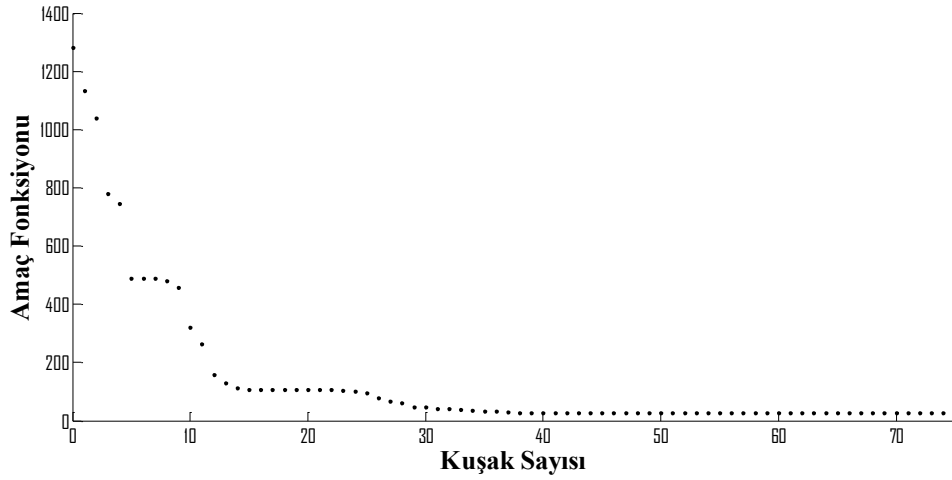
Çizelge 4'teki sonuçlar incelendiğinde, en küçük amaç fonksiyon değerinin yaklaşık olarak 26 olduğu ve bu sonucun 4., 5., 7., 14., 15., 16., 18. ve 23. denemelerde elde edildiği görülmektedir. Bu denemelere ilişkin Çizelge 4'teki istatistiklere göre, 14., 16. ve 23. denemelerde elde edilen 200 farklı hesaplama ile ilgili standart sapma değerlerinin oldukça büyük olduğu söylenebilir. Bu durum, stokastik aramalara dayalı olan GA'nın ayarlanabilir parametrelerinin model parametrelerinin nokta tahmini üzerindeki etkisini gösterir. GA'da popülasyon büyüklüğü ve kuşak sayısının gereğinden büyük seçilmesi, hesaplama süresinin uzamasına neden olacaktır. GA'nın bir yinelemede kaçınıcı kuşaktan itibaren optimum değere yaklaştığı bilgisi, GA'nın optimal sonuca ne kadar çabuk ulaşabildiğinin bir yanıtıdır. En iyi çözüme yakınsama sağlandıktan sonraki kuşaklar, denemelerin büyük çoğunluğunda, fazladan işlem yükü olabilmektedir. Çizelge 4'teki düşük standart sapmalı 4., 5., 7., 15. ve 18. denemeler arasında en küçük standart sapma değerine sahip 15. denemeye ilişkin GA ayarlanabilir parametreleri incelendiğinde, popülasyon büyüklüğünün 100 ve kuşak sayısının 500 olduğu görülür. Deneme 15'te kaçınıcı kuşaktan itibaren optimum değere yakınsama sağlandığının belirlenmesi amacıyla 500 kuşakta hesaplanan amaç fonksiyonu değerleri incelenmiştir. Şekil 2'de verilen grafikte, deneme 15 için bir yinelemede 500 kuşak boyunca elde edilen amaç fonksiyon değerleri görülmektedir.



Şekil 2. Deneme-15' te bir yineleme için 500 kuşakta hesaplanan amaç fonksiyonu değerleri

Şekil 2'de görüldüğü üzere kuşak sayısı yaklaşık olarak 30'a ulaştığında amaç fonksiyonu en iyi değerine yakınsamaktadır. Buna göre, 500 kuşak sayısına ulaşmaya kadar yapılan yinelemelerde, yaklaşık olarak 30. kuşaktan sonra yapılan hesaplamalarda benzer fonksiyon değeri civarında sonuçlara ulaşıldığı ve bu hesaplama yükünün hesaplama süresini uzattığı söylenebilir. Düşük standart sapmalı denemeler arasında en az kuşak sayısına sahip 7. denemeye ilişkin Şekil 3'te verilen amaç fonksiyon değerleri grafiği

incelendiğinde, oldukça makul kuşak sayısında problem için en iyi fonksiyon değerine tutarlı olarak ulaşıldığı gözlenmektedir.



Şekil 3. Deneme-7'de bir yineleme için 75 kuşakta hesaplanan amaç fonksiyonu değerleri

Taguchi deney tasarımı ile elde edilen deneme sonuçlarına göre, hesaplama süresi de dikkate alındığında, probleme en uygun GA ayarlanabilir parametre değerlerinin 7. denemeye ilişkin olduğu görülmüştür. Deneme-7'ye ilişkin GA ayarlanabilir parametre değerleri, 50 birimlik popülasyon, 75 kuşak sayısı, Uniform seçim, Heuristic çaprazlama ve Adaptive feasible mutasyon olarak tanımlıdır. Bu değerler kullanılarak, GA ile elde edilen model parametre tahminleri $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2] = [19.1426 \ 0.5311]$ dir.

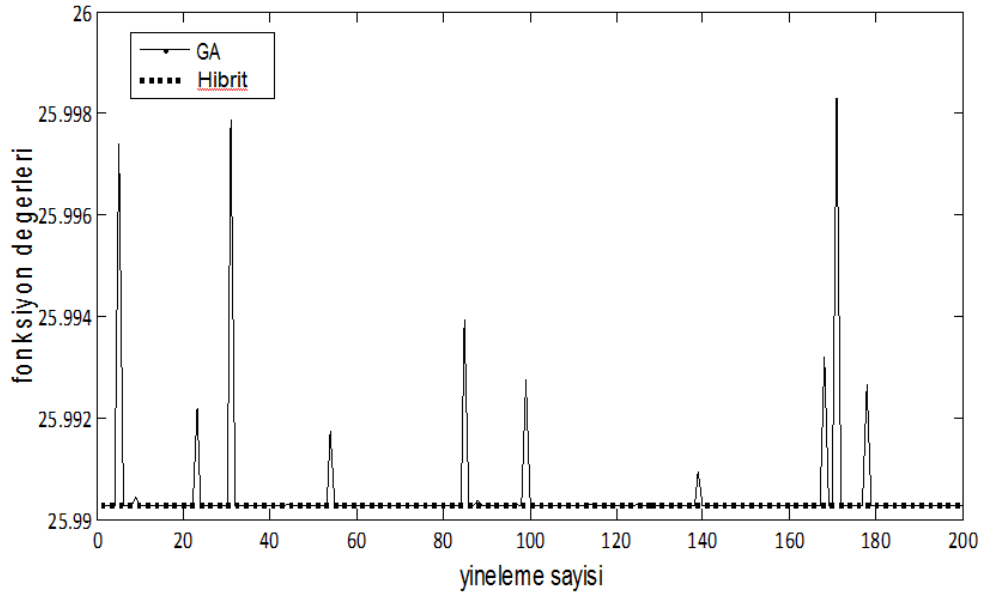
GA ile ulaşılan 25 farklı model parametre tahmin vektörü, NMS algoritması için parametre başlangıç başlangıç değerleri olarak kabul edilip, Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile elde edilen model parametrelerinin tahmin değerlerine Çizelge 5'te yer verilmiştir.

Çizelge 5. Model parametrelerinin başlangıç değerleri, hibrit algoritma ile 25 deneme için bulunan amaç fonksiyonu değerlerinin istatistikleri ve model parametre tahminleri

Deneme	Parametre başlangıç değerleri		ϕ					Parametre tahmin değerleri	
	$\hat{\theta}_1^0$	$\hat{\theta}_2^0$	En küçük	Ortalama	Medyan	En büyük	Std. Sapma	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
1	0.9996	0.9978	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$3 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
2	0.9989	0.9988	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
3	0.9994	0.9959	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
4	19.1426	0.5311	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$4 \cdot 10^{-9}$	19.1457	0.5311
5	18.9972	0.54370	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.53111
6	0.9999	0.9991	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
7	19.1429	0.5311	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
8	0.9997	0.9938	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
9	0.9995	0.9915	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
10	0.9996	0.9986	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
11	0.9965	0.9988	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311

12	0.9998	0.9989	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$3 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
13	0.9999	0.9999	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
14	19.1443	0.5311	25.9903	39.25663	25.9903	136.7617	36.02	19.1426	0.5311
15	19.1426	0.5311	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
16	19.1414	0.5311	25.9903	37.60793	25.9903	136.9752	34	19.1426	0.5311
17	0.9999	0.9999	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
18	19.1426	0.5311	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
19	0.9996	0.9999	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
20	0.9999	0.9981	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
21	1.3298	1.1666	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
22	0.9999	0.9982	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$2 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
23	19.1428	0.5311	25.9903	39.80883	25.9903	136.8726	36.65	19.1426	0.5311
24	0.9999	0.9999	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$4 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311
25	0.9999	0.9987	25.9903	25.9903	25.9903	25.9903	$3 \cdot 10^{-9}$	19.1426	0.5311

Çizelge 5'ten görüldüğü gibi, Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile her denemede elde edilen parametre tahmin değerlerinin tamamı ve hemen hemen bütün en büyük fonksiyon değerleri, GA ile 7. denemede elde edilen en iyi parametre tahmin değerlerine ($\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2] \cong [19.1426 \ 0.5311]$) ve fonksiyon değerine ($\phi^* \cong 26$) sırasıyla eşittir. Buna göre, hibrit algoritmanın her deneme kombinasyonunda GA'ya göre daha tutarlı sonuçlar verdiği söylenebilir. Şekil 4'te verilen, deneme 7 için 200 yinelemede elde edilen GA ve Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile elde edilen ϕ amaç fonksiyonu değerleri karşılaştırılması, hibrit algoritma ile GA'dan daha tutarlı sonuçlar elde edildiği desteklemektedir.



Şekil 4. Deneme 7 için uygulanan 200 hesaplama göre GA ve Genetik-Simpleks hibrit algoritması ile elde edilen hata kareler toplamının karşılaştırılması

5. Sonuç

Bu çalışmada, türevden bağımsız optimizasyon algoritmaları olan GA ve NMS algoritmasının avantajlı yönlerinin birleştirilmesi ile oluşturulan Genetik-Simpleks hibrit algoritması kullanılarak, doğrusal olmayan regresyon model parametreleri için EKK tahminlerinin elde edilmesi hedeflenmiştir. Ayrıca çalışmada, GA ayarlanabilir parametrelerinin belirlenmesinde Taguchi deney tasarımından yararlanılarak, GA ile model parametrelerinin EKK tahminlerinin elde edilmesi istenmiştir. Bu amaçla, GA ve Genetik-Simpleks hibrit algoritması, literatürde tanımlı bir negatif-üstel regresyon model için optimizasyon aracı olarak kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, GA ayarlanabilir parametre değerlerinin seçiminin GA ile yapılan optimizasyon sonuçlarını etkilediği görülmüştür. Genetik-Simpleks hibrit algoritmasının, negatif-üstel biçimde tanımlı doğrusal olmayan model parametrelerinin nokta tahminlerinin elde edilmesinde model parametrelerinin başlangıç değerlerine ihtiyaç duymadan, GA ayarlanabilir parametrelerinin probleme uygun belirlenemediği durumlarda bile tutarlı tahmin sonuçları veren bir optimizasyon algoritması olarak kullanılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Kaynaklar

- [1] B. Altunkaynak, A. Esin, 2004, Doğrusal Olmayan Regresyonda Parametre Tahmini İçin Genetik Algoritma Yöntemi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 17(2), 43-51.
- [2] F. Akgün, 2018, Doğrusal Olmayan Regresyon Model Parametrelerinin Nokta ve Aralık Tahmini İçin Bir Yaklaşım, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- [3] D. M. Bates, D. G. Watts, 1988, Nonlinear Regression Analysis and Its Applications, John Willey & Sons, Inc., New York.
- [4] M. J. Box, 1971, Bias in Nonlinear Estimation, Journal of Royal Statistical Society: Series B, 33(2), 171-201.
- [5] A. R. Gallant, W. A. Fuller, 1973, Fitting Segmented Polynomial Regression Models Whose Join Points Have to Be Estimated, Journal of the American Statistical Association, 68(1), 144-147.
- [6] A. R. Gallant, 1975, Nonlinear Regression, Journal of the American Statistical Association, 29(2), 73-81.
- [7] D. E. Goldberg, 1989, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison - Wesley, Boston.
- [8] A. P. Gurson, 2000, Simplex Search Behaviour in Nonlinear Optimization, Underground Honors Thesis, College of William & Mary.
- [9] H. O. Hartley, A. Booker, 1963, Non-Linear Least Squares Estimation, Unpublished Report, Iowa State University, Ames.
- [10] J. H. Holland, 1975, Adaptation in Natural and Artificial Systems, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [11] R. I. Jennrich, 1969, Asymptotic Properties of Non-linear Least Squares Estimators, The Annals of Mathematical Statistics, 40(2), 633-643.
- [12] E. Malinvaud, 1970, Consistency of Nonlinear Regressions, The Annals of Mathematical Statistics, 41(3), 956-969.
- [13] D. W. Marquardt, 1963, An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 11(2), 431-441.
- [14] J. A. Nelder, R. Mead, 1965, A Simplex Method for Function Minimization, The Computer Journal, 7(4), 308-313.
- [15] L. M. Rios, N. V. Sahinidis, 2013, Derivative-Free Optimization: a Review of Algorithms and Comparison of Software Implementations, Journal of Global Optimization, 56(3), 1247-1293.
- [16] G. A. F. Seber, C. J. Wild, 1989, Nonlinear Regression, John Willey&Sons, Inc., New York.
- [17] W. Spendley, G. R. Hext, F. R. Himsworth, 1962, Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation, Technometrics, 4(4), 441-461.
- [18] Ö. Türkşen, 2014, Estimation of Fault Plane Parameters by Using Stochastic Optimization Methods, International Journal of Earthquake Engineering and Hazard Mitigation, 2(2), 61-66.
- [19] Ö. Türkşen, M. Tez, 2016, An Application of Nelder-Mead Heuristic-based Hybrid Algorithms: Estimation of Compartment Model Parameters, International Journal of Artificial Intelligence, 14(1), 112-129.



Measures of departure from marginal homogeneity model in square contingency tables

Gökçen Altun

Department of Statistics

Bartın University

74100, Bartın, Turkey

gokcenefendioglu@gmail.com

[id 0000-0003-4311-6508](https://orcid.org/0000-0003-4311-6508)

Serpil Aktaş

Department of Statistics

Hacettepe University

06800, Beytepe, Ankara, Turkey

spxl@hacettepe.edu.tr

[id 0000-0003-3364-6388](https://orcid.org/0000-0003-3364-6388)

Abstract

In this study, the measures representing the departure from MH model is introduced for square contingency tables and standard errors of these measures is calculated. These measures lies between $(-1,1)$ and represent the departure degree from MH model. Three real data sets are used as the illustrative examples. While the measures of departure are calculated for each category, the categories causing the departure from the MH model can be obtained and interpreted.

Keywords: Square contingency tables, marginal homogeneity model, departure measure

Öz

Karesel olumsuzluk tablolarında marjinal homojenlik modelinden sapma ölçüleri

Bu çalışmada, karesel olumsuzluk tabloları için MH modelinden ayrılışı ifade eden ölçümler ifade edilmiş ve bu ölçümlerin standart hataları hesaplanmıştır. Çalışmadaki sapma ölçüsü $(-1,1)$ aralığında değer alır ve MH modelinden ayrılış derecesini ifade eder. Örnek olarak üç gerçek veri kümesi kullanılmıştır. Her bir kategori için sapma ölçüsü hesaplanmış, MH modelinden sapmaya neden olan kategoriler elde edilerek yorumlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Karesel olumsuzluk tablosu, marjinal homojenlik modeli, sapma ölçüsü

1. Introduction

Square contingency tables that arise in dependent samples where the row and column variables have same level. Some specific models used in the analysis of these kinds of tables. The Marginal Homogeneity Model (MH) is one of them [1]. The model assumes that the marginal totals are symmetric. This model indicates that the row marginal distribution is identical with column marginal distribution. Consider an $R \times R$ square contingency table with ordered categories. Let p_{ij}

denotes the probability that an observation fall in the i th row and j th column of the table $(i, j = 1, 2, \dots, R)$, and also let X and Y denote the row and column variables, respectively. The MH [2,3] model is defined by;

$$F_i^X = F_i^Y, \quad i = 1, 2, \dots, R-1 \quad (1)$$

where,

$$F_i^X = \Pr(X \leq i) = \sum_{k=1}^i p_{k.} \quad i = 1, 2, \dots, R-1$$

$$F_i^Y = \Pr(Y \leq i) = \sum_{k=1}^i p_{.k} \quad i = 1, 2, \dots, R-1$$

(2)

with

$$p_{k.} = \sum_{t=1}^R p_{kt} \quad , \quad p_{.k} = \sum_{s=1}^R p_{sk} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, R$$

(3)

Let F_i^X and F_i^Y denote the cumulative marginal probability of X and Y , respectively, and also let $p_{k.}$ and $p_{.k}$ denote the marginal probability of X and Y , respectively. This model has $(R-1)$ degrees of freedom [4]. Let T_i^X and T_i^Y denote the conditional cumulative marginal probabilities of X and Y , respectively. Then the MH model may be expressed as; $T_i^X = T_i^Y, \quad i = 1, 2, \dots, R-1$

where,

$$T_i^X = \Pr(X \leq i | X \neq Y) = \sum_{k=1}^i p_{k.}^c \quad i = 1, 2, \dots, R-1$$

$$T_i^Y = \Pr(Y \leq i | X \neq Y) = \sum_{k=1}^i p_{.k}^c \quad i = 1, 2, \dots, R-1$$

(4)

with

$$p_{k.}^c = \frac{1}{\delta} (p_{k.} - p_{kk}) \quad , \quad p_{.k}^c = \frac{1}{\delta} (p_{.k} - p_{kk}) \quad , \quad \delta = \sum_{s \neq t} p_{st}$$

(5)

When the MH model does not hold, we are interested in considering the measures to represent the degree of departure from MH model [5]. The deviation measure, which refers to the deviation from the model as a percentage, is used in particular to compare the data sets with the same properties obtained at different time intervals.

2. Measures of departure from marginal homogeneity model

Tahata (2012) proposed a measure which represents the degree of departure from MH model. The measure is calculated over the observed frequencies gives the degree of the departure from MH. The proposed measure lies between -1 to 1. Zero represents the MH model holds and, 1 represents the degree of departure from marginal homogeneity is maximum. According to different values of the measures, upper-left-marginal inhomogeneity and lower-left-marginal inhomogeneity concept are reviewed in [6]. We will give these measures in the following subsections.

2.1. Measure I

Measure I is calculated using the marginal probabilities. This measure is the arithmetic mean of two sub-measures.

Sub-measure 2.1.1.

Let

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{R-1} (F_i^X + F_i^Y) \quad (6)$$

and

$$F_{1(i)}^* = \frac{F_i^X}{\Delta_1}, \quad F_{2(i)}^* = \frac{F_i^Y}{\Delta_1}, \quad \text{for } i = 1, \dots, R-1 \quad (7)$$

Assuming that $\{F_i^X + F_i^Y \neq 0\}$, consider the sub-measure is defined as,

$$\Psi_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{R-1} (F_{1(i)}^* + F_{2(i)}^*) \left(\theta_i^{(1)} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{8}$$

where

$$\theta_i^{(1)} = \sin^{-1} \left(\frac{F_i^Y}{\sqrt{(F_i^X)^2 + (F_i^Y)^2}} \right) \tag{9}$$

Noting that, $\theta_i^{(1)}$ is between 0 and $\pi/2$, we can conclude that;

- i. $-1 \leq \Psi_1 \leq 1$, ii. $\Psi_1 = -1$ if and only if $F_i^Y = 0$ and $F_i^X > 0$ $i = 1, \dots, R-1$, iii. $\Psi_1 = 1$ if and only if $F_i^X = 0$ and $F_i^Y > 0$ $i = 1, \dots, R-1$, iv. When the MH model holds, $\Psi_1 = 0$.

Sub-measure 2.1.2.

Let

$$S_i^X = 1 - F_i^X, \quad S_i^Y = 1 - F_i^Y \quad \text{for } i = 1, \dots, R-1 \tag{10}$$

The MH model can be expressed as,

$$S_i^X = S_i^Y \quad \text{for } i = 1, \dots, R-1 \tag{11}$$

Let

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{R-1} (S_i^X + S_i^Y) \tag{12}$$

$$S_{1(i)}^* = \frac{S_i^X}{\Delta_2}, \quad S_{2(i)}^* = \frac{S_i^Y}{\Delta_2}, \quad \text{for } i = 1, \dots, R-1 \tag{13}$$

Assuming that $\{S_i^X + S_i^Y \neq 0\}$, consider the sub-measure is defined as

$$\Psi_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{R-1} (S_{1(i)}^* + S_{2(i)}^*) \left(\theta_i^{(2)} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{14}$$

where

$$\theta_i^{(2)} = \sin^{-1} \left(\frac{S_i^X}{\sqrt{(S_i^X)^2 + (S_i^Y)^2}} \right) \tag{15}$$

It can be said that $\theta_i^{(2)}$ is between 0 and $\pi/2$ and,

i. $-1 \leq \Psi_2 \leq 1$, ii. $\Psi_2 = -1$ if and only if $S_i^X = 0$ and $S_i^Y > 0$ $i = 1, \dots, R-1$, iii. $\Psi_2 = 1$ if and only if $S_i^Y = 0$ and $S_i^X > 0$ $i = 1, \dots, R-1$. When the MH model holds, $\Psi_2 = 0$

Complete measure 1

The complete measure is calculated from Equation (16);

$$\Psi = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} \tag{16}$$

When $\Psi = 0$, we shall refer to this structure as the MH. As the measure Ψ approaches to -1, the departure from MH would be greater toward the upper-right-marginal inhomogeneity. While Ψ approaches 1, it becomes greater toward the lower-left-marginal inhomogeneity. Upper-right marginal inhomogeneity and lower-left marginal inhomogeneity for 4x4 square contingency table are represented in Figure 1 and Figure 2.

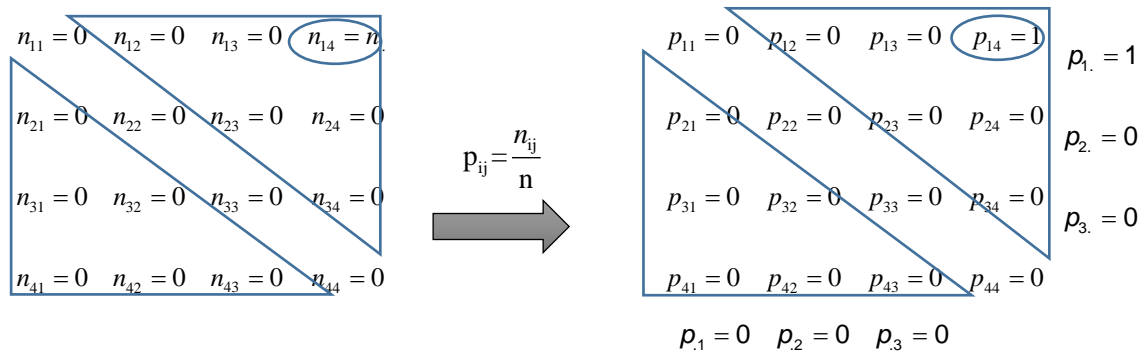


Figure 1. Upper-right marginal inhomogeneity for 4x4 square contingency table

The cumulative probabilities given in the Equation (1) can be calculated for the table in Figure 1 in terms of the marginal probabilities as follows:

$$\begin{array}{l}
 F_1^X = p_{1.} = 1 \\
 F_2^X = p_{1.} + p_{2.} = 1 \\
 F_3^X = p_{1.} + p_{2.} + p_{3.} = 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F_1^X \\ F_2^X \\ F_3^X \end{array}} \right\} F_i^X = 1$$

$$\begin{array}{l}
 F_1^Y = p_{.1} = 0 \\
 F_2^Y = p_{.1} + p_{.2} = 0 \\
 F_3^Y = p_{.1} + p_{.2} + p_{.3} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F_1^Y \\ F_2^Y \\ F_3^Y \end{array}} \right\} F_i^Y = 0$$

$$\Psi = -1$$

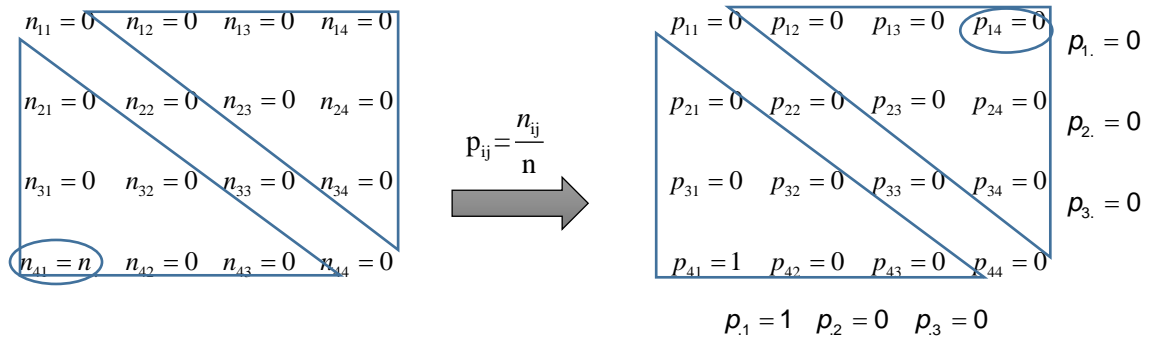


Figure 2. Lower-left marginal inhomogeneity for 4x4 square contingency table

The cumulative probabilities given in the Equation (1) can be calculated for the table in Figure 2 in terms of the marginal probabilities as follows:

$$\begin{array}{l}
 F_1^X = p_{1.} = 0 \\
 F_2^X = p_{1.} + p_{2.} = 0 \\
 F_3^X = p_{1.} + p_{2.} + p_{3.} = 0 \\
 F_1^Y = p_{.1} = 1 \\
 F_2^Y = p_{.1} + p_{.2} = 1 \\
 F_3^Y = p_{.1} + p_{.2} + p_{.3} = 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F_1^X \\ F_2^X \\ F_3^X \\ F_1^Y \\ F_2^Y \\ F_3^Y \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 F_i^X = 0 \\
 F_i^Y = 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} F_i^X \\ F_i^Y \end{array}} \right\} \Psi = 1$$

From Figure 1 and Figure 2 we can say that $\Psi = -1$ indicates that $p_{1R} = 1$ and the other cell probabilities are zero , $\Psi = 1$ indicates that $p_{R1} = 1$ and the other cell probabilities are zero.

2.2. Measure II

Measure II is calculated using the marginal conditional probabilities. This measure is mean of two sub-measures.

Sub-measure 2.2.1.

Let $\Delta_3 = \sum_{i=1}^{R-1} (T_i^X + T_i^Y)$

(17)

and

$$T_{1(i)}^* = \frac{T_i^X}{\Delta_3}, \quad T_{2(i)}^* = \frac{T_i^Y}{\Delta_3}, \quad \text{for } i = 1, \dots, R-1$$

(18)

Assuming that $\{T_i^X + T_i^Y \neq 0\}$, consider the sub-measure is defined as,

$$Y_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{R-1} (T_{1(i)}^* + T_{2(i)}^*) \left(\theta_i^{(3)} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{19}$$

where,

$$\theta_i^{(3)} = \sin^{-1} \left(\frac{T_i^Y}{\sqrt{(T_i^X)^2 + (T_i^Y)^2}} \right). \tag{20}$$

Sub-measure 2.2.2.

Let $U_i^X = 1 - T_i^X, U_i^Y = 1 - U_i^Y$ for $i = 1, \dots, R - 1$

$$\tag{21}$$

The MH model alternatively can be expressed as,

$$U_i^X = U_i^Y \text{ for } i = 1, \dots, R - 1 \tag{22}$$

Let $\Delta_4 = \sum_{i=1}^{R-1} (U_i^X + U_i^Y)$

$$\tag{23}$$

and

$$U_{1(i)}^* = \frac{U_i^X}{\Delta_4}, U_{2(i)}^* = \frac{U_i^Y}{\Delta_4}, \text{ for } i = 1, \dots, R - 1 \tag{24}$$

Assuming that $\{U_i^X + U_i^Y \neq 0\}$, consider the sub-measure is defined as,

$$Y_2 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{R-1} (U_{1(i)}^* + U_{2(i)}^*) \left(\theta_i^{(4)} - \frac{\pi}{4} \right) \tag{25}$$

where

$$\theta_i^{(4)} = \sin^{-1} \left(\frac{U_i^X}{\sqrt{(U_i^X)^2 + (U_i^Y)^2}} \right)$$

(26)

Complete measure 2

Consider a complete measure defined by;

$$\Upsilon = \frac{\Upsilon_1 + \Upsilon_2}{2}$$

(27)

When $\Upsilon = 0$, we shall refer to this structure as the MH. Similarly as in the previous case, as the measure Υ approaches to -1, the departure from MH would be greater toward the upper-right conditional marginal inhomogeneity. While Υ approaches to 1, it becomes greater toward the conditional lower-left-marginal inhomogeneity.

3. Approximate confidence interval for the measures

Let n_{ij} denote the observed frequency in the i th row and j th column of the table ($i = 1, \dots, R; j = 1, \dots, R$). Assuming that a multinomial distribution is applied to the $R \times R$ table, we shall consider an approximate standard error and large-sample confidence interval for the measure Ψ .

Delta method;

In statistics, the **delta method** is a result concerning the approximate probability distribution for a function of an asymptotically normal statistical estimator from knowledge of the limiting variance of that estimator. The delta method is defined as

$$\sqrt{n}[X_n - \theta] \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

where X_n is a sequence of random variables, θ and σ^2 are finite valued constants. Using delta method, we obtain the following theorems.

Theorem 1: $\sqrt{n}[\hat{\Psi} - \Psi]$ has asymptotically (as $n \rightarrow \infty$) a normal distribution with mean zero and variance, where $\sigma^2(\hat{\Psi})$

$$\sigma^2[\hat{\Psi}] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R (a_{ij} + b_{ij})^2 p_{ij}$$

(28)

with

$$a_{ij} = \frac{4}{\pi\Delta_1} \sum_{k=1}^{R-1} \left[\{I(i \leq k) + I(j \leq k)\} \theta_k^{(1)} + \frac{F_k^X + F_k^Y}{(F_k^X)^2 + (F_k^Y)^2} \{-I(i \leq k) F_k^Y + I(j \leq k) F_k^X\} \right] \\ - \frac{\{2R - (i + j)\}(\Psi_1 + 1)}{\Delta_1}$$

(29)

$$b_{ij} = \frac{4}{\pi\Delta_2} \sum_{k=1}^{R-1} \left[\{I(i > k) + I(j > k)\} \theta_k^{(2)} + \frac{S_k^X + S_k^Y}{(S_k^X)^2 + (S_k^Y)^2} \{I(i > k) S_k^Y - I(j > k) S_k^X\} \right] \\ - \frac{\{(i + j) - 2\}(\Psi_2 + 1)}{\Delta_2}$$

$I(\cdot)$ is the indicator function where $I(\cdot) = 1$ if the statement is true, 0 if it is not.

Theorem 2 : $\sqrt{n}[\hat{Y} - Y]$ has asymptotically (as $n \rightarrow \infty$) a normal distribution with mean zero and variance, where $\sigma^2(\hat{Y})$

$$\sigma^2[\hat{Y}] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^R \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^R (c_{ij} + d_{ij})^2 p_{ij}$$

(30)

with

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= \frac{4}{\delta\pi\Delta_3} \sum_{k=1}^{R-1} \left[\left\{ (I(i \leq k) - T_k^X) + (I(j \leq k) - T_k^Y) \right\} \left(\theta_k^{(3)} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T_k^X + T_k^Y}{(T_k^X)^2 + (T_k^Y)^2} \left\{ -(I(i \leq k) - T_k^X)T_k^Y + (I(j \leq k) - T_k^Y)T_k^X \right\} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\delta\Delta_3} \sum_{k=1}^{R-1} [(I(i \leq k) - T_k^X) + (I(j \leq k) - T_k^Y)] Y_1 \\
 d_{ij} &= \frac{4}{\delta\pi\Delta_4} \sum_{k=1}^{R-1} \left[\left\{ (I(i > k) - U_k^X) + (I(j > k) - U_k^Y) \right\} \left(\theta_k^{(4)} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{U_k^X + U_k^Y}{(U_k^X)^2 + (U_k^Y)^2} \left\{ (I(i > k) - U_k^X)T_k^Y - (I(j > k) - U_k^Y)U_k^X \right\} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{\delta\Delta_4} \sum_{k=1}^{R-1} [(I(i > k) - U_k^X) + (I(j > k) - U_k^Y)] Y_2
 \end{aligned}$$

(31)

Let $\hat{\sigma}^2(\hat{\Psi})$ denote $\sigma^2(\hat{\Psi})$ with p_{ij} replaced by \hat{p}_{ij} . Thus, the square root of $\hat{\sigma}^2(\hat{\Psi})/n$ is an estimated standard error of $\hat{\Psi}$ and the equation below

$$\hat{\Psi} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\Psi})/n}$$

is an approximate $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for Ψ , where $Z_{\alpha/2}$ is the percentage point of the standard normal distribution corresponding to a two-tail probability of α . We also obtain the similar result for measure Y [7].

4. Numerical example

As an illustrative example, distribution of spouses by respective educational level 1991, 2001, 2011 marriage and divorce data set in Turkey is used (Table 1-3). Data set, is organized according to four educational levels and sorted by from the low education level to higher as: (1) primary school, (2) middle school graduate, (3) high school graduate, (4) university graduate [8].

Table 1: Educational level of spouses in 1991

		Educational level of wife			
		1	2	3	4
Educational level of husband	1	11257	306	107	9
	2	2823	3284	217	12
	3	701	701	2723	65
	4	94	80	388	472

Table 2: Educational level of spouses in 2001

		Educational level of wife			
		1	2	3	4
Educational level of husband	1	15556	629	364	35
	2	3841	6379	585	25
	3	1360	5401	10141	250
	4	112	110	822	1529

Table 3: Educational level of spouses in 2011

		Educational level of wife			
		1	2	3	4
Educational level of husband	1	26644	2319	6220	881
	2	5672	1793	3164	532
	3	9518	2243	13736	4295
	4	1753	541	5733	9553

The MH model is applied to data sets and the results are given in Table 4.

Table 4: Likelihood ratio (G^2), degree of freedom, p-value for MH model

	df	G^2	p
1991	3	3272.61	<0.001
2001	3	7414.17	<0.001
2011	3	2822.35	<0.001

It is clear from Table 4 that the model does not fit the data sets. Since the MH model does not hold for the data sets, the next step would be the calculation the measures of departure from MH model. The measure of departure for each consecutive year are calculated and given below in detail:

Calculation for 1991;

$$\begin{aligned}
&F_1^X = 0.503, F_2^X = 0.776, F_3^X = 0.956, F_1^Y = 0.640, F_2^Y = 0.828, F_3^Y = 0.976, \Delta_1 = 4.679 \\
&S_1^X = 0.497, S_2^X = 0.224, S_3^X = 0.044, S_1^Y = 0.360, S_2^Y = 0.172, S_3^Y = 0.027, \Delta_2 = 1.321 \\
&F_{1(1)}^* = 0.108, F_{1(2)}^* = 0.166, F_{1(3)}^* = 0.204, F_{2(1)}^* = 0.137, F_{2(2)}^* = 0.177, F_{2(3)}^* = 0.209 \\
&S_{1(1)}^* = 0.376, S_{1(2)}^* = 0.170, S_{1(3)}^* = 0.033, S_{2(1)}^* = 0.273, S_{2(2)}^* = 0.130, S_{2(3)}^* = 0.018 \\
&\theta_1^{(1)} = 57.57, \theta_2^{(1)} = 58.65, \theta_3^{(1)} = 46.55, \Psi_1 = 0.056 \\
&\theta_1^{(2)} = 54.48, \theta_2^{(2)} = 52.48, \theta_3^{(2)} = 61.39, \Psi_2 = 0.197 \\
&a_{11} = 0.015, a_{12} = -0.009, a_{13} = -0.011, a_{14} = -0.007, a_{21} = 0.0001, a_{22} = -0.025, \\
&a_{23} = -0.026, a_{24} = -0.0222, a_{31} = 0.008, a_{32} = -0.017, a_{33} = -0.018, a_{34} = -0.014, \\
&a_{41} = 0.022, a_{42} = -0.003, a_{43} = 0.004, a_{44} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0.015, b_{13} = -0.059, \\
&b_{14} = 0.046, b_{21} = 0.016, b_{22} = 0.023, b_{23} = -0.043, b_{24} = 0.062, b_{31} = 0.006, \\
&b_{32} = -0.01, b_{33} = -0.054, b_{34} = 0.07, b_{41} = 0.143, b_{42} = 0.126, b_{43} = 0.082, b_{44} = \\
&0.188
\end{aligned}$$

Table 5: Estimate of Ψ , estimated approximate standard error for $\hat{\Psi}$, and approximate 95% confidence interval for Ψ , applied to Table 1

Table	$\hat{\Psi}$	S.E.	C.I.
1	0.1265	0.000144871	(0.1262, 0.1268)

The results show that, the degree of departure from MH in 1991 is estimated as 12.65 percent of the maximum departure toward the lower-left-marginal inhomogeneity. All values in confidence interval for Ψ are positive. Therefore Ψ is statistically significant and, the structure of MH model for educational level of man and woman departs toward the lower-left-marginal inhomogeneity.

Table 6: Measures of without each groups for 1991

1991	Ψ
First group removed	0.0921
Second group removed	0.0834
Third group removed	0.1711
Fourth group removed	0.1592

When the second group (middle school) is removed from the table, departure is the smallest. This means that the departure from MH model is largest for the middle school graduates.

Calculations for 2001;

$$\begin{aligned}
&F_1^X = 0.350, F_2^X = 0.580, F_3^X = 0.945, F_1^Y = 0.444, F_2^Y = 0.710, F_3^Y = 0.961, \Delta_1 = 3.99 \\
&S_1^X = 0.650, S_2^X = 0.420, S_3^X = 0.055, S_1^Y = 0.556, S_2^Y = 0.290, S_3^Y = 0.039, \Delta_2 = 2.01 \\
&F_{1(1)}^* = 0.088, F_{1(2)}^* = 0.145, F_{1(3)}^* = 0.237, F_{2(1)}^* = 0.111, F_{2(2)}^* = 0.178, F_{2(3)}^* = 0.241 \\
&S_{1(1)}^* = 0.323, S_{1(2)}^* = 0.209, S_{1(3)}^* = 0.027, S_{2(1)}^* = 0.277, S_{2(2)}^* = 0.144, S_{2(3)}^* = 0.019 \\
&\theta_1^{(1)} = 51.75, \theta_2^{(1)} = 50.76, \theta_3^{(1)} = 45.48, \Psi_1 = 0.076 \\
&\theta_1^{(2)} = 49.46, \theta_2^{(2)} = 55.38, \theta_3^{(2)} = 54.66, \Psi_2 = 0.15 \\
&a_{11} = 0.023, a_{12} = 0.004, a_{13} = -0.014, a_{14} = -0.0001, a_{21} = 0.015, a_{22} = -0.008, \\
&a_{23} = -0.026, a_{24} = -0.015, a_{31} = 0.008, a_{32} = -0.015, a_{33} = -0.033, a_{34} = -0.021,
\end{aligned}$$

$$a_{41} = 0.03, a_{42} = 0.007, a_{43} = -0.007, a_{44} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = -0.037, b_{13} = -0.01, \\ b_{14} = 0.01, b_{21} = -0.015, b_{22} = -0.052, b_{23} = -0.025, b_{24} = -0.025, b_{31} = 0.034, \\ b_{32} = -0.004, b_{33} = 0.024, b_{34} = 0.043, b_{41} = 0.075, b_{42} = 0.037, b_{43} = 0.065, b_{44} \\ = 0.085.$$

Table 7: Estimate of Ψ , estimated approximate standard error for $\hat{\Psi}$, and approximate 95% confidence interval for Ψ , applied to Table 2

Table	$\hat{\Psi}$	S.E.	C.I.
2	0.113	0.000080642	(0.1128, 0.1132)

We can see from this measure that the degree of departure from MH for the data in Table 2 is estimated to be 11.3 percent of the maximum departure toward the lower-left-marginal inhomogeneity. All values in confidence interval for Ψ are positive. Therefore, Ψ is statistically significant and, the structure of MH model for educational level of man and woman departs toward the lower-left-marginal inhomogeneity. Next step will be analyzing the levels. Each level is removed from the data and Ψ is recalculated (Table 8).

Table 8: Measures of without each groups for 2001

2001	Ψ
First group removed	0.1511
Second group removed	0.0497
Third group removed	0.1153
Fourth group removed	0.1480

When the second group (middle school) is removed from the table, departure is the smallest. This means that the departure from MH model is largest for the middle school graduates.

Calculations for 2011;

$$F_1^X = 0.381, F_2^X = 0.499, F_3^X = 0.814, F_1^Y = 0.461, F_2^Y = 0.534, F_3^Y = 0.839, \Delta_1 = 3.53 \\ S_1^X = 0.619, S_2^X = 0.501, S_3^X = 0.186, S_1^Y = 0.539, S_2^Y = 0.466, S_3^Y = 0.161, \Delta_2 = 2.47 \\ F_{1(1)}^* = 0.108, F_{1(2)}^* = 0.141, F_{1(3)}^* = 0.231, F_{2(1)}^* = 0.131, F_{2(2)}^* = 0.151, F_{2(3)}^* = 0.238 \\ S_{1(1)}^* = 0.250, S_{1(2)}^* = 0.203, S_{1(3)}^* = 0.075, S_{2(1)}^* = 0.218, S_{2(2)}^* = 0.189, S_{2(3)}^* = 0.065 \\ \theta_1^{(1)} = 50.43, \theta_2^{(1)} = 46.94, \theta_3^{(1)} = 45.87, \Psi_1 = 0.0499 \\ \theta_1^{(2)} = 48.95, \theta_2^{(2)} = 47.07, \theta_3^{(2)} = 49.12, \Psi_2 = 0.071 \\ a_{11} = 0.016, a_{12} = -0.009, a_{13} = 0.013, a_{14} = -0.01, a_{21} = 0.004, a_{22} = -0.022, \\ a_{23} = -0.026, a_{24} = -0.024, a_{31} = 0.012, a_{32} = -0.013, a_{33} = -0.018, a_{34} = -0.015, \\ a_{41} = 0.027, a_{42} = 0.002, a_{43} = -0.002, a_{44} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = -0.003, b_{13} = -0.02, \\ b_{14} = -0.023, b_{21} = 0.015, b_{22} = 0.012, b_{23} = -0.007, b_{24} = -0.008, b_{31} = 0.014, \\ b_{32} = 0.011, b_{33} = -0.008, b_{34} = -0.01, b_{41} = 0.03, b_{42} = 0.028, b_{43} = 0.008, b_{44} \\ = 0.007$$

Table 9: Estimate of Ψ , estimated approximate standard error for $\hat{\Psi}$, and approximate 95% confidence interval for Ψ , applied to Table 3

Table	$\hat{\Psi}$	S.E.	C.I.
3	0.06	0.000036333	(0.0599, 0.0601)

We can see from this measure that the degree of departure from MH for the data in Table 3 is estimated to be 6 percent of the maximum departure toward the lower-left-marginal inhomogeneity. All values in confidence interval for Ψ are positive. Therefore, Ψ is statistically significant and, the structure of MH model for educational level of man and woman departs toward the lower-left-marginal inhomogeneity.

Table 10: Measures of without each groups for 2011

2011	Ψ
First group removed	0.0087
Second group removed	0.0556
Third group removed	0.0788
Fourth group removed	0.0837

When the first group (primary school) is removed from the table, departure is the smallest (Table 10). This means that the departure from MH model is largest for the primary school graduates.

5. Discussions

The usual way analyzing the square contingency tables is to check the model fit. Additionally, measures of departure could be beneficial if the model does not hold for data. Because the measure of departure, exhibits the departure from the model and, can arise which level contribution on rejecting the hypothesis. From the results, we can say that, divorces in high school and university graduates both men and women have a more homogeneous structure whereas the primary and middle school graduates have a more heterogeneous structure. This means that the high school and university graduates got married to individuals who have the same level of education. When considering the elementary and middle school graduate's divorce distribution, it might be inferred that these individuals got married to people who have different levels of education. If we examine the overall frequency distribution of each of the three years, it can be seen that most divorces occur in individuals of primary school graduates.

6. References

- [1] Agresti, A. 2010, *Analysis of ordinal categorical data* (Vol. 656). John Wiley & Sons.
- [2] Stuart, A., 1955, A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika* 42, 412-416
- [3] Tahata, K., Iwashita, T., Tomizawa, S., 2008, Measure of departure from conditional marginal homogeneity for square contingency tables with ordered categories. *Statistics*, 42(5), 453-466
- [4] Lawal, B, H, ,2008 On Fitting the Conditional Difference Asymmetry Models to Square Contingency Tables with Nominal Categories, *Quality & Quantity*, 42(5), 605-612.
- [5] Yamamoto, K., Ando, S., & Tomizawa, S, 2011. A Measure of Departure from Average Marginal Homogeneity for Square Contingency Tables with Ordered Categories. *REVSTAT–Statistical Journal*, 9(2), 115-126.
- [6] Tahata, K. , Kawasaki, K. , Tomizawa S., 201) Asymmetry Index on Marginal Homogeneity for Square Contingency Tables with Ordered Categories. *Open Journal of Statistics*, Vol:2 Page:198-203
- [7] Agresti, A., 2003 *Categorical data analysis* (Vol. 482). John Wiley & Sons.
- [8] Turkish Statistical Institute (TÜİK) Marriage and Divorce Statistics 1991,2001,2011



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 11, 2018, 2, 109-120

Geliş/Received:13.07.2018, Kabul/Accepted: 31.10.2018

www.istatistikciler.org

Araştırma Makalesi / Research Article

Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini İçin alternatif tahmin yöntemi

Arzu Altın Yavuz
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik
Bölümü Meşelik Kampüsü
Eskişehir, Türkiye
aaltin@ogu.edu.tr

 [0000-0002-3277-740X](https://orcid.org/0000-0002-3277-740X)

Ebru Gündoğan Aşık
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri
Bölümü
Trabzon, Türkiye

ebrugundogan@ktu.edu.tr

 [0000-0002-0545-7339](https://orcid.org/0000-0002-0545-7339)

Y. Murat Bulut
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik
Bölümü Meşelik Kampüsü
Eskişehir, Türkiye
ybulut@ogu.edu.tr

 [0000-0002-9910-6555](https://orcid.org/0000-0002-9910-6555)

Öz

Bu çalışmada Frechet dağılımının şekil parametresi basit doğrusal regresyon modeli kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin yöntemi olarak En Küçük Kareler (EKK) ve sağlam (robust) tahmin yöntemi olan M tahmin edicisi ele alınmıştır. Bu tahmin yöntemlerinin etkinlikleri veri setinin aykırı değer içerip içermeme durumuna göre simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmininde yapılan simülasyon çalışması ile sağlam yöntemin parametre tahminin EKK'dan daha etkin olduğu görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Basit Doğrusal Regresyon, En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, Frechet Dağılımı, Sağlam M Tahmin Edicisi.

Abstract

Alternative estimation methods for the estimation of Frechet distribution parameters

In this study, the shape parameter of the Frechet distribution is estimated using simple linear regression model. The ordinary least squares (OLS) and robust estimation method M estimator are considered as the estimation method. Simulation study is conducted to compare effectiveness of estimator based on data set with and without outliers. As a result, it is seen from the simulation result that robust estimation method is more effective than the OLS.

Keywords: Simple Linear Regression, Ordinary Least Squares Estimator, Frechet distribution, Robust M Estimator.

1. Giriş

Uç değer teorisi, istatistikte yaygın olarak kullanılan bir alandır ve rasgele değişkenlerin olağan dışı büyüklükteki davranışlarını inceler. Uç değer dağılımları, Gumbel (tip I), Frechet (tip II) ve Weibull (tip III) dağılımlarıdır [1]. Son zamanlarda birçok farklı alanlara uygulanan Frechet dağılımı 1920'li yıllarda Maurice Frechet [2] tarafından uç değer teorisi için geliştirilmiştir. Frechet dağılımı uygulamada depremler, hızlandırılmış ömür testleri, sel, yağış, süpermarketlerde oluşan kuyruklar, rüzgar hızı, deniz akıntıları, yarış pisti kayıtları gibi uç olayların analizi ve modellenmesi için kullanılmaktadır [3,4]. Harlow [5] Frechet dağılımını mühendislik alanındaki çalışmalar için önermiştir. Zaharim ve ark. [6] Frechet dağılımını rüzgar hızı verilerine

uygulamışlardır. Nadarajah ve Kotz [7] Frechet rasgele değişkenlerine dayanan sosyolojik modeller üzerine çalışmışlardır ve Frechet dağılımının şekil parametresi için tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Akgül ve Şenoğlu [8] inverse Weibull dağılımının parametrelerinin tahmini için farklı tahmin yöntemlerini karşılaştırmışlardır.

Mubarak [9] birbirini izleyen uç değerler olarak bilinen rekor değerlere dayalı Frechet dağılımının konum ve şekil parametresinin en iyi yansız doğrusal tahmin edicileri ile en iyi doğrusal değişmez tahmin edicilerini elde etmiştir. Chatterjee ve Chatterjee [10] ultrasonik dalga hızı ölçümlerinin sonuçlarının Frechet dağılımına oldukça iyi uyduğunu simülasyon sonucuyla doğrulayarak bir model sunmuşlardır. Silva ve ark. [11] çalışmalarında dört parametrelili Gamma genişletilmiş Frechet dağılımını tanımlamışlardır. Ayrıca yaptıkları gerçek veri uygulamasıyla bu yeni dağılımın diğer klasik yaşam modellerinden daha iyi uyum sağlayabileceğini göstermişlerdir. Frechet ve ters gamma dağılımları arasında bir ayırım yapmak için olabilirlik oran testi önermişlerdir. Doğru seçimin ampirik ve asimtotik olasılıklarını karşılaştırmak için bir simülasyon çalışması sunmuşlardır. Abbas ve Tang [12] iki parametrelili Frechet dağılımı için Bayes tahmin edicilerini elde etmişlerdir. Ayrıca elde ettikleri tahmin edicileri, en çok olabilirlik yöntemi ile karşılaştırmışlardır. Afify ve ark. [13] dört parametrelili Weibull Frechet dağılımını önererek matematiksel ve istatistiksel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca tahmin edicilerin performansını simülasyon yardımıyla göstermişlerdir. Pindado ve ark. [14] İspanya'da 1999'dan 2014'e kadar ödenen maaşlarla ilgili resmi verileri Frechet dağılımıyla analiz etmişlerdir ve 2002'den 2014'e kadar daha dengeli bir maaş dağılım eğilimi ortaya koymuşlardır. Maleki ve Deiri [15] Frechet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu tahmin etmek için farklı yöntemleri kullanmışlar ve yaptıkları simülasyon sonucunda en çok olabilirlik yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performansa sahip olduğunu göstermişlerdir. Zayed ve Butt [16] çalışmalarında Burr X üstelleştirilmiş Frechet dağılımının momentlerini, üreten fonksiyonlarını ve sıra istatistiklerini araştırmışlardır. Önerdikleri yeni dağılımın performansını simülasyon çalışması yardımıyla diğer Frechet dağılımlarıyla karşılaştırmışlardır. Haq ve ark. [17] uç değerleri modellemek için yeni beş parametrelili Frechet dağılımını önermişlerdir. Yaptıkları çalışmada modelin matematiksel özelliklerini incelemişlerdir. Tablada ve Corderio [18] yeni üç parametrelili bir dağılım olan modified Frechet dağılımını önermişlerdir. Önerilen dağılımın yeterliliğini uygunluk testleri ile ele almışlardır ve simülasyon çalışmasıyla yaşam analizi uygulamaları için uygun bir model olduğunu göstermişlerdir. Ramos ve ark [19] Frechet dağılımının parametrelerini tahmin etmek için klasik ve bayesci yaklaşımı kullanmışlardır.

Tüm uç değer dağılımlarında şekil parametresinin tahmini verinin modellenmesi için büyük önem taşımaktadır. Güvenilirlik analizinde, şekil parametresinin tahmini için yaygın olarak rank regresyon yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için olasılık kağıtlarından yararlanılmaktadır. Olasılık kağıdı yardımıyla, arıza verilerinin uygun olduğu dağılım şeklinin belirlenmesine ve bu dağılımın parametrelerinin tahmin edilmesine çalışılır. Güvenilirlik analizinde olasılık kağıdı kullanımı, ürünün arızalanmasına ait maliyetler nedeniyle önemlidir. Bu yöntem büyük numuneler gerektirmez. Diğer parametre tahmin yöntemleri daha güçlü olabilir ancak küçük örneklerde iyi sonuçlar vermeyebilirler. Arıza verilerinin azlığı nedeniyle olasılık kağıtları genellikle güvenilirlik analizde yaygın olarak kullanılır ve küçük örneklerde iyi sonuçlar verirler [20].

Bu çalışmanın amacı, olasılık kağıdı aracılığıyla Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edilmesinde sağlam M tahmin edicisinin kullanımını tanıtmak ve bu tahmin edicinin EKK tahmin edicisine etkinliğini bir simülasyon çalışması ile ortaya koymaktır. Bu çalışmada, Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için rank regresyon modeli ele alınmıştır. Parametre tahmini için öncelikle klasik EKK yöntemi kullanılmıştır. Ancak, veri setinde aykırı değer bulunması durumunda EKK tahmin edicisi etkinliğini kaybetmektedir. Bu nedenle çalışmada

EKK tahmin edicisine alternatif olarak sağlam tahmin yöntemi ele alınmıştır. Sağlam tahmin yöntemleri içerisinde ise yaygın olarak kullanılan ve hesaplama kolaylığı bulunan M tahmin edicisi tercih edilmiştir. Tahmin edicilerin karşılaştırılmasında hata kareler ortalaması (Mean Square Error) kriteri kullanılmıştır.

2. Frechet dağılımı

Frechet dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right\}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

(1)

$$f(x) = \frac{\beta}{x} \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right]$$

(2)

Burada α dağılımın ölçek parametresini, β ise şekil parametresini göstermektedir. β şekil parametresinin değerine göre dağılımın çarpıklığı değişmektedir. Dolayısıyla kuyruk davranışları bundan etkilenmektedir. Bu nedenle şekil parametresinin doğru tahmini büyük önem taşımaktadır. Frechet dağılımı, $\beta = 1$ olduğunda ters üstel dağılıma, $\beta = 2$ olduğunda ters Rayleigh dağılımına dönüşmektedir [15]. Dağılımın parametrelerini tahmin etmek için rank regresyon yönteminde yaygın olarak EKK tahmin edicisi kullanılmaktadır.

T_1, T_2, \dots, T_n Frechet dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Eşitlik (1)'de iki kez logaritma alındığında sırasıyla,

$$\ln[F(t_{(i)})] = \ln\left\{\exp\left[-\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^\beta\right]\right\} = -\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^\beta$$

(3)

$$\ln\left\{-\ln[F(t_{(i)})]\right\} = \ln\left[\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)^\beta\right] = \beta \ln \alpha - \beta \ln t_i$$

(4)

eşitlikleri elde edilir. Burada, $Y = \ln\left\{-\ln[F(t_{(i)})]\right\}$ ve $X = \ln t$ olarak alınırsa, Eşitlik (1)

$$\hat{Y} = \beta(\ln \alpha - X) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle α ve β parametrelerinin tahmini için basit doğrusal regresyon modeli kullanılabilir. Literatürde $\hat{F}(t_{(i)})$ birikimli dağılım fonksiyonunun parametrik olmayan tahmin değeri için birçok yaklaşım söz konusudur. Weibull ortalama rank tahmin edicisi, Bernard'ın medyan rank tahmin edicisi, Blom, Filliben ve Drapella ve Kosznik tahmin edicileri en yaygın kullanıma sahip olanlarıdır [21]. Bu çalışmada etkili bir yaklaşım olarak literatürde kabul edilen Bernard'ın medyan rank tahmin edicisi kullanılmıştır [22].

$$\hat{F}(t_{(i)}) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$$

(6)

Eşitlik (6) da i gözlem sırasını ve n örneklem hacmini göstermektedir.

3. Tahmin yöntemleri

Literatürde istatistiksel parametre tahminleri için birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları, en çok olabilirlik yöntemi, EKK, ağırlıklandırılmış EKK, momentler yöntemi, Bayes yöntemi ve sağlam yöntemlerdir. Yapılan çalışmalar incelendiğinde Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için en çok olabilirlik yönteminin sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Fakat bu yöntem büyük örneklem için etkin sonuçlar vermektedir. Güvenilirlik analizinde zaman ve maddi kaynakların sınırlı olması nedeniyle küçük hacimli örneklem söz konusudur. Küçük örneklerde şekil parametresinin tahmini için olasılık kağıdı kullanımı oldukça yaygın bir yöntemdir. Bu yöntem aykırı değer olmadığı durumlarda etkin sonuçlar vermektedir. Ancak aykırı değer olması durumunda etkinliği hızla azalmaktadır. Bu çalışmada veri setinin aykırı değer içerip içermemesi durumunda Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için EKK ve sağlam M tahmin edicileri kullanılmıştır.

3.1. En küçük kareler tahmin edicisi

Parametre tahmini alanında en yaygın kullanıma sahip olan yöntem EKK yöntemidir. Bu yöntemin amacı hata kareler toplamını en küçük yapmaktır. Eşitlik (5) yardımıyla Frechet dağılımının şekil parametresinin EKK tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{EKK} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

(7)

şeklinde hesaplanır. Burada x ve y eşitlik 5'te tanımlandığı gibidir.

3.2. Sağlam M tahmin edicisi

EKK tahmin edicileri hata terimlerinin normal dağılıma uymamasından veya hata terimleri içerisinde aykırı gözlemlerin bulunmasından çok fazla etkilenen tahmin edicilerdir. Bu nedenle model varsayımlarından sapmalardan ve aykırı değerlerden daha az etkilenen tahmin edicilere gereksinim duyulmuş ve sağlam tahmin ediciler geliştirilmiştir. Sağlam tahmin ediciler geniş bir aileye sahiptir. Bu çalışmada hesaplama kolaylığı ve yaygın kullanımı nedeniyle M tahmin edicileri ele alınmıştır.

M tahmin edicileri Huber tarafından 1964 yılında önerilmiştir. M tahmin edicileri hata kareler toplamının en küçüklenmesi yerine hataların bir fonksiyonu olan ρ 'yu küçükler. Basit doğrusal regresyon modeli için hataların fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^n \rho \left[\left(y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \hat{\beta}_j \right) / d \right]$$

(8)

şeklinde yazılabilir. Burada, β regresyon modelinin bilinmeyen parametreleri, d mutlak medyan sapma ve ρ sıfırda sabit, tek minimumlu, türevlenebilir ve simetrik bir fonksiyondur [23]. Burada

Eşitlik (8) in $\hat{\beta}_j$ 'lere göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \psi \left[\left(y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij} \hat{\beta}_j \right) / d \right] = 0 \quad j=1,2,\dots,p$$

(9)

elde edilir. Burada ψ , ρ 'nun türevidir ve etki fonksiyonu olarak adlandırılır. Mutlak medyan sapma değeri d ise

$$d = \frac{\text{medyan} |r_i - \text{medyan}(r_i)|}{0.6745} \quad (10)$$

şeklinde dir. M tahminciler, ρ 'nun uygun seçimi ile aykırı değerlerin etkilerini azaltmada ya da tamamen ortadan kaldırmada etkilidir. ρ 'nun seçimi araştırmacıya bırakılır. M tahmincileri için ağırlık fonksiyonları Çizelge 1'de verilmiştir. Çizelge 1'de yer alan k değeri, uzun kuyruklu simetrik dağılımların kuyruklarını normale çekmek için kullanılan bir ayar sabitidir. M tahmincileri, ağırlıklandırılmış EKK yöntemi kullanılarak da hesaplanmaktadır [24].

Çizelge 1. M tahmin edicileri için ağırlık fonksiyonları

Tahmin Edici	Ağırlık Fonksiyonu	(k)
Huber	$w = \begin{cases} 1 & , r \leq k \\ \frac{k}{r} & , r > k \end{cases}$	1.345
Andrew	$w = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{r}{k}\right)}{r} & , r \leq k\pi \\ 0 & , r > k\pi \end{cases}$	1.339
Tukey	$w = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r}{k}\right)^2\right)^2 & , r \leq k \\ 0 & , r > k \end{cases}$	4.685

Cauchy	$\frac{1}{1 + \left(\frac{r}{k}\right)^2}$	2.385
Welsch	$\exp\left[-\left(\frac{r}{k}\right)^2\right]$	2.985

4. Simülasyon çalışması

Simülasyon çalışmasında EKK ve M tahmin yöntemleri kullanılarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahminleri yapılmıştır. Aykırı değer içeren ve içermeyen küçük hacimli tam örneklemeler kullanılarak tahmin edicilerin performansları hata kareler ortalaması (MSE) kriterine ve yanlılık değerine göre karşılaştırılmıştır. Eşitlik 5 göz önünde bulundurulduğunda, modelde aykırı değerlerin x yönünden kaynaklanabileceği görülmektedir. Bu nedenle çalışmada x yönünde pozitif bir ya da iki aykırı değer var olduğu veri setleri ile çalışılmıştır. Güvenilirlik analizinde küçük veri setleri ile çalışıldığından örneklem büyüklüğü için $n=10, 15, 20, 25, 30$, şekil parametresi için $\beta = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ ve genelliği bozmamak için ölçek parametresi $\alpha=1$ değeri ele alınmıştır. Ele alınan tahmin ediciler n ve β 'nin tüm kombinasyonları, aykırı değerli ve aykırı değersiz veri setleri için karşılaştırılmıştır. Hesaplamalar R paket programı ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca 100000/n Monte Carlo denemesinden sonra MSE ve yan (Bias) değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{(100000/n)} \sum (\hat{\beta} - \beta)^2$$

$$Bias(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta$$

(11)

$$E(\hat{\beta}) = \frac{1}{(100000/n)} \sum \hat{\beta}$$

Aykırı değersiz, bir aykırı değerli ve iki aykırı değerli veri setleri için simülasyon sonuçları Çizelge 2-4'de verilmiştir.

Çizelge 2. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (aykırı değersiz veri)

<i>n</i>	10		15		20		25		30	
Tahminciler	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan
$\beta=0.5$										
EKK	0.02472	-0.06613	0.01743	-0.05926	0.01335	-0.05555	0.01082	-0.05210	0.00915	-0.04407
Huber	0.02329	-0.05111	0.01539	-0.04647	0.01131	-0.04245	0.00889	-0.03882	0.00752	-0.03134
Andrews	0.02437	-0.03722	0.01607	-0.03714	0.01178	-0.03313	0.00910	-0.02892	0.00765	-0.02272
Tukey	0.02435	-0.03719	0.01607	-0.03710	0.01177	-0.03308	0.00910	-0.02893	0.00764	-0.02270
Cauchy	0.02486	-0.04189	0.01559	-0.04207	0.01130	-0.03779	0.00913	-0.03415	0.00787	-0.02746
Welsch	0.02408	-0.03679	0.01592	-0.03742	0.01162	-0.03331	0.00898	-0.02928	0.00763	-0.02320
$\beta=0.8$										
EKK	0.06408	-0.10613	0.04357	-0.09531	0.03424	-0.08813	0.02877	-0.07870	0.02469	-0.07541
Huber	0.06412	-0.08264	0.04381	-0.07685	0.03284	-0.06688	0.02711	-0.05650	0.02082	-0.05286
Andrews	0.06484	-0.06047	0.04396	-0.06303	0.03292	-0.05103	0.02776	-0.04185	0.02091	-0.03843
Tukey	0.06487	-0.06039	0.04396	-0.06300	0.03292	-0.05094	0.02776	-0.04180	0.02089	-0.03848
Cauchy	0.06408	-0.06718	0.04385	-0.07012	0.03284	-0.05916	0.02707	-0.04948	0.02056	-0.04620
Welsch	0.06454	-0.05906	0.04393	-0.06345	0.03290	-0.05162	0.02758	-0.04259	0.02084	-0.03926
$\beta=1$										
EKK	0.09942	-0.13239	0.06820	-0.11960	0.05470	-0.10747	0.04391	-0.09901	0.03840	-0.09086
Huber	0.09834	-0.10672	0.06602	-0.09233	0.05246	-0.08117	0.04255	-0.07187	0.03604	-0.06365
Andrews	0.09834	-0.08058	0.06622	-0.07092	0.05258	-0.06193	0.04265	-0.05288	0.03688	-0.04547
Tukey	0.09835	-0.08050	0.06622	-0.07082	0.05282	-0.06188	0.04276	-0.05283	0.03682	-0.04558
Cauchy	0.09904	-0.08982	0.06658	-0.08235	0.05262	-0.07130	0.04282	-0.06280	0.03656	-0.05541
Welsch	0.09876	-0.07921	0.06672	-0.07141	0.05274	-0.06233	0.04285	-0.05392	0.03629	-0.04681
$\beta=1.5$										
EKK	0.23058	-0.19039	0.15709	-0.17951	0.11848	-0.16320	0.10028	-0.14918	0.08166	-0.13146
Huber	0.22255	-0.14869	0.13802	-0.13955	0.09919	-0.11455	0.08015	-0.10102	0.06363	-0.09527
Andrews	0.22513	-0.14977	0.14565	-0.11181	0.10226	-0.09711	0.08737	-0.08281	0.06615	-0.07105
Tukey	0.25298	-0.14974	0.14555	-0.11161	0.10225	-0.09697	0.08729	-0.08265	0.06602	-0.07118
Cauchy	0.22372	-0.15234	0.14116	-0.12558	0.10928	-0.11056	0.08365	-0.09832	0.06402	-0.08403
Welsch	0.25120	-0.14823	0.14484	-0.11218	0.10128	-0.09778	0.08636	-0.08469	0.06527	-0.07250

Çizelge 3. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (bir aykırı değerli veri)

n	10		15		20		25		30	
Tahminciler	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan
$\beta=0.5$										
EKK	0.02564	-0.08434	0.01876	-0.06867	0.01430	-0.05983	0.01195	-0.05798	0.00990	-0.05064
Huber	0.02314	-0.07225	0.01481	-0.05754	0.01054	-0.04805	0.00875	-0.04649	0.00736	-0.03844
Andrews	0.02368	-0.06038	0.01548	-0.04945	0.01087	-0.03937	0.00892	-0.03862	0.00752	-0.03058
Tukey	0.02368	-0.06039	0.01548	-0.04940	0.01092	-0.03933	0.00891	-0.03850	0.00751	-0.03052
Cauchy	0.02441	-0.06451	0.01492	-0.05364	0.01059	-0.04380	0.00883	-0.04265	0.00764	-0.03481
Welsch	0.02351	-0.06005	0.01503	-0.04955	0.01098	-0.03951	0.00883	-0.03871	0.00753	-0.03112
$\beta=0.8$										
EKK	0.06594	-0.16829	0.04732	-0.13963	0.03635	-0.11995	0.03001	-0.10681	0.02729	-0.09490
Huber	0.06051	-0.14955	0.04182	-0.12131	0.02931	-0.10185	0.02315	-0.08830	0.01918	-0.07581
Andrews	0.06295	-0.13154	0.04195	-0.10899	0.02996	-0.08839	0.02376	-0.07473	0.01928	-0.06292
Tukey	0.06291	-0.13143	0.04192	-0.10889	0.02992	-0.08835	0.02376	-0.07477	0.01935	-0.06292
Cauchy	0.06234	-0.13775	0.04258	-0.11502	0.02976	-0.09534	0.02370	-0.08197	0.01989	-0.06937
Welsch	0.06243	-0.13091	0.04168	-0.10907	0.02972	-0.08895	0.02368	-0.07550	0.02000	-0.06343
$\beta=1$										
EKK	0.10983	-0.24907	0.07777	-0.20346	0.05945	-0.16772	0.04805	-0.14199	0.04076	-0.13005
Huber	0.09657	-0.12438	0.06424	-0.10902	0.05017	-0.10513	0.03847	-0.09993	0.03256	-0.09053
Andrews	0.09632	-0.10144	0.06457	-0.10148	0.05071	-0.10759	0.03897	-0.09409	0.03307	-0.09360
Tukey	0.09686	-0.10144	0.06454	-0.10148	0.05065	-0.10745	0.03891	-0.09401	0.03306	-0.09354
Cauchy	0.09689	-0.10917	0.06472	-0.10053	0.05038	-0.10661	0.03869	-0.09121	0.03478	-0.09086
Welsch	0.09654	-0.08063	0.06483	-0.10220	0.05038	-0.10849	0.03876	-0.09491	0.03288	-0.09059
$\beta=1.5$										
EKK	0.26646	-0.32399	0.21084	-0.31550	0.17368	-0.34569	0.13496	-0.29343	0.11764	-0.26533
Huber	0.20095	-0.13628	0.11136	-0.12411	0.09304	-0.10604	0.07825	-0.09449	0.05792	-0.08464
Andrews	0.20657	-0.13247	0.12704	-0.12165	0.10006	-0.10831	0.08236	-0.09761	0.05830	-0.08673
Tukey	0.20656	-0.13245	0.13694	-0.12506	0.10194	-0.10025	0.08326	-0.09756	0.05825	-0.08686
Cauchy	0.20744	-0.13779	0.13912	-0.13413	0.10258	-0.10037	0.08564	-0.09797	0.05978	-0.09860
Welsch	0.20773	-0.13095	0.13726	-0.13411	0.10100	-0.10027	0.08368	-0.09007	0.05844	-0.08004

Çizelge 4. Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmin edicilerine ilişkin MSE ve yan değerleri (iki aykırı değerli veri)

<i>n</i>	10		15		20		25		30		
	Tahminçiler	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan
						$\beta=0.5$					
EKK	0.02780	-0.09330	0.01974	-0.07839	0.01563	-0.07026	0.01142	-0.05973	0.01005	-0.05396	
Huber	0.02220	-0.08236	0.01348	-0.06895	0.01004	-0.05997	0.00852	-0.04870	0.00728	-0.04420	
Andrews	0.02265	-0.07135	0.01376	-0.06161	0.01014	-0.05262	0.00866	-0.04095	0.00732	-0.03712	
Tukey	0.02264	-0.07134	0.01375	-0.06155	0.01023	-0.05256	0.00865	-0.04087	0.00731	-0.03710	
Cauchy	0.02374	-0.07548	0.01414	-0.06529	0.01048	-0.05621	0.00843	-0.04504	0.00748	-0.04104	
Welsch	0.02346	-0.07095	0.01364	-0.06176	0.01076	-0.05262	0.00856	-0.04119	0.00737	-0.03750	
						$\beta=0.8$					
EKK	0.06988	-0.20793	0.05077	-0.16806	0.03990	-0.14212	0.03264	-0.12192	0.02914	-0.11106	
Huber	0.05925	-0.19474	0.04031	-0.15392	0.02849	-0.12807	0.02271	-0.10587	0.01812	-0.09443	
Andrews	0.06038	-0.18101	0.04051	-0.14326	0.02838	-0.11780	0.02270	-0.09479	0.01857	-0.08266	
Tukey	0.06034	-0.18093	0.04048	-0.14316	0.02817	-0.11774	0.02270	-0.09475	0.01855	-0.08254	
Cauchy	0.06181	-0.18593	0.04094	-0.14847	0.02898	-0.12286	0.02267	-0.10049	0.01855	-0.08908	
Welsch	0.06195	-0.18031	0.04014	-0.14313	0.02890	-0.11786	0.02268	-0.09529	0.01892	-0.08346	
						$\beta=1$					
EKK	0.12993	-0.30825	0.07939	-0.25129	0.06425	-0.20924	0.05241	-0.18686	0.04782	-0.16235	
Huber	0.09210	-0.12971	0.05830	-0.11565	0.04811	-0.09315	0.03423	-0.08837	0.02807	-0.08280	
Andrews	0.09304	-0.12849	0.05876	-0.11337	0.04967	-0.08167	0.03472	-0.08452	0.02934	-0.08219	
Tukey	0.09302	-0.12848	0.05871	-0.11331	0.04961	-0.08156	0.03472	-0.08456	0.02933	-0.08228	
Cauchy	0.09467	-0.12889	0.05863	-0.12008	0.04959	-0.08731	0.03479	-0.08508	0.02978	-0.08364	
Welsch	0.09227	-0.12837	0.05857	-0.12373	0.04946	-0.08198	0.03470	-0.08491	0.02925	-0.08364	
						$\beta=1.5$					
EKK	0.30251	-0.65178	0.28383	-0.53501	0.24468	-0.45554	0.19699	-0.40286	0.16350	-0.36019	
Huber	0.18370	-0.16402	0.10297	-0.15124	0.08566	-0.12414	0.06575	-0.10472	0.05423	-0.09558	
Andrews	0.18525	-0.16274	0.11536	-0.14871	0.09068	-0.13414	0.07276	-0.10258	0.05433	-0.09873	
Tukey	0.18520	-0.16273	0.11525	-0.14852	0.09067	-0.13416	0.07269	-0.10257	0.05493	-0.10081	
Cauchy	0.18893	-0.16323	0.12345	-0.15058	0.09834	-0.13141	0.07999	-0.10203	0.05637	-0.09086	
Welsch	0.18406	-0.16266	0.11613	-0.14965	0.09126	-0.13618	0.07370	-0.10548	0.05595	-0.08240	

Çizelge 2 MSE açısından incelendiğinde;

EKK tahmin edicisinin M tahmin edicilerine göre etkin olmadığı görülmektedir. Genellikle M tahmin edicilerinin MSE değeri EKK tahmin edicisinden küçüktür.

- Şekil parametresi $\beta=0.5$ ve $\beta \geq 1$ olduğu durumlarda, n 'in tüm değerlerinde Huber M tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ olduğunda Cauchy tahmin edicisi etkin sonuçlar vermektedir.

Çizelge 2 yanlılık açısından incelendiğinde;

- Şekil parametresi $\beta=0.5$ olduğu durumda, Tukey tahmin edicisi $n=15, 20$ ve 30 değerleri için en küçük yan değerine sahip tahmin edicidir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ ve $n=10$ için Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahipken, $n=15,20,25$ değerleri için Tukey tahmin edicisinin yanlılık değeri en küçüktür.
- Şekil parametresinin $\beta=1$ ve 1.5 değerleri için $n=15,20,25$ değerlerinde Tukey tahmin edicisi en küçük yan değerine sahipken, $n=30$ olduğunda Andrews tahmin edicisinin yan değeri en küçüktür.

Genel olarak M tahmin edicilerinin yan değerleri, aykırı değer içermeyen veri setinde klasik olarak kullanılan EKK tahmin edicisinin yan değerinden daha küçüktür.

Çizelge 3 MSE açısından değerlendirildiğinde;

veri setinde bir tane aykırı değer olduğu durumda M tahmin edicileri EKK tahmin edicisinden daha küçük MSE değerlerine sahiplerdir. EKK tahmin edicisinin MSE değeri aykırı değer varlığı durumunda artmaktadır. Bu da EKK tahmin edicisinin aykırı değerlerden oldukça etkilendiğini doğrulamaktadır.

- Şekil parametresi $\beta=0.5$ ve $\beta=1.5$ olduğu durumlarda, n 'in tüm değerlerinde Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ ve $n=15$ değeri için Welsch tahmin edicisi, en küçük MSE değerine sahipken, n 'in diğer değerleri için Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi $\beta=1$ ve $n=10$ için Andrews tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahipken, n 'in diğer değerleri için Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerini vermektedir.

Çizelge 3 yanlılık açısından değerlendirildiğinde;

- Şekil parametresinin tüm değerlerinde ve $n=10$ için Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir. Ayrıca $\beta=0.5$ için $n > 10$ değerlerinde ise Tukey tahmin edicisi en küçük yan değeri tahmin edicidir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ olduğu durumda $n=15,20,30$ değerlerinde Tukey tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.
- Şekil parametresi $\beta=1$ olduğu durumda $n=15,25$ değerlerinde Cauchy tahmin edicisi en küçük yan değeri tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.

- Şekil parametresi $\beta=1.5$ olduğu durumda $n>20$ değerlerinde Welsch tahmin edicisi en küçük yan değerine sahiptir.

Çizelge 4'e MSE açısından bakılırsa;

veri setinde iki aykırı değer olduğu durumda EKK tahmin edicisinin MSE değeri artarken, M tahmin edicilerinin MSE değeri azalmaktadır. Sağlam tahmin ediciler aykırı değerlerin etkilerini azaltmaktadır.

- Şekil parametresi $\beta=0.5$, $\beta=1$ ve $\beta=1.5$ olduğu durumlarda genellikle Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ olduğunda $n=10,30$ değerlerinde Huber tahmin edicisi en küçük MSE değerine sahiptir. n ' in diğer değerleri için etkin tahmin ediciler değişmektedir.

Çizelge 4'e yanlılık açısından bakılırsa;

M tahmin edicilerinin yan değerleri EKK' dan genel olarak daha küçüktür.

- Şekil parametresi $\beta=0.5$ ve $n=10$ değeri için en küçük yanlı tahmin edici Welsch tahmin edicisi iken, $n >10$ olduğunda Tukey tahmin edicisi en küçük yanlı tahmin edicidir.
- Şekil parametresi $\beta=0.8$ ve $n \leq 15$ değerleri için en küçük yanlı tahmin edici Welsch tahmin edicisi iken, $n >15$ değerleri için Tukey tahmin edici en küçük yan değerine sahiptir.

Hem MSE hem de yan değerlerine bakıldığında Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmininde M tahmin edicilerinin EKK tahmin edicisinden daha etkin sonuçlar verdiği görülmektedir. M tahmin edicilerinin, şekil parametresinin farklı değerleri ve örneklem hacmine bağlı olarak farklı performanslar göstermesine rağmen, birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verdikleri gözlenmiştir. Huber, Tukey, Cauchy ve Welsch tahmin edicileri MSE ve yan kriteri bakımından en etkin tahmin edicilerdir.

5. Sonuç

Bu çalışmada küçük örneklerde veri setinin aykırı değer içerip içermediği durumlarda Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini için EKK ve sağlam M tahmin edicileri ele alınmıştır. EKK tahmin edicisinin model varsayımlarının sağlanamaması ve veri setinin aykırı değer içermesi durumunda etkinliği azalmaktadır. Bu durumda parametre tahmini için sağlam yöntemler tercih edilebilir. Güvenirlilik analizlerinde örneklem hacmi genellikle küçüktür. Bu çalışmada küçük örneklemle dayalı olarak Frechet dağılımının şekil parametresinin tahmini çalışılmıştır. Frechet dağılımının şekil parametresinin rank regresyon aracılığı ile tahmin edilmesinde karşılaştırılma kriteri olarak yan ve MSE değerleri kullanılmıştır.

Simülasyon sonuçları incelendiğinde M tahmin edicilerinin aykırı değersiz ve aykırı değerli veri setleri için Frechet dağılımının şekil parametresini tahmin etmede EKK tahmin edicisinden daha etkin olduğu görülmüştür. M tahmin edicilerinin MSE ve yan değerleri genel olarak EKK tahmin edicisinden daha küçüktür. Veri setinde aykırı değer bulunmaması durumunda M tahmin edicilerinden Huber ve Cauchy tahmin edicisinin diğer tahmin edicilerden daha etkin sonuçlar verdiği görülmüştür. Veri setinde bir aykırı değer bulunması durumunda Huber tahmin edicisinin ve iki aykırı değer bulunması durumunda ise Huber ve Tukey tahmin edicilerinin daha iyi

sonuçlar verdiği ortaya belirlenmiştir. Çalışmanın sonucu olarak güvenilirlik analizinde, küçük örneklemelerde, sağlam M tahmin edicilerinin EKK tahmin edicisine alternatif olarak kullanılabileceği görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] T. Kernane, Z. Raizah, 2014, Estimation of the Parameters of Extreme Value Distributions from Truncated Data Via the EM Algorithm Estimation of the Parameters of Extreme Value Distributions from Truncated Data Via the EM Algorithm, [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00503252v2/document].
- [2] M. Frechet, 1927, Sur la loi de probabilité de lecart maximum, Ann. Soc. Polon. Math, 6(93) [https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/frechet-distribution/]
- [3] K. Abbas, T. Yincan, 2012, Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape, Caspian Journal of Applied Sciences Research, 1(10), pp. 58-64.
- [4] S. Kotz, S. Nadarajah, 2000, Extreme Value Distributions Theory and Applications, Imperial College Press, Singapore.
- [5] D.G. Harlow, 2002, Applications of the Frechet distribution function, Int. J. of Materials & Product Technology, 17, 482-495.
- [6] A. Zaharim, S.K. Najid, A.M. Razali, K. Sopian, 2009, Analyzing malaysian wind speed data using statistical distribution, In Proceedings of the 4th IASME/WSEAS International conference on Energy and Environment. University of Cambridge, February, 24-26
- [7] S. Nadarajah, S. Kotz, 2008, Sociological models based on Fréchet random variables, Qual Quant, 42, 89–95.
- [8] F.G. Akgül, B. Şenoğlu (2018) Comparison of Estimation Methods for Inverse Weibull Distribution. In: Tez M., von Rosen D. (eds) Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference. Contributions to Statistics. Springer, Cham.
- [9] M. Mubarak, 2011, Estimation of the Frechet distribution parameters based on record values, Arabian Journal for Science and Engineering, 36,1597–1606.
- [10] C. Chatterjee , A. Chatterjee, 2012, *Use of the Frechet distribution for UPV measurements in concrete*. NDT&E International, 52, 122-128.
- [11] R.B. Silva, M. Bourguignon, G.M. Cordeiro, 2014, *Fréchet and inverse gamma distributions: correct selection and minimum sample size to discriminate them*, Journal of Statistical Theory and Practice, 9(1), 73-87.
- [12] K. Abbas, Y. Tang, 2015, *Analysis of Frechet Distribution Using Reference Priors*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 44(14), 2945-2956.
- [13] A. Z. Afify, H. M. Yousof, G. M. Cordeiro, E. M. M. Ortega, Z. M. Nofal, 2016, *The Weibull Fréchet distribution and its applications*, Journal of Applied Statistics, Volume 43, 2608-2626.
- [14] S. Pindado, C. Pindado, J. Cubas, 2017, *Fréchet distribution applied to salary incomes in spain from 1999 to 2014. an engineering approach to changes in salaries' distribution*, Economies, 5(14),1-19.
- [15] F. Maleki, E. Deiri, 2017, *Efficient Estimation of the pdf and the cdf of the Frechet Distribution*, Annals of Data Science, 4(2),211–225.
- [16] M. Zayed, N.S Butt, 2017, *The Extended Frechet Distribution: Properties and Applications*, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 3, 529-543.
- [17] M.A. Haq, H.M. Yousof, S. Hashmi, 2017, *A New Five-Parameter Fréchet Model for Extreme Values*, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research 13(3), 617-632.
- [18] C. J. Tablada, G.M. Cordeiro, 2017, The modified Fréchet distribution and its properties, Communications in Statistics- Theory and Methods, 46, 21,
- [19] P.L. Ramos, F. Louzadaa, E. Ramosa and S. Dey, 2018, *The Frechet distribution: Estimation and Application an Overview*, arXiv:1801.05327 [stat.AP].
- [20] C. Lawson, J.B. Keats, D.C. Montgomery, 1997, Comparison of Robust and Least Squares Regression in Computer-Generated Probability Plots, IEEE Transactions on Reliability, 46 (1), 108-121.
- [21] A. A. Yavuz (2013), Estimation of the Shape Parameter of the Weibull Distribution Using Linear Regression Methods: Non-Censored Samples. Qual. Reliab. Engng. Int., 29: 1207-1219. doi:10.1002/qre.1472.
- [22] A. Benard, E.C. Bos-Levenbach, 1953, The plotting of observations on probability paper. Statistica Neerlandica 7,163–173.
- [23] P.J. Huber, E.M. Ronchetti, 2009, Robust Statistics, Wiley Series in Probability and Statistics. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
- [24] D.N. Gujerati, D.C. Porter, 2016, Temel ekonometri, 5. Basım, Literatür yayıncılık, İstanbul.



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 11, 2018, 2, 121-142

Geliş/Received:15.09.2018, Kabul/Accepted: 29.12.2018

www.istatistikciler.org

Araştırma Makalesi / Research Article

Ekstrem değerler teorisi ve Monte Carlo simülasyonu: Gelişen ülke döviz kurları üzerine bir uygulama

Önder Büberkökü

Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Finans Bilim Dalı, Van, Türkiye

onderbuber@gmail.com

 0000-0002-7140-557X

Öz

Bu çalışmada Brezilya, Meksika, G. Kore, Tayvan, Hindistan, Tayland, Türkiye ve G. Afrika'dan oluşan 8 gelişen ülkenin para birimlerinin ekstrem finansal koşulların söz konusu olması durumunda maruz kalabileceği maksimum kayıp tutarları hesaplanmıştır. Hesaplamalarda ekstrem değerler teorisinden (Extreme value theory) yararlanılmış ve farklı döviz pozisyonlarını dikkate almak amacıyla hem aşağı hem de yukarı yönlü piyasa riski (downside and upside market risk) üzerinde durulmuştur. Çalışmada finansal risk yönetimi açısından bir diğer önemli gösterge olan beklenen kayıp tutarları (Expected Shortfall, ES) da hesaplanmıştır. Çalışma bulguları ilgili ülkelerin döviz piyasalarında ekstrem durumların gerçekleşmesi durumunda hem kısa hem de uzun pozisyonlar için en yüksek kayıp tutarlarının sırasıyla Brezilya Reali ve G.Afrika Randı; en düşük kayıp tutarlarının ise Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisinde gerçekleşebileceğini göstermektedir. ES değerlerinin de benzer bulgulara işaret ettiği görülmüştür. Çalışmada, normal piyasa koşullarındaki kayıp tutarlarını temsilen Monte Carlo simülasyonuna dayalı finansal risk analizlerine de yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Beklenen kayıp tutarları, Döviz kurları, Ekstrem değerler teorisi, Monte Carlo simülasyonu, Riske maruz değer

Abstract

Extreme value theory and Monte Carlo simulation: An application to emerging markets exchange rates

In this study, the maximum amount of losses to which the emerging market currencies including Brazilian Real, Mexico Peso, South Korean Won, New Taiwan Dollar, Indian Rupee, Thailand Baht, Turkish Lira and South African Rand can be exposed due to extreme financial conditions is measured by using value-at-risk based on extreme value theory (EVT-VaR). In order to take into account the different trading positions (i.e. long and short ones) both upside and downside market risks are considered. In all cases expected shortfall is also calculated. The findings based on EVT-VaR show that in the case of extreme financial conditions in foreign exchange markets of the countries concerned, the highest losses for both short and long positions are in Brazilian Real and south African Rand; while the lowest losses are in New Taiwan Dollar, Thai Baht and Indian Rupee. In all cases ES also indicates the similar results. Lastly, for comparative analyses, the study also includes risk analyzes based on Monte Carlo simulation, representing losses in normal market conditions.

Keywords: Expected shortfall, Exchange rates, Extreme value theory, Monte Carlo simulation, Value-at-risk;

1.Giriş

Finansal risk yönetiminde piyasa riskinden dolayı maruz kalınabilecek maksimum kayıp tutarlarının hesaplanmasında VaR (Value-at-risk, VaR) yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Literatürde, çeşitli VaR yöntemleri bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak, varyans-kovaryans yöntemi, tarihi simülasyon yöntemi (Historical simulation, HS), filtrelenmiş tarihi simülasyon yöntemi (Filtered historical simulation, FHS) ve Monte Carlo simülasyon (Monte Carlo simulation, MCS) yöntemi gösterilebilir. Bu yöntemlerden varyans-kovaryans yöntemi literatürde ve uygulamada en sık kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin hesaplanma kolaylığı ve getirilerin doğrusallığı durumundaki performansı önemli avantajları arasında yer almaktadır. Fakat, bu yöntemin bazı önemli dezavantajları da bulunmaktadır. Örneğin, bu yöntemin kullanılabilmesi için bir dağılım varsayımına ve GARCH tipi (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) bir modele ihtiyaç duyulmaktadır. Fakat, literatürde hangi dağılım varsayımının ve / veya GARCH modelinin finansal zaman serileri için daha uygun olduğuna dair bir uzlaşma bulunmamaktadır. Bu nedenle, varyans-kovaryans yöntemine dayalı VaR analizlerinin yanlış sonuçlar üretme olasılığı yüksektir. HS yönteminde ise VaR değerleri getirilerin geçmişteki dağılımının gelecekte de aynı olacağı varsayımına dayalı olarak tarihi getirilerden hareketle hesaplanmaktadır. Bu nedenle, bu yöntemde bir model ve / veya dağılım varsayımına ihtiyaç duyulmamaktadır. Fakat, HS yönteminin VaR değerlerini öngörürken geçmişe oldukça bağımlı olması ve tüm getirilere aynı derecede önem atfetmesi gibi kısıtları bulunmaktadır. FHS yöntemi ise varyans-kovaryans yöntemi ile HS yöntemini birleştiren bir yöntemdir. Bu yöntemle hem finansal zaman serilerinin temel karakteristik özelliklerini oluşturan unsurlar (çarpıklık, kalın kuyruk ve volatilité kümelenmesi gibi) modele dahil edilebilmekte hem de model tahmininde kullanılan geçmiş veriler güncel bilgileri içerecek şekilde düzeltilmektedir. MCS yöntemi ise belli bir dağılım varsayımı çerçevesinde oluşturulan rassal verilerden hareketle VaR öngörülerinin hesaplanmasına dayanan bir yöntemdir [1,2].

Belirtilen tüm bu risk ölçüm yöntemleri daha çok normal piyasa koşulları altında gerçekleştirilebilecek kayıp tutarlarının hesaplanmasında kullanılan yöntemlerdir¹. Bir diğer ifadeyle, bu yöntemler finansal zaman serilerinin dağılımlarının kuyruk bölgelerini yeterince dikkate almamakta bu nedenle de özellikle ekstrem riskin söz konusu olduğu dönemlerde piyasa riskinin olduğundan daha az ölçülmesine yol açabilmektedirler. Bu durum özellikle 2007-2008 döneminde başlayan mortgage krizi ve sonrasında yaşanan banka iflasları ile birlikte daha da önemli bir konu haline gelmiş ve bu tür geleneksel VaR yöntemlerine dönük eleştirilerde önemli bir artış olmuştur [Örneğin bkz: 3, 4, 5, 6]. Bu eleştiriler uygulamada da karşılık bulmuş ve Basel komitesince VaR hesaplamalarında ekstrem durumların da dikkate alınması için stress-VaR yönteminin kullanılabilmesi ifade edilmiştir. Stress-VaR yöntemi finansal risk ölçümünde normal dönemler ile volatilitenin oldukça arttığı dönemlerin birlikte ele alınması esasına dayanan bir yöntemdir.

Literatürde ise ekstrem piyasa koşullarının söz konusu olması durumunda geleneksel VaR ölçüm yöntemlerinin riski ölçmedeki yetersizliği nedeniyle ekstrem değerler teorisine dayalı VaR analizlerine (EVT-VaR) dönük yoğun bir ilgi oluşmaya başlamıştır [Örneğin bkz: 7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15,6] Çünkü, EVT-VaR yöntemleri geleneksel VaR yöntemlerinin aksine doğrudan incelenen dönem içerisinde gerçekleşen ekstrem değerleri esas almaktadır. Bu nedenle de gerçekleşme olasılığı az ama etki derecesi yüksek olayları modelleyebilmektedir. Bunu yaparken de incelenen dönem içerisinde gerçekleşen getirilerin orijinal dağılımı konusunda herhangi bir dağılım varsayımına ihtiyaç duymamaktadır. Bir diğer

¹ MC simülasyonu belli varsayımlar altında oldukça farklı değerler üretebilmekte ve bu değerler içerisinde ekstrem değerler de yer alabilmektedir. Fakat, MC simülasyonu doğrudan ekstrem değerlere odaklanan bir analiz yöntemi olmadığından ekstrem piyasa koşullarının söz konusu olması durumunda kayıp tutarlarının ne olabileceği sorusuna doğrudan yanıt verememektedir. Bu nedenle belirtilen hususun genel olarak MC için de geçerli olduğu ifade edilebilir.

ifadeyle, getiri serilerinin orijinal dağılımından bağımsız olarak ekstrem değerleri modelleyebilmektedir [16]².

Bu kapsamda, literatüre bakıldığında genel olarak EVT-VaR yöntemlerinin riskin oldukça arttığı dönemlerde geleneksel VaR yöntemlerinden daha iyi performans sergilediğini ifade eden çalışmaların sayısının arttığı gözlemlenmektedir. Örneğin, Muela, Martin ve Sanz [6] hisse senedi piyasalarını inceledikleri çalışmalarında EVT-VaR yönteminin piyasa riskini EWMA (Exponentialy Weighted Moving Average, EWMA) ve Cornish-Fisher yöntemlerinden daha başarılı bir şekilde modellediği sonucuna ulaşmışlardır. Çifter [12] Türkiye ve Macaristan gösterge hisse senedi endekslerini incelediği çalışmasında bir hibrit model olarak wavelet yaklaşımına dayalı EVT-VaR modelinin EWMA ve GARCH modellerine göre daha etkin bir model olduğunu ifade etmiştir. Marimoutou, Raggad ve Trabelsi [10] petrol piyasasını inceledikleri çalışmalarında genel olarak EVT-VaR ve FHS yöntemlerinin HS ve GARCH yöntemlerinden daha iyi performans sergilediğini belirtmişlerdir. Byström [17] hisse senedi piyasalarını incelediği çalışmasında EVT-VaR yaklaşımının GARCH modellerine göre daha etkin risk öngörülerini ürettiği sonucuna ulaşmıştır. Gençay ve Selçuk [18] hisse senedi piyasalarını inceledikleri çalışmalarında EVT yönteminin özellikle yüksek güven düzeylerinde parametrik yöntem ve HS yöntemine göre daha başarılı bir model olduğunu ifade etmişlerdir. Jesus, Ortiz ve Cabello [13] Meksika Pesosu için çeşitli modellerin performansını karşılaştırdıkları çalışmalarında EVT-VaR yönteminin performansının geleneksel VaR yöntemlerinin performansından daha iyi olduğunu belirtmişlerdir. Wang vd. [19] Çin Yuanı için EVT, HS ve parametrik VaR yöntemlerinin performanslarını karşılaştırdıkları çalışmalarında EVT'nin HS ve parametrik VaR yöntemlerinden daha iyi performans sergilediği sonucuna ulaşmışlardır. Goncu vd. [21] BIST100 endeksini inceledikleri çalışmalarında EVT-VaR yönteminin normal dağılım varsayımı altında tahmin edilen geleneksel VaR yöntemine göre daha iyi bir risk yönetim performansı sergilediğini belirtmişlerdir. Liao vd. [20] da Bayesci yaklaşıma dayalı EVT-VaR yönteminin HS ve parametrik VaR yöntemlerine göre daha iyi VaR öngörülerini ürettiği ifade etmişlerdir.

Ulusal yazındaki çalışmalara bakıldığında ise bu alanda oldukça sınırlı sayıda çalışma olduğu gözlemlenmektedir. Örneğin, Çifter, Özün ve Yılmaz [22] faiz oranları için çeşitli yöntemlerin performansını karşılaştırdıkları çalışmalarında GARCH ve asimetric GARCH yöntemlerinin kısa vadeli öngörü sağladığı EVT-VaR yönteminin ise orta ve uzun vadeli öngörü yapmayı daha kolay hale getirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Çifter, Özün ve Yılmaz [23] EVT-VaR yöntemine de yer vererek Dolar / TL için alternatif geriye dönük test istatistiklerinin performanslarını inceledikleri çalışmalarında, analizlerde kullanılan yöntemlerin model riski taşıyabileceği ve Basel düzenlemelerinin tavsiye ettiği basit geriye dönük test yaklaşımı dışında literatürde yer alan diğer geriye dönük test istatistiklerinden de yararlanılması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Altun [14] BIST30 endeksindeki banka hisseleri için EVT ile diğer önemli geleneksel VaR yöntemlerinin performansını karşılaştırdığı çalışmasında uygulanan dinamik analizler ve geriye dönük test istatistiği sonuçlarına göre EVT yönteminin daha uygun bir yöntem olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Literatürde bu aşamaya kadar değinildiği gibi, EVT-VaR yöntemi ile diğer VaR yöntemlerinin piyasa riski öngörü performansını karşılaştıran çalışmalar olduğu gibi, doğrudan EVT-VaR yöntemini kullanarak finansal varlıkların ekstrem durumların gerçekleşmesi durumundaki risk düzeyini ölçen (Bir diğer ifade ile EVT-VaR ve / veya EVT-ES değerlerini hesaplayan) çalışmalar da bulunmaktadır. Bu kapsamdaki uluslararası çalışmalara bakıldığında Iglesias, Dolores ve Varela [24] Eurostoxx50'de işlem gören 50 firmayı inceledikleri çalışmalarında EVT-VaR sonuçlarına göre telekomünikasyon ve bankacılık sektörlerinin en riskli; petrol, enerji ve tüketim sektörlerinin ise en az riskli sektörler olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Iglesias [25] Euro, İngiliz Sterlini, Kanada Doları, Japon Yeni, İsviçre Frangı, Avustralya Doları ve Yeni Zelanda Dolarının risk profillerini incelediği çalışmasında EVT-VaR sonuçlarına göre en riskli para biriminin Japon Yeni olduğu ardından İsviçre Frangı ve Kanada Dolarının geldiği en az riskli

² Bu nokta önemlidir. Çünkü, her ne kadar literatürde ve uygulamada getiri serilerinin modellenmesinde standart normal dağılım, Student t dağılımı, çarpık Student t dağılımı ve genelleştirilmiş hata terimleri dağılımı gibi dağılım varsayımları kullanılsa da aslında getiri serilerinin orijinal dağılımının gerçekte ne olduğunun bilinmesi pek mümkün değildir (Bensalah, s.2, 2000)

para biriminin ise İngiliz Sterlini olduğu sonucuna ulaşmıştır. Assaf [26] Türkiye, Mısır, Ürdün ve Fas hisse senedi piyasalarını incelediği çalışmasında EVT-VaR sonuçlarına göre Türk hisse senedi piyasasının en riskli hisse senedi piyasası olduğu ardından Mısır hisse senedi piyasasının geldiğini Fas ve Ürdün hisse senedi piyasalarının ise en az riskli hisse senedi piyasaları olduğu sonucuna ulaşmıştır. Iglesias [27] DAX30, IBEX 35, CAC 40, FTSE100, FTSE MIB, AEX 25 ve ISEQ hisse senedi piyasalarında işlem gören şirketleri incelediği çalışmasında EVT-VaR ve EVT-ES sonuçlarına göre özellikle telekomünikasyon ve bankacılık sektörlerinin en riskli sektörler olduğu ayrıca genel olarak en riskli firmaların İrlanda en az riskli firmaların ise İspanya hisse senedi piyasalarında bulunduğu sonucuna ulaşmıştır. Gilli ve Kellezi [8] 6 farklı hisse senedi endeksini inceledikleri çalışmalarında EVT-VaR sonuçlarına göre en riskli hisse senedi endeksinin Hang Seng (Hong Kong); en az riskli hisse senedi endeksinin ise S&P500 (ABD) endeksi olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Kalyvas, Siriopoulos ve Dritsakis [28] İngiltere (FTSE 100), Fransa (CAC40), Almanya (DAX30) ve Yunanistan (ASE) hisse senedi piyasalarını inceledikleri çalışmalarında EVT-VaR sonuçlarına göre en riskli hisse senedi piyasasının Yunanistan en az riskli hisse senedi piyasasının ise İngiltere hisse senedi piyasası olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca, benzer EVT analizlerini Payaslıoğlu [29] ve Bensalah [30] sırasıyla Türk Lirası ve Kanada Doları için yaparken Ren ve Giles [31] ile Fretheim ve Kristiansen [32] sırasıyla Kanada ham petrolü ve tarımsal emtialar için yapmışlardır.

Ulusal yazındaki çalışmalara bakıldığında ise bu kapsamda da oldukça sınırlı sayıda çalışma olduğu gözlemlenmektedir. Örneğin, Soyalp vd. [33] Türkiye, Şili ve Polonya hisse senedi piyasalarının EVT-VaR değerlerini hesapladıkları çalışmalarında en riskli piyasanın Polonya hisse senedi piyasası olduğunu ardından Türk hisse senedi piyasasının geldiğini en az riskli piyasanın ise Şili hisse senedi piyasası olduğunu ifade etmişlerdir. Çelik ve Kaya [34] BIST'te işlem gören bazı şirketlerin piyasa riskini parametrik VaR, HS ve EVT yöntemleri ile inceledikleri çalışmalarında hisselerin risk düzeylerinin kullanılan yöntemlere göre değiştiği sonucuna ulaşmışlardır. Arık vd. [35] BIST100 endeksini dikkate alarak parametrik VaR ile GEV ve GPD dağılımlarına dayalı EVT yöntemlerinin performanslarını karşılaştırdıkları çalışmalarında GPD dağılımına dayalı EVT yönteminin en uygun yöntem olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu çalışmanın amacı Brezilya, Meksika, G. Kore, Tayvan, Hindistan, Tayland, Türkiye ve G. Afrika'dan oluşan 8 gelişen ülkenin para birimlerinin ekstrem finansal koşulların söz konusu olması durumunda maruz kalabileceği maksimum kayıp tutarlarının hesaplanmasıdır. Buna ilaveten çalışmada, MC simülasyonuna dayalı VaR (MC-VaR) analizlerine de yer verilmiştir. Bunun temel nedeni normal piyasa koşulları altındaki kayıp tutarlarına odaklanan yöntemlerin kullanılması durumunda ortaya çıkacak kayıp tutarlarının ne olabileceğinin belirlenmesi ve bu kayıp tutarlarının EVT-VaR değerleri ile karşılaştırılabilmesidir.

Bu çalışmada EVT-VaR analizinin döviz kurları için yapılmasının ise bazı önemli nedenleri bulunmaktadır. Öncelikle, bilindiği gibi, bu çalışmada incelenen ülkelerin çoğu 1990-2002 yılları arasında önemli finansal krizler yaşamışlardır (Örneğin, 1994 Meksika, 1997-98 Asya, 2001 Türkiye ve 1999 Brezilya krizi gibi). Bu kriz süreçlerinde de bu ülkelerde uygulanan döviz kuru politikalarının ve döviz piyasalarındaki gelişmelerin önemli bir rolü olmuştur. Dolayısıyla, bu tecrübelerden de hareketle, ilgili literatürde de ifade edildiği gibi, özellikle gelişen ekonomiler için döviz piyasalarında ortaya çıkan risklerin bu ülkeler için daha sonra sistematik riske dönüşebilme potansiyeli bulunmaktadır. Bu nedenle de TCMB (Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası, TCMB) 2010 yılının sonlarından itibaren uygulamaya başladığı geleneksel olmayan para politikası uygulamaları çerçevesinde döviz piyasalarındaki gelişmelerin finansal krizler ile doğrudan ilişkili olduğunu ifade ederek döviz kurlarındaki gelişmeleri makro finansal istikrarın somut parametrelerinden biri olarak tanımlamıştır [36, 37].

Güncel gelişmelere bakıldığında da özellikle FED'in (Federal Reserve Bank, FED) faiz artışına ilaveten bilanço küçültmeye dayalı para politikası uygulamalarına da başlaması, ECB'nin (European Central Bank, ECB) 2018 yılı sonunda varlık alım programını sonlandıracağını belirtmesi ve BOJ'un (Bank of Japan, BOJ) 2019 yılı içerisinde parasal sıkılaştırmaya başlayacağını ifade etmesi gibi gelişmeler gelişen ekonomilere dönük sermaye akışının azalmasına ve / veya sermayenin maliyetinin artmasına yol açabilmektedir. Sermaye hareketlerindeki volatilitenin ve beklentilerdeki değişimlerin Türkiye gibi

gelişen ülke ekonomilerinin finansal istikrar düzeyi üzerinde önemli etkileri olduğu da bilinmektedir [37]. Dolayısıyla, gelişmiş ülke merkez bankalarının giderek sıkılaştıran para politikası uygulamaları ve uygulamalarının gelişen ekonomilere dönük beklentiler ve sermaye hareketleri üzerindeki etkisi ile gelişen ülke ekonomilerinin kendi iç dinamiklerinden kaynaklanan iktisadi ve finansal gelişmeler birleşince EVT'ye dayalı finansal risk analizlerinin yapılmasının mevcut konjonktürde önemini arttırdığı düşünülmektedir.

Bu çalışmanın literatüre katkısı ise şu şekilde ifade edilebilir: Öncelikle, 2007-2008 küresel finans krizi sonrasında uluslararası yazında EVT-VaR analizlerinde belirgin bir artış olmasına rağmen ulusal yazında EVT yöntemine dayalı oldukça az sayıda çalışma olduğu ve bu çalışmaların da 2007-2008 küresel finans krizini kapsamadığı görülmektedir. İkinci önemli nokta ise yine uluslararası yazında VaR yöntemlerinin hem aşağı hem de yukarı yönlü piyasa riski ölçüm performansları yoğun bir şekilde incelenirken [Örneğin bkz: 3,38, 39,40,41, 42] ulusal yazındaki çalışmaların çoğu durumda sadece aşağı yönlü piyasa riskine odaklandıkları görülmektedir. Halbuki, taşınan pozisyonun özelliğine bağlı olarak yatırımcıların ve / veya finansal kurumların karşı karşıya kaldıkları risklerin türü de farklılaşmaktadır. Örneğin, döviz borcu olan bir şirket veya yatırımcı için risk döviz kurlarında yukarı yönlü bir hareketin yaşanması iken döviz alacağı bulunan bir yatırımcı veya şirket için risk döviz kurlarında aşağı yönlü bir hareketin yaşanmasıdır. Dolayısıyla, birinci durumdaki pozisyonun riskini ölçmek için yukarı yönlü piyasa riskinin hesaplanması gerekirken ikinci durumdaki pozisyonun riskini ölçmek için aşağı yönlü piyasa riskinin hesaplanması gerekmektedir. Bu nedenle, bu çalışmada EVT-VaR analizlerinde her iki durum da dikkate alınmıştır. Buna ilaveten, çalışmada ES değerlerine de yer verilmiştir. Çünkü, diğerlerinin yanı sıra Giot ve Laurent'in [40] ifade ettiği gibi ES değerleri gerçekleşen kayıp tutarlarının VaR yöntemlerince öngörülen kayıp tutarını aşması durumunda bir yatırımcının ve / veya finansal kurumun karşı karşıya kalabileceği ortalama maksimum kayıp tutarının hangi seviyelere ulaşabileceği konusunda bir ölçü sunması nedeniyle finansal risk yönetiminin bir diğer önemli unsurunu oluşturmaktadır. Ayrıca, literatürde ES yönteminin sahip olduğu özelliklere bağlı olarak risk ölçümünde klasik VaR yöntemlerinden daha iyi bir yöntem olduğunu ifade eden çalışmalar da bulunmaktadır [Örneğin bkz: 43,44,45, 46, 47]. Bunun yanı sıra, EVT ile karşılaştırma imkanı sunması amacıyla çalışmada Monte Carlo simülasyonuna dayalı VaR ve ES değerlerine de yer verilmiştir. Son olarak da çalışmada Türkiye ile birlikte diğer 7 gelişen ülke döviz piyasaları da modellenmiştir. Bunun da Türkiye'nin diğer bazı gelişen piyasalarla birlikte küresel bazdaki durumunun ne olduğunun anlaşılması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde veri ve metodoloji yer almakta; üçüncü bölümde bulgular sunulmakta; dördüncü bölümde ise sonuç kısmı yer almaktadır.

2. Veri ve Metodoloji

2.1. Veri

Çalışma 2002 Ocak ile 2017 Şubat dönemini kapsamakta ve günlük verilerden oluşmaktadır. Veriler ABD dolarının yerel para birimi cinsinden karşılığını göstermektedir. Brezilya, G.Afrika, G.Kore, Meksika, Hindistan, Tayland ve Tayvan para birimlerine ilişkin veriler FED veri tabanından, Türkiye'ye ilişkin veriler ise FED veritabanında bulunmadığı için TCMB veri tabanından temin edilmiştir. İlgili ülkelerin gelişen piyasalar olarak tanımlanmasında MSCI (Morgan Stanley Capital International, MSCI) sınıflandırması esas alınmıştır³. Döviz kurlarına ilişkin ayrıntılı bilgiler Tablo 1'de döviz kuru serileri ise Grafik 1'de sunulmuştur. Günlük logaritmik getiri serileri (r_t) Denklem (1)'deki gibi hesaplanmıştır:

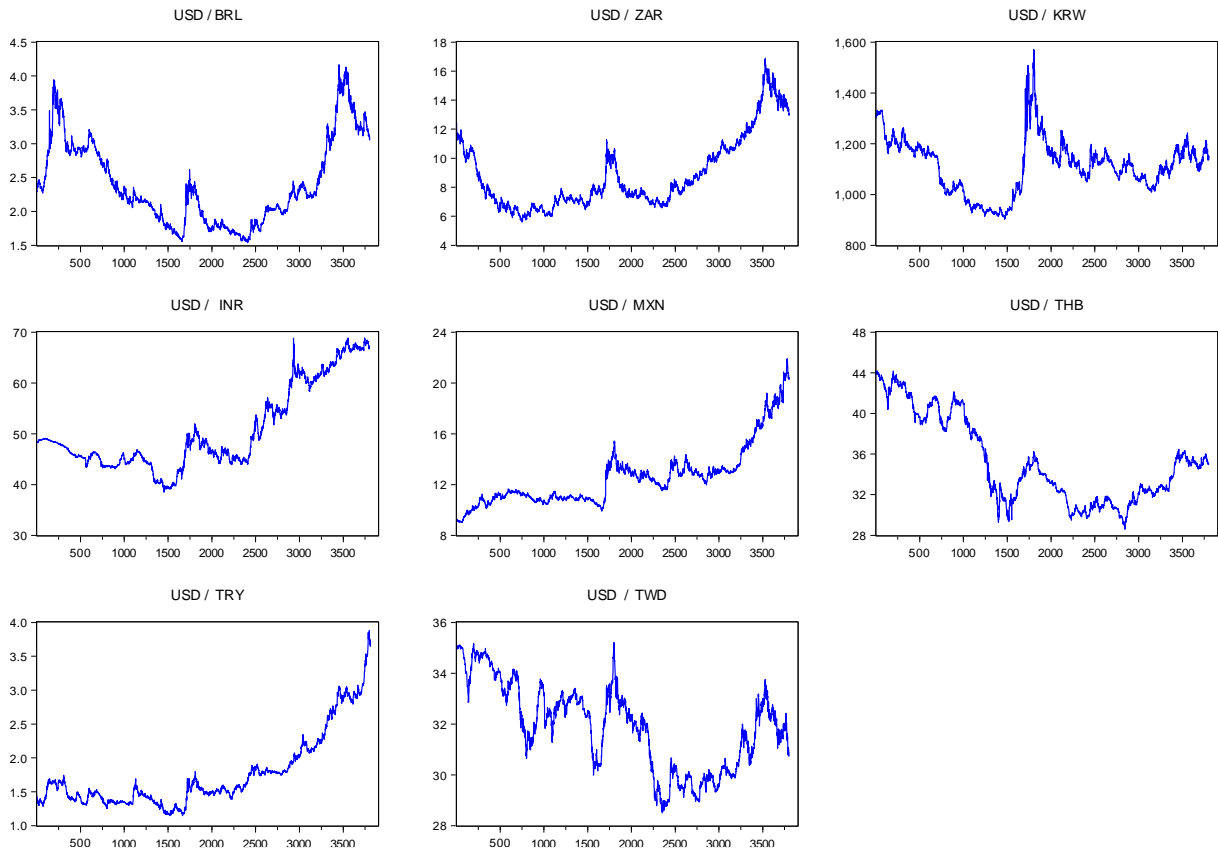
$$r_t = 100 * [\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] \quad (1)$$

Burada P_t , ilgili döviz kurunun / paritenin t zamanındaki kapanış değerini göstermektedir.

³ Ayrıntılar için bkz: <https://www.msci.com/market-classification>

Tablo 1. Çalışmada kullanılan değişkenler

Ülkeler	Sembol	Para birimi
Brezilya	USD/BRL	Brezilya Reali
G.Afrika	USD/ZAR	G.Afrika Randı
Türkiye	USD/TRY	Türk Lirası
G.Kore	USD/KRW	G.Kore Wonu
Meksika	USD/MXN	Meksika Pesosu
Hindistan	USD/INR	Hindistan Rupisi
Tayland	USD/THB	Tayland Bahtı
Tayvan	USD/TWD	Yeni Tayvan Doları

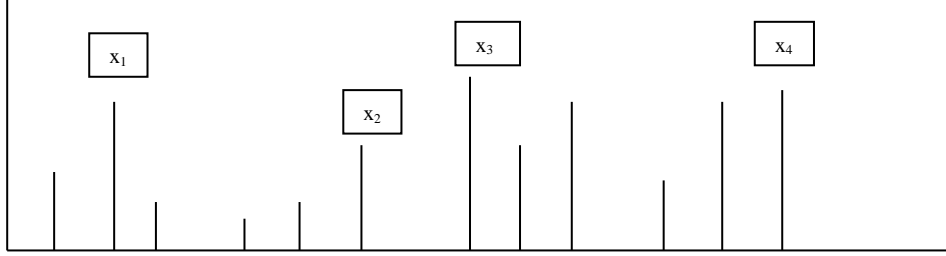
**Grafik 1.** Ülke para birimleri

2.2 Metodoloji

2.2.1. Ekstrem değerler teorisi ve EVT-VaR modeli

EVT'nin uygulanmasındaki ilk önemli aşamayı belli bir dönem için elde edilen getirilerden hangilerinin "ekstrem değer" olarak tanımlanacağına nasıl karar verileceği oluşturmaktadır. Bu konuda literatürde iki temel yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan birincisi BMM yöntemi (Block Maxima Method, BMM) ikincisi ise POT (Peak Over Threshold, POT) yöntemidir. BMM yönteminin temel mantığı belli bir zaman dilimindeki en yüksek değerleri ekstrem değer olarak tanımlamaya dayanmaktadır. Örneğin, çalışma örnekleminin günlük verilere dayalı 5 yıllık bir dönemi kapsadığı ve analizin de aylık periyotlara

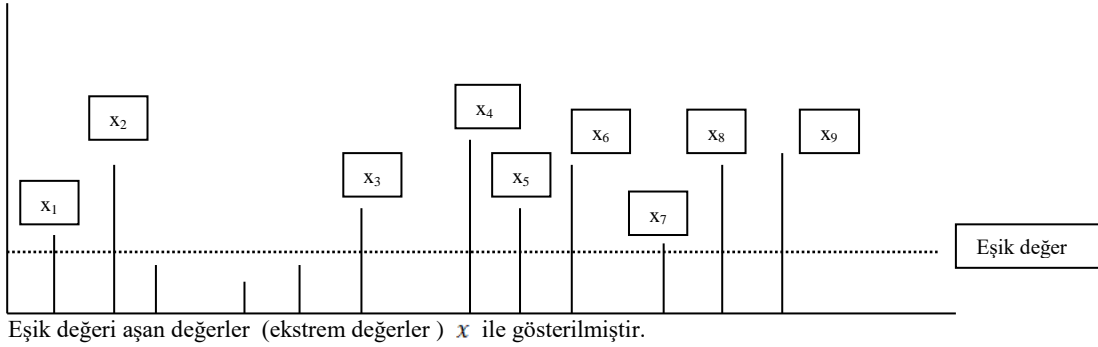
bağlı olarak yapıldığı varsayıldığında BMM yöntemine göre öncelikle 5 yıllık dönem 60 aylık alt periyotlara bölünmekte ve ardından her ay için elde edilen en yüksek günlük getiri ekstrem değer olarak tanımlanmaktadır. Fakat, böyle bir yaklaşım sonucunda 5 yıllık bir dönem için sadece 60 adet ekstrem değere ulaşılabilmektedir. Sözel olarak ifade edilen bu durum Şekil 1’de gösterildiği gibi somutlaştırılabilir:



Örnek teşkil etmesi amacıyla tüm dönem her biri üç çizgiden (değerden) oluşacak şekilde 4 alt periyoda bölünmüş ve her periyodun en yüksek değeri (ekstrem değeri) x ile gösterilmiştir.

Şekil 1. BMM yöntemine göre ekstrem değerlerin belirlenmesi

POT yaklaşımının temel mantığı ise ilgili tüm dönemi temsil eden tek bir eşik değerin (threshold) belirlenmesi ve bu eşik değeri aşan değerlerin “ekstrem değer” olarak tanımlanmasına dayanmaktadır. Örneğin, yine 5 yıllık bir dönem esas alındığında ve bir yılda 252 işgününün olduğu varsayıldığında POT yaklaşımı toplam 1260 tane günlük gözlem içerisinden eşik değeri aşan tüm gözlemleri ekstrem değer olarak tanımlamaktadır. Bu kapsamda, örneğin yukarı yönlü piyasa riski için eşik değer olarak %2 esas alındığında toplam 1260 gözlem içerisindeki pozitif değerler arasında %2 değerini aşan tüm değerler ekstrem değerler olarak tanımlanmaktadır. Böylece, EVT analizlerinde BMM yöntemine göre çok daha fazla gözlemle çalışılabilmektedir. Sözel olarak ifade edilen bu durum Şekil 2’de gösterildiği gibi somutlaştırılabilir:



Şekil 2. POT yöntemine göre ekstrem değerlerin belirlenmesi

Ekstrem değerlerin hangi yönteme göre belirleneceğine karar verilmesi aynı zamanda ekstrem değerlerin modellenmesinde hangi dağılım varsayımının kullanacağına da belirlenmesi anlamına gelmektedir. Ekstrem değerlerin modellenmesinde literatürde genelde iki önemli dağılım varsayımından yararlanılmaktadır. Bunlar Genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı (Generalized extreme value distribution, GEV) ve Genelleştirilmiş Pareto dağılımıdır (Generalized Pareto distribution, GPD). GEV dağılımı üç değişkenli bir dağılım olup genel yapısı Denklem (2)’deki gibi ifade edilebilir:

$$H_{(\xi, \mu, \sigma)} = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right) & \text{eğer } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-e\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) & \text{eğer } \xi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Burada, μ konum parametresini; σ , ölçek parametresini; ξ ise şekil parametresini göstermekte ve $1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0$, $1 + \xi x > 0$ olmaktadır.

ξ parametresi dağılımın şeklini belirleyen bir parametredir. Bu nedenle, ξ parametresinin aldığı değerlere bağlı olarak GEV dağılımı Gumbel, Frechet ve Weibull dağılımları olmak üzere kendi içerisinde üç ayrı dağılıma dönüşebilmektedir. Örneğin, eğer, $\xi > 0$ ise GEV dağılımı Frechet dağılımına karşılık gelmektedir. Eğer, $\xi = 0$ ise GEV dağılımı Gumbel dağılımına karşılık gelmektedir. Eğer, $\xi < 0$ ise GEV dağılımı Weibull dağılımına karşılık gelmektedir. Burada, ξ değeri sıfırdan ne kadar yüksek ise ekstrem değerlerin dağılımının kuyruk kısmı o kadar kalın olmakta ve risk düzeyinin bir göstergesi olan kalın kuyruk sorunu o kadar belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, finansal zaman serilerinin dağılımının karakteristik özellikleri dikkate alındığında GEV dağılımları arasında Frechet dağılımının finansal değişkenler için daha uygun bir dağılım varsayımı olabileceği ifade edilebilir [48, 30].

Frechet , Weibull ve Gumbell dağılımlarının genel yapısı Denklem (3), (4) ve (5)'te sunulmuştur:

$$\text{Frechet } \Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & x > 0, \alpha > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Weibull } \psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Gumbell } \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Burada, α kuyruk indeks parametresini gösterirken, x bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenleri ifade etmektedir.

Bu açıklamalar ışığında GEV dağılımına dayalı olarak EVT-VaR değeri Denklem (6)'daki gibi hesaplanmaktadır:

$$\text{EVT-VaR}_{\text{GEV}} = \mu + \frac{\beta}{\xi} \left((-\ln(p))^{-\frac{1}{\xi}} - 1 \right) \quad (6)$$

GPD dağılımı ise iki değişkenli bir dağılım olup genel yapısı Denklem (7)'deki gibi ifade edilebilir:

$$G_{\xi, \beta(\mu)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\left(1 + \frac{\xi x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) & \text{eğer } \xi \neq 0 \\ 1 - \left(e^{\left(\frac{-x}{\beta} \right)} \right) & \text{eğer } \xi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Denklem (7)'deki ξ ve β parametreleri sırasıyla şekil ve ölçek parametrelerini gösterirken μ eşik değeri göstermektedir. Bu kapsamda, $\xi \geq 0$ olduğunda $\beta > 0$ ve $x \geq 0$ olmakta $\xi < 0$ olduğunda ise $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ olmaktadır.

Burada, ξ parametresi dağılımın kuyruğunun kalınlığını belirlemekte ve GEV dağılımında olduğu gibi GPD dağılımında da ξ parametresinin aldığı değerlere bağlı olarak GPD dağılımı üç farklı dağılıma dönüşebilmektedir. Örneğin, eğer $\xi > 0$ ise ekstrem değerlerin dağılımının standart Pareto dağılımına uyduğu ifade edilebilir. Eğer $\xi = 0$ ise ekstrem değerlerin dağılımının üstel dağılıma uyduğu ifade edilebilir. Eğer, $\xi < 0$ ise ekstrem değerlerin Pareto Tip II dağılımına uyduğu ifade edilebilir. Burada, $\xi < 0$ olması diğer iki duruma göre daha az riskli bir durumu ifade etmektedir. Çünkü, bu durumda dağılımın kuyruk bölgesi kalın kuyruk özelliğinden uzaklaşmış olmaktadır. $\xi = 0$ olması orta düzeyde kayıp tutarlarının gerçekleşebileceğine işaret etmektedir. $\xi > 0$ olması ise kalın kuyruk soruna işaret etmekte ve yüksek derecede kayıp tutarlarının gerçekleşebileceği anlamına gelmektedir. Bu nedenle $\xi > 0$ durumunun bir diğer ifade ile standart Pareto dağılımının finansal değişkenler için daha uygun bir dağılım olduğu söylenebilir [12,10].

GEV dağılımı BMM yöntemine göre belirlenen ekstrem değerler için uygun bir dağılım iken GPD dağılımı POT yöntemine göre belirlenen ekstrem değerler için uygun bir dağılım olmaktadır. Finansal literatürdeki çalışmalara bakıldığında finansal piyasalarda oluşabilecek ekstrem durumların modellenmesinde GPD dağılımının oldukça yaygın bir şekilde kullanıldığı görülmektedir [Örneğin bkz: 7, 9, 11, 12, 10]. Bu durum BMM yönteminin bazı dezavantajlarından kaynaklanmaktadır. Örneğin, BMM yönteminin sadece her dönemdeki en yüksek değere odaklanması hem önemli sayıda gözlem kaybına sebep olmakta hem de ekstrem değerlerin volatilité kümelenmesi olgusunun dikkate alınmamasına yol açmaktadır. Ayrıca, böyle bir yaklaşım toplam gözlem sayısının içerdiği bilginin kısmi olarak modellere dahil edilmesine de sebep olmaktadır. POT yaklaşımı ise hem daha çok gözlemlerle çalışılmasına imkan vermekte hem de temel yaklaşımı gereği incelenen veri seti içerisindeki bilgilerin daha iyi bir şekilde ortaya çıkarılmasını sağlamaktadır. Bu nedenlerle, GPD dağılımının finansal zaman serilerindeki ekstrem değerlerin modellenmesinde GEV dağılımına göre daha etkin bir yöntem olduğu literatürde genel kabul görmektedir. Buna koşut olarak da literatürde finansal zaman serilerine dayalı EVT analizlerinde GPD dağılımının temel dağılım olarak kullanıldığı görülmektedir [Örneğin bkz: 15, 8, 31, 49, 17]. Bu gerekçelerle bu çalışmada da GPD dağılımından yararlanılmıştır.

EVT analizlerinde GPD dağılımının kullanılması durumunda bir sonraki aşama olarak eşik değerin nasıl belirleneceği sorusu ile karşılaşmaktadır. Eşik değerin önemi şuradan kaynaklanmaktadır: Eğer, eşik değeri optimal değerinden belirgin bir şekilde yüksek seçilirse bu durumda az sayıda gözlem ile analiz yapılacağından parametre tahminlerinin yanlılığı (biased) azalırken varyansı yüksek çıkabilecektir. Eğer, eşik değeri optimal değerinden belirgin şekilde düşük belirlenirse bu durumda çok sayıda gözlem analize dahil edileceğinden parametre tahmin sonuçlarının varyansı azalırken yanlılığı artabilecektir [12]. Konunun önemine rağmen literatürde henüz eşik değerin nasıl belirlenmesi gerektiğini gösteren genel kabul görmüş tek bir yöntemin bulunmadığı anlaşılmaktadır [10, 8, 50,12]. Bu nedenle literatürde eşik değerin belirlenmesinde birbirinden farklı yaklaşımlar kullanılabilmektedir⁴. Ortalama aşım grafiği (mean excess graph) ve Hill grafiği (Hill graph) grafiksel yaklaşımlara örnek olarak verilebilir. Bunun yanı sıra, literatürde Blum ve Dacorogna [53], Dacorogna vd. [54] ile Ferreira, Haan ve Peng [55] tarafından tavsiye edilen ve Denklem (8)'de gösterilen yaklaşım ile Loretan ve Philips [56] tarafından tavsiye edilen ve Denklem (9)'da gösterilen yaklaşımlardan da yararlanılmaktadır.

$$k = \sqrt{n} \quad (8)$$

$$k = \frac{n^{2/3}}{\log[\log(n)]} \quad (9)$$

Bu yaklaşımlar analizdeki toplam gözlem sayısının (n) kaç tanesinin (k) ekstrem değer olarak kabul edilmesi gerektiği sorusuna cevap vermektedir.

Bu çalışmada ise eşik değerin belirlenmesinde diğerlerinin yanı sıra DuMouchel [57], Neftçi [52] ve Gavin'nin [58] çalışmalarında da olduğu gibi örneklemin belli bir yüzdesini esas alan sabit yüzdeli dilim kuralı yaklaşımı tercih edilmiştir. Bir diğer ifadeyle, toplam örneklemin belli bir yüzdesini ekstrem değer olarak tanımlayan bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu yaklaşımın temel avantajı farklı finansal varlıklar için EVT-VaR analizi yapılırken her bir finansal varlık için aynı sayıda ekstrem değerin modellere dahil ediliyor olmasıdır [14]. Bu yaklaşımda önemli olan nokta ise toplam gözlem sayısının % kaçının ekstrem değer olarak kabul edileceğidir. Bu noktada, McNeil ve Frey [7] literatürde önemli bir yer tutan çalışmalarında %10 değerinin kullanılmasını tavsiye etmişlerdir. Bu doğrultuda Gavin [58], Dimitrakopoulos, Kavussanos ve Spyrou[11], Ghorbel ve Trabelsi [9], Singh, Allen ve Robert [49] ile Bali ve Neftçi'nin [59] çalışmalarında %10 değerini dikkate aldıkları görülmektedir. Bu nedenle, bu

⁴ Farklı yaklaşımlar için bkz: [51, 18, 52, 14]

çalışmada da %10 değeri esas alınmıştır. Ayrıca, farklı yaklaşımlara karşı dirençli sonuçlar elde etmek amacıyla ilgili literatürle uyumlu bir şekilde analizler %5 değeri esas alarak da yinelenmiştir⁵.

Eşik değerin belirlenmesi dışında EVT-VaR analizlerinde karar verilmesi gereken bir diğer önemli nokta da analizlerde şartlı (conditional) EVT yönteminin mi yoksa şartsız (unconditional) EVT yönteminin mi kullanılacağıdır. Her iki yöntem de literatürde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [Örneğin, bkz: 60, 25, 27, 17, 30, 31, 26, 9, 8, 12,10, 15, 49, 61]. Bu çalışmada şartsız EVT yaklaşımından yararlanılmıştır. Çünkü, şartsız EVT yaklaşımı doğrudan dağılımın kuyruk bölgesine odaklanmakta ve analizlerde (15-20 yıl gibi) uzun örneklem dönemlerinin kullanılması durumunda şartlı EVT yaklaşımına göre daha tercih edilebilir bir yöntem olabilmektedir [8, 62,10]. Ayrıca, şartsız EVT yaklaşımı piyasa riskini ölçerken geçmişte uzun dönem boyunca gerçekleşen çeşitli ekstrem durumların sunduğu bilgileri dikkate alırken şartlı EVT yaklaşımı ağırlıklı olarak güncel döneme odaklanmaktadır [27]. Bunlara ilaveten, literatürdeki genel bulgular şartsız EVT-VaR değerlerinin şartlı EVT-VaR değerlerinden daha yüksek çıkabildiğine işaret etmektedir. Bu da ekstrem durumların söz konusu olabileceği bir ortamda daha temkinli bir yaklaşım sergilenmesi açısından özellikle denetleyici ve düzenleyici kurumlar için oldukça önemli olabilmektedir [61, 28]. Çünkü, diğerlerinin yanı sıra Çifter, Özün ve Yılmaz'ın [22] de ifade ettiği gibi Türkiye gibi gelişen ekonomilerin finans piyasaları henüz gereken derinliğe ulaşmadığından bu tür piyasalarda ani ve yüksek volatilité hareketleri daha sık gözlemlenebilmektedir. Bu durum da bankaların öngörülenin üzerinde ekonomik sermaye kaybına uğramalarına yol açabilmektedir. Bu nedenle bu tür piyasalarda finansal risk yönetimi konusunda daha temkinli bir yaklaşım sergilenmesinin önemli olduğu düşünülmektedir.⁶

Bu kapsamda, GPD dağılımına göre şartsız EVT-VaR değeri Denklem (10)'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

$$EVT-VaR_{GPD} = \mu + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{N}{N_{\mu}} (1-p) \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (10)$$

Burada, N toplam gözlem sayısını; N_{μ} , ekstrem değer sayısını; p ise güven düzeyini göstermektedir.

EVT-ES değeri ise Denklem (11)'de gösterildiği gibi hesaplanmaktadır:

$$EVT-ES = \frac{EVT-VaR_{GPD}}{1-\xi} + \frac{\beta-\xi\mu}{1-\xi} \quad (11)$$

Çalışmada, β ve ξ değerlerinin tahmininde literatürle uyumlu bir şekilde Denklem (12)'de gösterilen en çok olabilirlik yönteminden (Maximum likelihood estimation method, MLE) yararlanılmıştır:

$$L(\xi, \beta | x) = \begin{cases} N \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{\xi}{\beta} x_i \right) & \text{eğer } \xi \neq 0 \\ -N \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N x_i & \text{eğer } \xi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Burada, x ekstrem değerleri göstermektedir.

2.2.2. Monte Carlo simülasyonu ve VaR değerleri

⁵ McNeil ve Frey'in [7] ifade ettiği gibi analizlerde GPD dağılımı kullanıldığında ekstrem değer sayısının 50'den fazla olması dirençli sonuçlar elde edilmesi için yeterli olabilmektedir. Bu çalışmada da hem %10 hem de %5 değeri esas alındığında eşik değeri aşan ekstrem değer sayısı 50'nin üzerinde çıkmaktadır.

⁶ Nitekim, bu tür temkinli yaklaşımların BDDK (Bankacılık Denetleme ve Düzenleme Kurulu, BDDK) tarafından da uygulandığı görülmektedir. Örneğin, Basel düzenlemeleri çerçevesinde bankaların sermaye yeterlilik rasyosunun en az %8 olması belirlenirken BDDK bu oranı Türkiye için en az %12 olarak belirlemektedir.

Monte Carlo simülasyonu belli bir dağılım varsayımı çerçevesinde oluşturulan rassal verilerden hareketle bir gün sonrası için üretilen olası fiyat serileri ile gözlemlenebilen en güncel fiyat arasındaki farka bağlı olarak VaR değerlerinin hesaplanmasına dayanan bir yöntemdir. Buradaki kritik noktayı ilgili dağılım varsayımına bağlı olarak bir gün sonraki olası değerlerin nasıl üretileceği oluşturmaktadır. Literatürden hareketle teorik altyapısı Markov süreci, genelleştirilmiş Wiener süreci, Ito-Lemma ve Geometrik Brownian Motion yaklaşımına dayanan MC simülasyon süreci Denklem (13)'deki gibi ifade edilebilir:

$$S_1 = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t} \quad (13)$$

Burada, S_0 ilgili finansal değişkene ait en güncel fiyatı; S_1 bir gün sonrası için olası fiyatı; ε_t Wiener sürecini; μ ve σ^2 ilgili finansal varlığın ortalama getirisini ve varyansını; Δt zaman aralığını ifade etmektedir. Ayrıca, $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t$ sürecin deterministik bileşenini ifade ederken; $\sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t$ sürecin stokastik bileşenini ifade etmektedir. Dolayısıyla, aslında Denklem (13) ilgili finansal varlıkların getiri değerlerinin ortalama bir değeri olduğu fakat bu ortalama değer etrafındaki hareketlerin çeşitli şoklara bağlı olarak ortaya çıkmasından dolayı öngörülemezliği ilkesinin matematiksel karşılığını ifade etmektedir [63].

Bu açıklamalar ışığında bu çalışmada MC-VaR değerleri üretilirken öncelikle Denklem (13)'e bağlı olarak her bir para birimi için bir gün sonrasına ilişkin 10000 adet olası değer üretilmiş ve bu değerlerin her birinden gerçekleşen en güncel değer çıkarılarak bir gün sonrasına ilişkin olası 10000 adet kar / zarar değeri elde edilmiştir. Ardından, taşınan pozisyonun niteliğine göre bu kar / zarar değerleri arasından ilgili güven düzeyine tekabül eden en yüksek veya düşük kar veya zarar değerleri belirlenerek MC-VaR değerleri elde edilmiştir. MC-ES değerleri ise MC-VaR değeri ve onu aşan değerlerin ortalaması alınarak hesaplanmıştır.

3. Bulgular

Değişkenlere ait betimleyici istatistikler ve birim kök testi sonuçları Tablo 2'de sunulmuştur. Basıklık değerlerine bakıldığında tüm para birimlerinin basıklık değerlerinin 3'ten belirgin bir şekilde fazla olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, ilgili döviz piyasalarında ekstrem fiyat hareketlerinin gerçekleşme olasılığının standart normal dağılımın öngördüğünden daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Çarpıklık değerleri ise Brezilya Reali, G.Kore Wonu ve Yeni Tayvan Doları için negatif diğer ülke döviz kurları içinse pozitif değerler almaktadır. Bu durum da ilgili finansal değişkenlerin getiri dağılımının asimetrik bir yapı sergilediği anlamına gelmektedir. Dağılımların asimetrik bir yapı sergilemesi de dağılımın sağ ve sol kuyruk bölgelerinin farklı karakteristik özellikler sergilediği bu nedenle ayrı ayrı modellenmeleri gerektiği anlamına gelmektedir [31]. Jarque-Bera test istatistiği sonuçları da, beklenildiği gibi, incelenen tüm para birimleri için getiri serilerinin standart normal dağılıma uyduğunu ifade eden Ho hipotezini %5 anlamlılık düzeyinde reddetmektedir. Ayrıca, getiri serilerine uygulanan Augmented-Dickey Fuller (ADF) ve Phillips-Perron (PP) birim kök testleri de tüm getiri serilerinin durağan olduğunu göstermektedir.

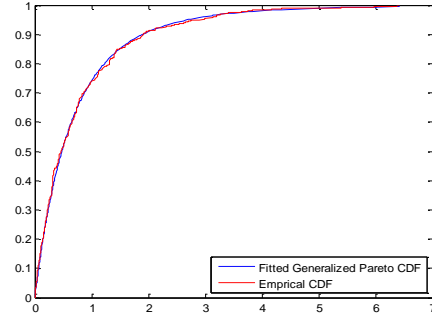
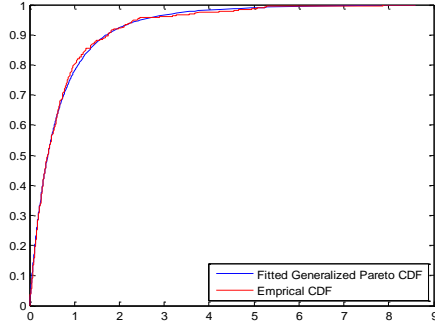
Tablo 2. Betimleyici istatistikler ve birim kök testi sonuçları

	Brezilya	G. Afrika	Türkiye	G. Kore	Meksika	Hindistan	Tayland	Tayvan
Getiri serilerine ait betimleyici istatistikler (%)								
Ortalama	0.0078	0.0013	0.0244	-0.0036	0.0213	0.0086	-0.0062	-0.0033
Std.sapma	1.0644	1.1124	0.8373	0.7364	0.6948	0.4778	0.3863	0.3125
Çarpıklık	-0.0609	0.2511	0.0152	-0.5650	0.8454	0.1889	0.1563	-0.4404
Basıklık	11.8357	5.9484	18.445	51.274	16.342	12.533	16.203	12.652
Jarque-Bera	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*
Birim kök testleri								
ADF	0.0000*	0.0001*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*	0.0000*
PP	0.0001*	0.0000*	0.0001*	0.0001*	0.0001*	0.0001*	0.0001*	0.0001*

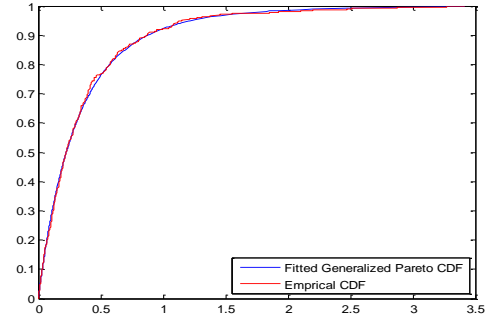
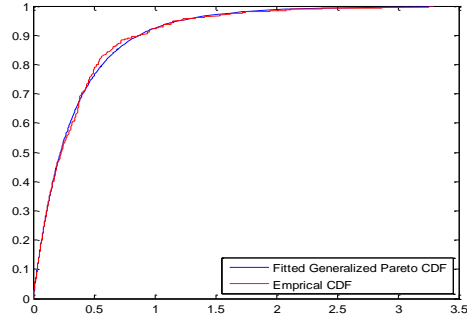
*, %5 anlamlılık düzeyini ifade etmektedir. Jarque-Bera, ADF ve PP testleri için verilen değerler olasılık değeridir. Birim kök testlerinin getiri serilerine uygulanması nedeniyle analizde trendsiz model spesifikasyonu dikkate alınmıştır.

EVT analizlerinin etkinliğinin belirlenmesindeki önemli aşamalardan birini GPD dağılımı ile ekstrem değerlerin kendi ampirik dağılımı arasındaki uyum oluşturmaktadır. Bu uyumu gözlemlemek amacıyla GPD dağılımına dayalı olarak elde edilen kümülatif dağılım ile ekstrem değerlerin kendi ampirik dağılımı Şekil 3 ve 4'te birlikte gösterilmiştir. Şekiller incelendiğinde hem aşağı hem de yukarı yönlü piyasa riskini temsil eden ekstrem değerlerin kendi ampirik dağılımı ile GPD dağılımının oldukça uyumlu olduğu anlaşılmaktadır. Bu da incelenen tüm döviz kurları için ekstrem değerlerin dağılımının GPD dağılımı ile etkin bir şekilde modellenebileceği anlamına gelmektedir.

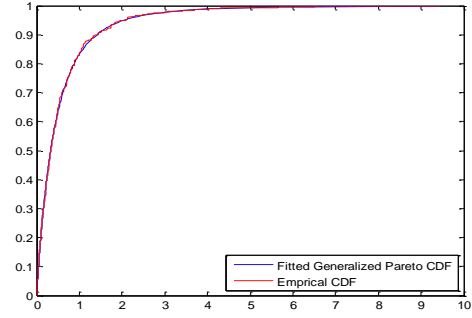
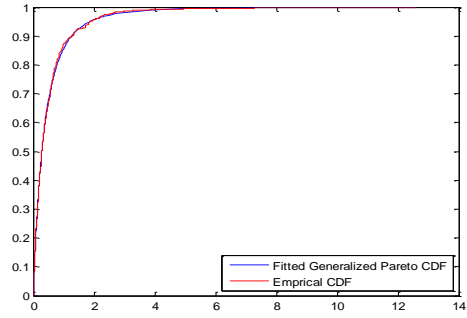
Brezilya Reali



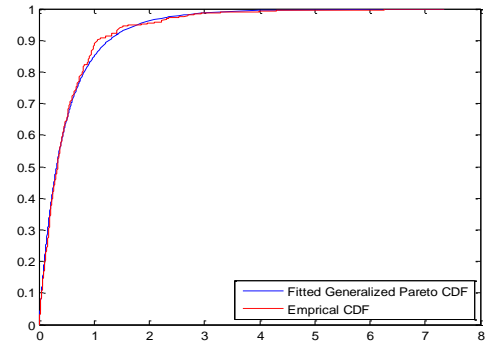
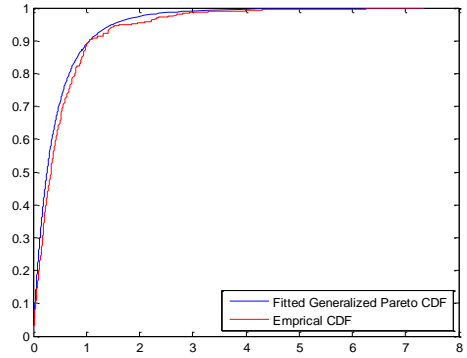
Hindistan Rupisi



G.Kore Wonu



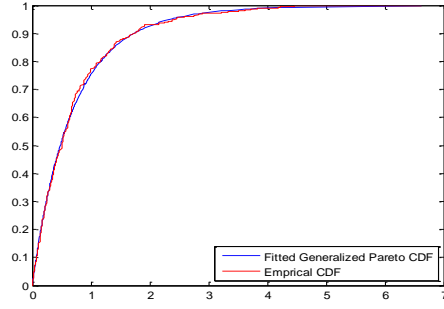
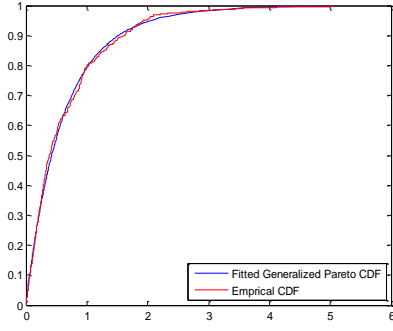
Meksika Pesosu



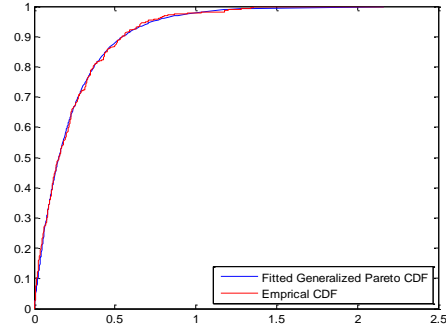
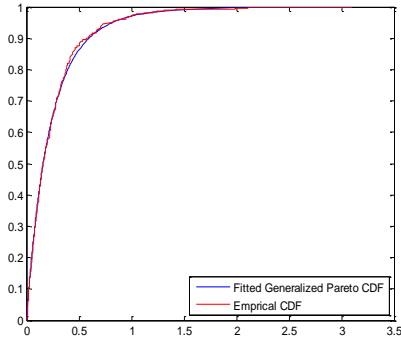
Not: Her bir para birimi için sol tarafta yer alan şekiller aşağı yönlü piyasa riski, sağ tarafta yer alan şekiller ise yukarı yönlü piyasa riski için dağılımların uyumunu göstermektedir. Mavi çizgi ile gösterilen GDP dağılımını, kırmızı çizgi ile gösterilen ise ekstrem değerlerin ampirik dağılımını ifade etmektedir.

Şekil 3. GPD dağılımının döviz kurlarının ampirik dağılımları ile uyumu

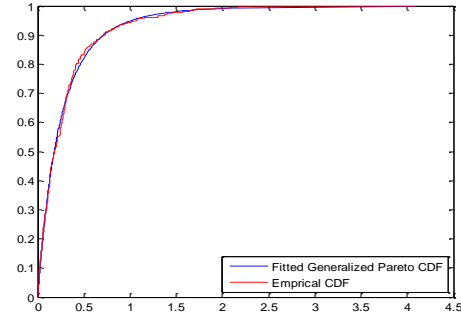
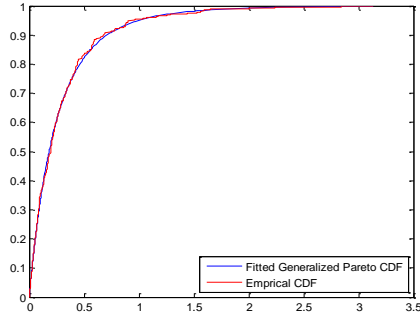
G.Afrika Randı



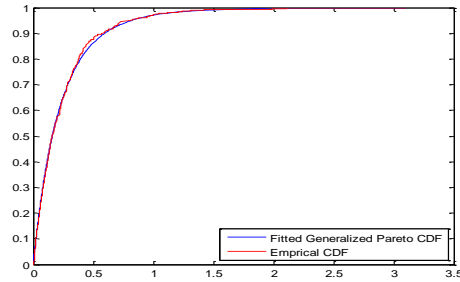
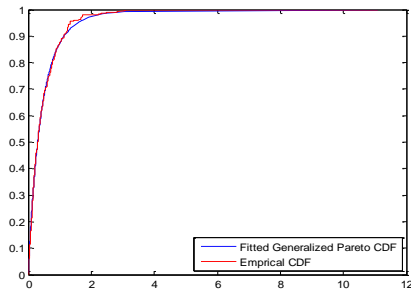
Yeni Tayvan Doları



Tayland Bahtı



Türk Lirası



Not: Her bir para birimi için sol tarafta yer alan şekiller aşağı yönlü piyasa riski, sağ tarafta yer alan şekiller ise yukarı yönlü piyasa riski için dağılımların uyumunu göstermektedir. Mavi çizgi ile gösterilen GDP dağılımını, kırmızı çizgi ile gösterilen ise ekstrem değerlerin ampirik dağılımını ifade etmektedir.

Şekil 4. GPD dağılımının döviz kurlarının ampirik dağılımları ile uyumu

İlgili ülke döviz kurlarına ilişkin EVT-VaR ve EVT-ES değerleri Tablo 3'te sunulmuştur. Öncelikle, şekil (ξ) parametresine bakıldığında her durumda pozitif değerler aldığı görülmektedir. Bu durum, beklenildiği gibi, ekstrem değerlerin dağılımının standart Pareto dağılımına uyduğu anlamına gelmektedir. Bu bulgu, dereceleri farklı olmakla birlikte çalışmada yer alan tüm döviz kurları için kalın kuyruk sorununun var olduğu anlamına gelmektedir.

İlgili ülkelerin para birimlerinin risk düzeylerine gelince aşağı yönlü piyasa riski için %99 güven düzeyinde en riskli para birimlerinin Brezilya Reali ve G. Afrika Randı olduğu anlaşılmaktadır. Çünkü, ilgili para birimleri için EVT-VaR değerleri sırasıyla %2.799 ve %2.778 olmaktadır. En az riskli para birimlerinin ise sırasıyla Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi olduğu ifade edilebilir. Çünkü, ekstrem durumların gerçekleşmesi durumunda bu para birimleri için bir gün sonraki maksimum kayıp oranları sırasıyla %0.913, %1.098 ve %1.328 olmaktadır. Türk Lirası, G.Kore Wonu ve Meksika Pesosunun EVT-VaR değerlerinin sırasıyla % 1.987, %1.892 ve %1.729 olması nedeniyle de bu para birimlerinin göreceli olarak orta derecede riskli para birimleri olduğu ifade edilebilir.

Tablo 3. EVT-VaR ve EVT-ES sonuçları (%10)

Döviz kurları	μ	ξ	β	EVT-VaR		EVT-ES	
				%1	%5	%1	%5
Aşağı yönlü piyasa riski							
Brezilya Reali	1.0810	0.281	0.5306	%2.799	%1.4870	% 4.209	% 2.384
G.Afrika Randı	1.2591	0.101	0.5858	%2.778	%1.6790	%3.600	%2.379
Türk Lirası	0.8496	0.158	0.4095	%1.987	%1.1496	%2.688	%1.693
G.Kore Wonu	0.6264	0.317	0.3733	%1.892	%0.9158	%3.026	%1.567
Meksika Pesosu	0.6714	0.232	0.3476	%1.729	%0.9328	%2.502	%1.464
Hindistan Rupisi	0.4597	0.176	0.3059	%1.328	%0.6852	%1.885	%1.105
Tayland Bahtı	0.3898	0.197	0.2431	%1.098	%0.5704	%1.576	%0.918
Yeni Tayvan Doları	0.3188	0.139	0.2190	%0.913	%0.4782	%1.263	%0.758
Yukarı yönlü piyasa riski							
Brezilya Reali	1.1276	0.219	0.634	%3.026	%1.602	%4.369	%2.547
G.Afrika Randı	1.3101	0.107	0.6625	%3.040	%1.787	%3.989	%2.586
Türk Lirası	0.9366	0.1404	0.5800	%2.5133	%1.359	%3.446	%2.103
G.Kore Wonu	0.6689	0.2948	0.4268	%2.0755	%0.997	%3.269	%1.739
Meksika Pesosu	0.7599	0.2088	0.4278	%2.0248	%1.079	%2.899	%1.704
Hindistan Rupisi	0.5244	0.1896	0.3030	%1.3992	%0.749	%1.978	%1.175
Tayland Bahtı	0.3752	0.2207	0.2385	%1.0909	%0.554	%1.599	%0.911
Yeni Tayvan Doları	0.3225	0.091	0.2136	%0.869	%0.475	%1.159	%0.726

Daha önce ifade edildiği gibi finansal risk yönetimi açısından bir diğer önemli konuyu ES değerleri oluşturmaktadır. Çünkü, EVT-VaR değerleri %99 güven düzeyinde elde edilen değerlerdir. Bir diğer ifadeyle bu modeller %1 hata payı ile çalışmaktadırlar. Bu nedenle, bu hata payının gerçekleşmesi durumunda ortaya çıkabilecek kayıp oranlarının ne olabileceğinin hesaplanması da finansal risk yönetimi açısından bir diğer önemli konuyu oluşturmaktadır. Bu kapsamda, EVT-ES değerlerine bakıldığında bu değerlerin Brezilya Reali ve G.Afrika Randı için sırasıyla %4.209 ve %3.6; Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi için sırasıyla %1.263, %1.576 ve %1.885; G.Kore Wonu, Türk Lirası ve Meksika Pesosu içinse sırasıyla %3.026, %2.688 ve %2.502 olduğu anlaşılmaktadır. Konunun önemi nedeniyle rakamsal bir örnek vermek gerekirse ilgili para birimlerinde 1000 birim uzun pozisyon taşıyan bir yatırımcı veya banka için döviz kurlarında aşağı yönlü piyasa riskine dayalı ekstrem durumların gerçekleşmesi durumunda bir gün sonraki maksimum kayıp tutarları %99 güven düzeyinde Brezilya ve G. Afrika için 27.99 Brezilya Reali ve 27.78 G.Afrika Randı; Tayvan, Tayland ve Hindistan için 9.13 Yeni Tayvan Doları, 10.98 Tayland Bahtı ve 13.28 Hindistan Rupisi; Türk Lirası, G.Kore Wonu ve Meksika Pesosu içinse sırasıyla 19.87 Türk Lirası, 18.92 G.Kore Wonu ve 17.29 Meksika Pesosu olacaktır. Eğer, %1'lik hata payı gerçekleşirse bu durumda kayıp tutarları ilgili değerleri aşarak Brezilya

ve G.Afrika için 42.09 Brezilya Reali ve 36 G.Afrika Randı ; Tayvan, Tayland ve Hindistan için 12.63 Yeni Tayvan Doları, 15.76 Tayland Bahtı ve 18.85 Hindistan Rupisi; G.Kore, Türkiye ve Meksika içinse 30.26 G.Kore Wonu, 26.88 Türk Lirası ve 25.02 Meksika Pesosu seviyelerine ulaşacaktır.

Yukarı yönlü piyasa riskine bakıldığında da %99 güven düzeyinde EVT-VaR sonuçlarına göre para birimlerinin risk sıralamasında herhangi bir değişiklik olmadığı anlaşılmaktadır. Bu kapsamda, yine en riskli para birimlerinin Brezilya Reali ve G. Afrika Randı; en az riskli para birimlerinin ise Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi olduğu ifade edilebilir. Türk Lirası, G.Kore Wonu ve Meksika Pesosu ise yine göreceli olarak orta derecede riskli para birimleri arasında yer almaktadır. Rakamsal olarak ifade etmek gerekirse EVT-VaR değerleri Brezilya Reali ve G. Afrika Randı için sırasıyla %3.026 ve %3.04; Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi içinse sırasıyla %0.869, %1.091 ve %1.399 olmaktadır. Ayrıca, EVT-ES değerlerinin dikkate alınması durumunda da benzer sonuçlara ulaşılmaktadır. Örneğin, EVT-ES değerleri Brezilya Reali ve G. Afrika Randı için sırasıyla %4.369 ve 3.989 ; Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi içinse sırasıyla %1.159, %1.599 ve %1.978 olmaktadır.

Burada, dikkat çeken önemli bir nokta ise aşağı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi (ilgili para birimlerinin Dolar karşısında değer kazanması) durumunda ortaya çıkan kayıp tutarları ile yukarı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi (ilgili para birimlerinin Dolar karşısında değer kaybetmesi) durumunda ortaya çıkan kayıp tutarlarının birbirinden farklı olmasıdır. Ayrıca, Yeni Tayvan Doları ve Tayland Bahtı dışındaki tüm para birimleri için yukarı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi durumundaki kayıp tutarlarının (EVT-VaR değerlerinin) daha fazla olduğu anlaşılmaktadır. Bu da finansal varlıkların getiri dağılımının sağ ve sol kuyruk bölgelerinin ayrı ayrı modellenmesini destekleyen bir bulgudur.

Dolayısıyla, tüm bu sonuçları özetlemek gerekirse bulgular ilgili para birimlerinde taşınabilecek hem uzun hem de kısa pozisyonlar için Brezilya Reali ve G.Afrika Randının en riskli para birimleri olduğu ardından sırasıyla Türk Lirası, G. Kore Wonu ve Meksika Pesosunun geldiği; en az riskli para birimlerinin ise sırasıyla Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi olduğuna işaret etmektedir.

Daha önce belirtildiği gibi EVT analizlerinde eşik değer belirlenmesi önemli aşamalardan birini oluşturmaktadır. Çalışmanın bu aşamasında farklı yaklaşımlara karşı dirençli sonuçlar elde edebilmek amacıyla analizler %5 oranı dikkate alınarak yinelenmiş ve bu kapsamda elde edilen bulguların %10 oranı ile oldukça benzer olduğu görülmüştür. Örnek, teşkil etmesi amacıyla %5 oranının dikkate alınması durumunda en riskli üç ülke para birimi için elde edilen VT-VaR ve EVT-ES değerleri Tablo 4'te sunulmuştur. Bu bulgulardan da anlaşılacağı üzere hem elde edilen EVT-VaR ve EVT-ES değerlerinin hem de para birimlerinin risk sıralamasının %10 oranı ile oldukça benzer olduğu anlaşılmaktadır⁷.

Tablo 4. EVT-VaR ve EVT-ES sonuçları (%5)

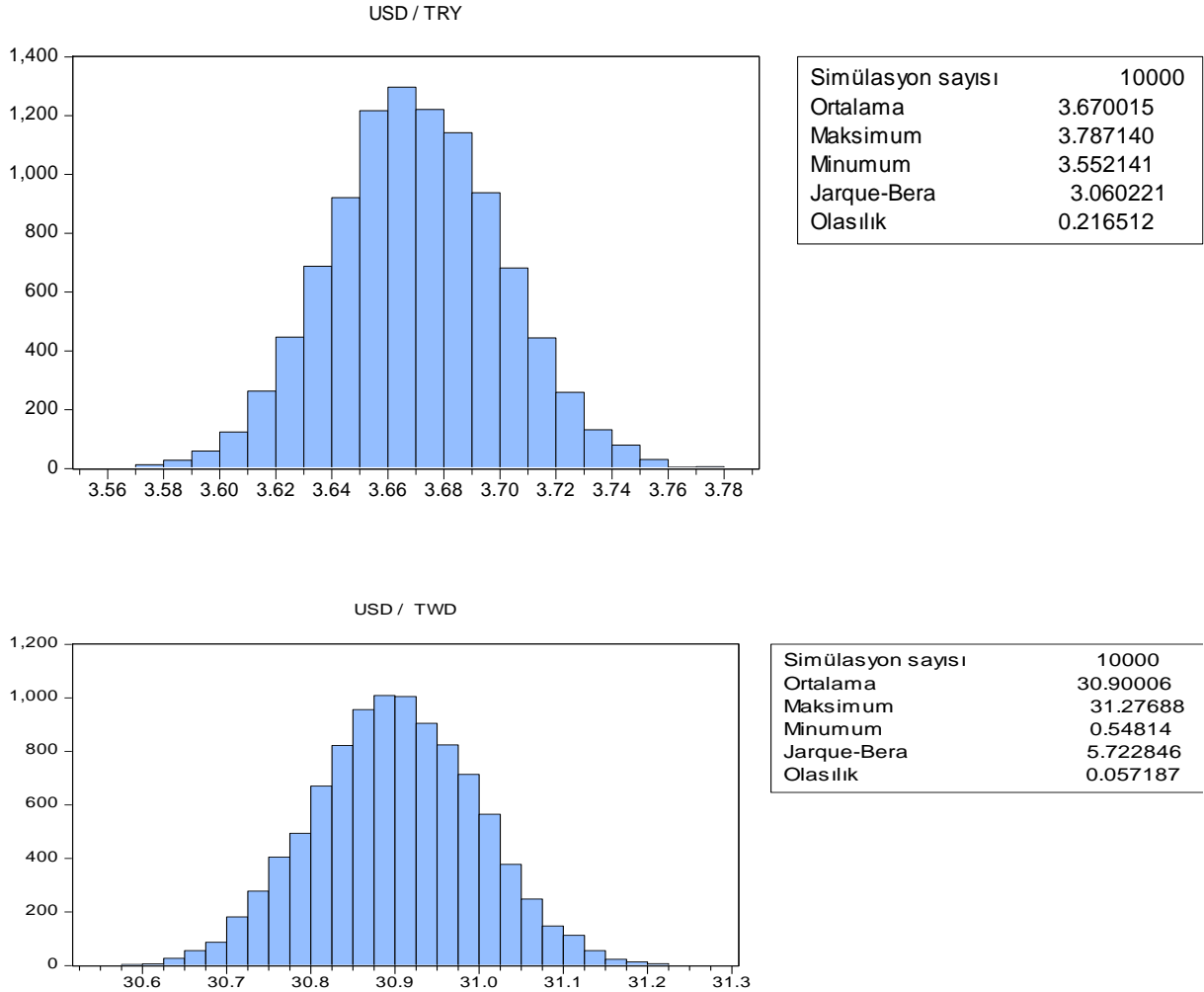
Ülkeler	μ	ξ	β	EVT-VaR		EVT-ES	
				%1	% 5	%1	%5
Aşağı yönlü piyasa riski							
Brezilya Reali	1.4841	0.3189	0.6157	%2.7790	%1.4841	%4.2893	%2.3881
G.Afrika Randı	1.6448	0.0214	0.7239	%2.8302	%1.6448	%3.5958	%2.3845
Türk Lirası	1.1598	0.1947	0.4272	%1.9672	%1.1598	%2.6929	%1.6903
Yukarı yönlü piyasa riski							
Brezilya Reali	1.58547	0.1287	0.8378	%3.0837	%1.5855	%4.2665	%2.5470
G.Afrika Randı	1.81862	0.2179	0.5995	%2.9743	%1.8186	%4.0628	%2.5851
Türk Lirası	1.35912	0.1341	0.6454	%2.5185	%1.3591	%3.4434	%2.1045

⁷ Çalışmada tüm analizler %95 güven düzeyi dikkate alınarak da yapılmıştır. Bu kapsamdaki bulgular da Tablo 3'te sunulmuştur. Sonuçlar incelendiğinde, bulguların %99 güven düzeyinde elde edilen bulgularla oldukça benzer olduğu anlaşılmaktadır. Fakat literatürde ve uygulamada daha çok %99 güven düzeyine dayalı analizlere yer verildiğinden bu çalışmada da %99 güven düzeyi üzerinde durulmuştur.

3.1. MC-VaR ve MC-ES analiz sonuçları

Literatürde, EVT analizinin gerekliliğini ortaya koymak amacıyla bu modelin sunduğu VaR değerleri geleneksel modellerin sunduğu VaR değerleri ile karşılaştırılmaktadır. Bu kapsamda, örneğin, Assaf [26] çalışmasında finansal zaman serilerinin dağılımının kalın kuyruk özelliği sergilemesi durumunda geleneksel VaR modellerinin riski olduğundan az ölçtüğünü göstermiştir. Bu nedenle, finansal zaman serilerinin karakteristik özelliklerini yeterince dikkate almayan modellerin piyasa riski ölçümünde kullanılmasının piyasa riskinin doğru bir şekilde ölçülemediği gibi bir soruna yol açabileceğini ifade etmiştir.

Bu kapsamda, çalışmanın bu aşamasında geleneksel bir VaR modeli olarak standart normal dağılıma dayalı Monte Carlo simülasyon analizine yer verilmiştir. Analizler yapılırken öncelikle her bir finansal varlık için bir gün sonrasına ilişkin olası 10000 adet değer üretilmiş ve bu değerlerden cari dönemdeki finansal varlık değerleri çıkarılarak olası kar / zarar değerleri elde edilmiştir. Örnek teşkil etmesi amacıyla Türk Lirası ve Yeni Tayvan Doları için bir gün sonrasına ilişkin olarak elde edilen 10000 adet değerlerin histogramı ve betimleyici istatistikleri Şekil 3'te sunulmuştur. Bu analizlere bağlı olarak %99 ve %95 güven düzeylerinde elde edilen MC-VaR ve MC-ES değerleri de Tablo 5'te gösterilmiştir.



Şekil 3. USD/ TRY ve USD/ TWD değişkenlerine ait histogram

Öncelikle, histogramlardan da görüleceği üzere, MC analizinden elde edilen değerler %5 anlamlılık düzeyinde simetrik bir dağılım olan standart normal dağılım varsayımına uymaktadır. Dolayısıyla, MC simülasyonuna göre elde edilen aşağı ve yukarı yönlü piyasa riski değerleri birbirine oldukça yakın çıkmaktadır. Bu nedenle, Tablo 5'te sadece aşağı yönlü piyasa riskine ilişkin değerler sunulmuştur. Bulgular incelendiğinde, ülkelerin para birimlerinin risklilik durumlarına göre sıralanışlarında bir değişiklik olmamakla birlikte VaR ve özellikle de ES'ye bağlı risk ölçüm değerlerinde belirgin bir azalma olduğu gözlemlenmektedir. Örneğin, EVT-VaR analizinde %99 güven düzeyinde Brezilya, G.Afrika ve Türkiye için kayıp oranları sırasıyla %2.799, % 2.778 ve %1.987 iken MC-VaR analizinde ilgili değerler sırasıyla %2.463, %2.578 ve % 1.919 seviyelerine gerilemektedir. EVT-ES analizinde ilgili değerler sırasıyla %4.209, %3.600 ve %2.688 iken MC-ES analizinde ise ilgili değerler daha belirgin bir şekilde azalarak sırasıyla %2.848, %2.906 ve %2.199 seviyelerine gerilemektedir. Daha da önemlisi, daha önce belirtildiği gibi, MC analizi aşağı ve yukarı yönlü piyasa riski için benzer değerler üretirken EVT analizinde bu değerler de değişmektedir. Örneğin, EVT-VaR analizinde Brezilya, G. Afrika ve Türkiye için %99 güven düzeyinde yukarı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi durumundaki kayıp oranları aşağı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi durumundaki kayıp oranlarını aşarak sırasıyla %3.026, %3.040 ve %2.513 seviyelerine çıkarken MC-VaR analizinde ilgili değerler değişmeyerek yine sırasıyla %2.463, %2.578 ve % 1.919 seviyelerinde kalmaktadır.

Bu kapsamda, kısaca ifade etmek gerekirse mevcut bulgular finansal zaman serilerinde asimetrik dağılım ve kalın kuyruk özellikleri sergilemesi durumunda MC gibi standart yöntemlerin simetrik dağılım varsayımı altında tahmin edilmesinin piyasa riski ölçümü açısından yeterli olmayabileceğine işaret etmektedir. Bu bulgular da diğerlerinin yanı sıra Assaf [26] ve Goncu vd.'nin [21] çalışmalarında belirttiği bulgular ile benzerlik göstermektedir.

Tablo 5. MC-VaR ve MC-ES sonuçları

	MC-VaR		MC-ES	
	% 1	% 5	% 1	% 5
Aşağı yönlü piyasa riski				
Brezilya Reali	%2.463	%1.745	%2.848	%2.188
G.Afrika Randı	%2.578	%1.810	%2.906	%2.262
Türk Lirası	%1.919	%1.363	%2.199	%1.698
G.Kore Wonu	%1.711	%1.226	%1.978	%1.533
Meksika Pesosu	%1.601	%1.131	%1.819	%1.209
Hindistan Rupisi	%1.115	%0.777	%1.276	%0.979
Tayland Bahtı	%0.905	%0.604	%1.022	%0.794
Yeni Tayvan Doları	%0.727	%0.516	%0.844	%0.645

4. Değerlendirme ve Sonuç

Piyasa riski analizinde varyans-kovaryans yöntemi, tarihi simülasyon yöntemi, filtrelenmiş tarihi simülasyon yöntemi ve Monte Carlo simülasyon yöntemi oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Fakat, belirtilen tüm bu yöntemler daha çok normal piyasa koşulları altında gerçekleşebilecek olası kayıp tutarlarının hesaplanmasında kullanılabilir. Bu nedenle, bu yöntemler özellikle ekstrem finansal koşulların söz konusu olması durumunda piyasa riskinin olduğundan daha az ölçülmesine yol açabilmektedir. Geleneksel yöntemlerin bu eksikliği özellikle 2007-2008 küresel finans krizi döneminde daha da belirgin bir hale gelmiştir. Bu nedenle literatürde ekstrem değerler teorine dayalı piyasa riski analizlerine dönük yoğun bir ilgi oluşmuştur. Ekstrem değerler teorisinin avantajı doğrudan incelenen dönem içerisinde gerçekleşen ekstrem değerleri esas alması ve bu sayede gerçekleşme olasılığı az ama etki derecesi yüksek olayları modelleyebilmesidir.

Bu çalışmada Brezilya, Meksika, G. Kore, Tayvan, Hindistan, Tayland, Türkiye ve G. Afrika'dan oluşan 8 gelişen ülkenin para birimlerinin ekstrem finansal koşulların söz konusu olması durumunda maruz kalabilecekleri maksimum kayıp tutarları ekstrem değerler teorisi ile analiz edilmiştir. Çalışmada

karşılaştırma imkanı sunması amacıyla Monte Carlo simülasyonuna dayalı analizlere de yer verilmiştir. Çalışmada, ayrıca, farklı döviz pozisyonlarını dikkate almak amacıyla aşağı ve yukarı yönlü piyasa riski üzerinde de durulmuş ve ES değerleri de hesaplanmıştır. ES değerlerinin hesaplanması, gerçekleşen kayıp tutarlarının VaR modelince öngörülen kayıp tutarını aşması durumunda bir finansal kurumun karşı karşıya kalabileceği ortalama kayıp tutarının hangi seviyelere ulaşabileceği sorusuna yanıt vermesi açısından oldukça önemlidir.

Çalışma bulguları ekstrem finansal koşulların söz konusu olması durumunda hem uzun hem de kısa pozisyonlar için en riskli para birimlerinin sırasıyla Brezilya Reali ve G.Afrika Randı olduğunu ardından sırasıyla Türk Lirası, G. Kore Wonu ve Meksika Pesosunun geldiğini en az riskli para birimlerinin ise sırasıyla Yeni Tayvan Doları, Tayland Bahtı ve Hindistan Rupisi olduğunu göstermektedir. Ayrıca, bulgular, tüm para birimleri için aşağı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi durumundaki kayıp tutarları ile yukarı yönlü piyasa riskinin gerçekleşmesi durumundaki kayıp tutarlarının birbirinden farklı olduğunu göstermektedir. Monte Carlo simülasyonuna dayalı analizler de para birimleri için benzer bir risk sıralamasına işaret etmekle birlikte finansal varlıkların getirilerinin asimetric dağılım özelliğini dikkate almaması nedeniyle aşağı ve yukarı yönlü piyasa riski için benzer sonuçlar üretmekte ve finansal varlık getirilerinin dağılımının kalın kuyruk özelliğini dikkate almaması nedeniyle de riski olduğundan düşük ölçebilmektedir. Bu nedenle, özellikle piyasalarda volatilitenin arttığı dönemlerde piyasa riski analizlerinde daha doğru sonuçlara ulaşılabilmesi için finansal zaman serilerinin karakteristik özelliklerini dikkate alan model yapılarının kullanılmasının önemli olduğu anlaşılmaktadır.

Mevcut bulguların reel ve finansal sektör kuruluşları, yatırımcılar ve politika yapıcılar açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Öncelikle, finansal kuruluşlar açısından bakıldığında bulgular finansal risk düzeyinin arttığı dönemlerde piyasa riski ölçümünde finansal zaman serilerinin karakteristik özelliklerini dikkate almayan geleneksel modellerin kullanılmasının doğru bir yaklaşım olmayabileceğine işaret etmektedir. Çünkü, finansal kuruluşlarca geleneksel modellere dayalı olarak hesaplanan sermaye miktarı risklerin gerçekleşmesi durumundaki kayıp tutarlarını karşılamada yeterli olmayabilir. Bu saptamanın özellikle Türkiye gibi yüksek volatilitite hareketlerinin göreceli olarak daha sık gözlemlendiği gelişen piyasalar açısından oldukça önemli olduğu düşünülmektedir. Aksi takdirde, bu ülke finansal kuruluşları yüksek oranda ekonomik sermaye kaybına uğrama riskiyle karşı karşıya kalabileceklerdir.

Reel sektör kuruluşları açısından bakıldığında ise özellikle Brezilya, G. Afrika ve Türkiye gibi riskli para birimlerinin bulunduğu ülke ekonomilerinde faaliyet gösteren şirketlerin döviz kurlarında yaşanabilecek beklenmeyen durumların yol açabileceği kayıplara karşı korunma sağlamak amacıyla türev piyasalardan yararlanmalarının gerekli olduğu düşünülmektedir. Aksi takdirde, işletme faaliyetlerinden elde edilen gelirler ani ve sert döviz kuru hareketleri sonrasında yaşanabilecek kayıplar nedeniyle oldukça düşük seviyelere gerileyebilir.

Yatırımcılar açısından bakıldığında ise ilgili para birimlerinin risk düzeylerinin belirlenmiş olmasının yanı sıra bu para birimlerinde taşınacak kısa ve uzun pozisyonların risk düzeylerinin ayrı ayrı ölçülmesinin yatırım kararları açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Çünkü, bu bilgiler farklı yatırımcı tiplerinin (Örneğin, riskten kaçan, riski seven ve riske karşı kayıtsız) yatırım stratejilerini oluştururken göz önünde bulundukları kriterler arasında yer almaktadır.

Politika yapıcılar açısından bakıldığında ise özellikle denetleyici ve düzenleyici kurumlar bankaların ekstrem durumlar karşısında uygun bir sermaye yapısına kavuşmasını sağlamak amacıyla daha temkinli davranmak isterlerse bu durumda piyasa riski ölçümünde ES değerlerinin VaR değerlerine alternatif teşkil edebileceği ifade edilebilir. Çünkü, ES değerleri her durumda VaR değerlerinden daha yüksek çıkmaktadır [64]. Para politikası uygulamaları açısından bakıldığında ise riskli para birimlerine sahip merkez bankalarının döviz kurlarındaki hareketlere göreceli olarak daha duyarlı olması gerektiği ifade edilebilir. Çünkü, özellikle enflasyon hedeflemesine dayalı para politikalarının uygulandığı günümüzde döviz kurlarındaki sert fiyat hareketleri enflasyon dinamiklerinin bozulmasına yol açabilmektedir.

Kaynaklar

- [1] T. Angelidis, A. Benos, S. Degiannakis, 2004, The Use of GARCH models in VaR estimation, *Statistical Methodology*, 1, 105-128.
- [2] P. Abad, S. Benito, C. Lopez, 2014, A comprehensive review of value-at-risk methodologies, *The Spanish Review of Financial Economics*, 12 (1), 15-32.
- [3] P.F. Diamandis, A.A. Drakos, G.P. Kouretas, L. Zarangas, 2011, value-at-risk for long and short trading positions: Evidence from developed and emerging equity markets, *International Review of Financial Analysis*, 20, 165-176.
- [4] P. De Grauwe, 2008, The banking crisis: Causes, consequences and remedies, *Centre for European Policy Studies*, 178, 1-12.
- [5] L. T. Orlowski, 2012, Financial crisis and extreme market risks: Evidence from Europe, *Review of Financial Economics*, 21, 120-130.
- [6] S.B. Muela, C.L. Martin, R.A. Sanz, 2017, An application of extreme value theory in estimating liquidity risk, *European Research on Management and Business Economics*, 23 (3), 157-164.
- [7] A.J. McNeil, R. Frey, 2000, Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : An extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.
- [8] M. Gilli, E. Kellezi, 2006, An application of extreme value theory for measuring financial risk, *Computational Economics*, 27, 207-228.
- [9] A. Ghorbel, A. Trabelsi, 2008, Predictive performance of conditional extreme value theory in value-at-risk estimation, *International Journal of Monetary Economics and Finance*, 1(2), 121-148.
- [10] V. Marimoutou, B. Raggad, A. Trabelsi, 2009, Extreme value theory and value-at-risk: Application to oil market, *Energy Economics*, 31, 519-530.
- [11] D.N. Dimitrakopoulos, M.G. Kavussanos, S.I. Spyrou, 2010, Value-at-risk models for volatile emerging markets equity portfolios, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 50 (4), 515-526.
- [12] A. Cifter, 2011, Value-at-risk estimation with wavelet-based extreme value theory: Evidence from emerging markets, *Physica A*, 390, 2356-2367.
- [13] R. Jesús, E. Ortiz, A. Cabello, 2013, Long run peso/dollar exchange rates and extreme value behavior: Value-at-risk modeling, *The North American Journal of Economics and Finance*, 24, 139-152.
- [14] E. Altun, 2014, Uç değerler teorisi ve riske maruz değer, *Yüksek Lisans Tezi*, <http://www.openaccess.hacettepe.edu.tr:8080/xmlui/bitstream/handle/11655/2115>.
- [15] M. Karmakar, G.K. Shukla, 2015, Managing extreme risk in some major stock markets: An extreme value approach, *International Review of Economics And Finance*, 35, 1-25.
- [16] G. Trzpiot, J. Majewska, 2010, Estimation of value-at-risk: Extreme value and robust approaches, *Operations Research and Decision*, 20 (1), 131-143.
- [17] H.N.E. Byström, 2004, Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory, *International Review of Financial Analysis*, 13, 133-152.
- [18] R. Gençay, F. Selçuk, 2004, Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets, *International Journal of Forecasting*, 20, 287-303.
- [19] Z. Wang, W. Wu, C. Chen, Y. Zhou, 2010, The exchange rate risk of Chinese yuan: Using VaR and ES based on extreme value theory, *Journal of Applied Statistics*, 37 (2), 265-282.
- [20] G. Liao, T-Z. Pan, L-F. Chang, S-C. Huang, C-F. Wu, 2012, Portfolio value-at-risk by Bayesian conditional EVT-copula models: taking an Asian index portfolio for example, *Journal of Statistics and Management Systems*, 15 (2), 345-367.
- [21] A. Goncu, A.K. Akgul, O. Imamoğlu, M. Tiryakioğlu, M. Tiryakioğlu, 2012, An analysis of the extreme returns distribution: The case of the Istanbul Stock Exchange, *Applied Financial Economics*, 22(9), 723-732.
- [22] A. Çifter, A. Özün, S. Yılmaz, 2007a, Beklenen kuyruk kaybı ve genelleştirilmiş pareto dağılımı ile riske maruz değer öngörüsü: Faiz oranları üzerine bir uygulama, *Bankacılar Dergisi*, 60, 3-16.
- [23] A. Çifter, A. Özün, S. Yılmaz, 2007b, Geriye dönük testlerin karşılaştırmalı analizi: Döviz kuru üzerine bir uygulama, *Bankacılar Dergisi*, 62, 27-43.
- [24] E.M. Iglesias, M. Dolores, L. Varela, 2012, Extreme movements of the main stocks traded in the Eurozone: An analysis by sectors in the 2000's decade, *Applied Financial Economics*, 22 (24), 2085-2100.
- [25] E.M. Iglesias, 2012, An analysis of extreme movements of exchange rates of the main currencies traded in the foreign exchange market, *Applied Economics*, 44, 4631-4637.
- [26] A. Assaf, 2009, Extreme observations and risk assessment in the equity markets of MENA region: Tail measures and value-at-risk, *International Review of Financial Analysis*, 18, 109-116.

- [27] E.M. Iglesias, 2015, Value-at-risk and expected shortfall of firms in the main European Union stock market indexes: A detailed analysis by economic sectors and geographical situation, *Economic Modelling*, 50, 1-8.
- [28] L. Kalyvas, C. Siriopoulos, N. Dritsakis, 2004, Reaching extreme events with conditional and unconditional models, *WSEAS Transactions on Business and Economics*, 1 (1), 156-162.
- [29] C. Payaslioglu, 2009, A tail index tour across foreign exchange rate regimes in Turkey, *Applied Economics*, 41 (3), 381-397.
- [30] Y. Bensalah, 2000, Steps in applying extreme value theory to finance: A review, Bank of Canada, Working Paper 2000-20. Research and Risk management Section, Financial Markets Department.
- [31] F. Ren, D.E. Giles, 2010, Extreme value analysis of daily Canadian crude oil prices, *Applied Financial Economics*, 20 (12), 941-954.
- [32] T. Fretheim, G. Kristiansen, 2015, Commodity market risk from 1995 to 2013: An extreme value theory approach, *Applied Economics*, 47 (26), 2768-2782.
- [33] A.A. Soyalp, E. Nevruz, U. Karabey, 2013, Gelişmekte olan bazı piyasalarda finansal risklerin uç değer kuramı ile ölçülmesi, *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya*, 6, 86-95.
- [34] N. Çelik, M.F. Kaya, 2010, Uç değerler yöntemi ile riske maruz değer'in tahmini ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsası üzerine bir uygulama, *Bankacılık ve Sigortacılık Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 19-32.
- [35] A. Arik, B. Bulut, M. Sucu, 2013, Finansal risklerin uç değer kuramı ile ölçülmesi, *Bilim ve Teknoloji Dergisi A - Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik*, 14 (2), 119-134.
- [36] E. Başçı, H. Kara, 2011, Finansal istikrar ve para politikası, *İktisat, İşletme ve Finans Dergisi*, 26 (302), 9-25.
- [37] A.H. Kara, 2012, Küresel kriz sonrası para politikası, *İktisat, İşletme ve Finans Dergisi*, 27, (315), 9-36.
- [38] W. Chkili, C. Aloui, D.K. Nguyen, 2012, Asymmetric effects and long memory in dynamic volatility relationships between stock returns and exchange rates, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 22, 738-757.
- [39] Y. Fan, Y.J. Zhang, H.T. Tsai, Y.M. Wei, 2008, Estimating 'value-at-risk' of crude oil price and its spillover effect using the GED-GARCH approach, *Energy Economics*, 30 (6), 3156-3171.
- [40] P. Giot, S. Laurent, 2003, Value-at-risk for long and short positions, *Journal of Applied Econometrics*, 18, 641-664.
- [41] W. Chkili, S. Hammoudeh, D.K. Nguyen, D.K., 2014, Volatility forecasting and risk management for commodity markets in the presence of asymmetry and long memory, *Energy Economics*, 41, 1-18.
- [42] C. Aloui, S. Mabrouk, 2010, Value-at-risk estimations of energy commodities via long memory, asymmetry and fat-tailed GARCH models, *Energy Policy*, 38, 2326-2339.
- [43] P. Artzner, J. Delbaen, M. Eber, D. Heath, 1997, Thinking coherently, *Risk*, 10 (11), 68-71.
- [44] P. Artzner, J. Delbaen, M. Eber, D. Heath, 1999, Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9 (3), 203-228.
- [45] Y. Yamai, T. Yoshida, 2005, Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective, *Journal of Banking & Finance*, 29, 997-1015.
- [46] A.F. Rossignolo, M.D. Fethi, M. Shaban, 2012, Value-at-risk models and basel capital charges: evidence from emerging and frontier stock markets, *Journal of Financial Stability*, 8(4), 303-319.
- [47] S. Basak, A. Shapiro, 2001, Value-at-risk-based risk management: Optimal policies and asset prices, *The Review of Financial Studies*, 14(2), 371-405.
- [48] F.M. Longin, 2000, From value-at-risk to stress testing: The extreme value approach, *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097-1130.
- [49] A.K. Singh, D.E. Allen, P.J. Robert, 2013, Extreme market risk and extreme value theory, *Mathematics and Computers in Simulation*, 94, 310-328.
- [50] L. Kourouma, D. Dupre, G. Sanfilippo, O. Taramasco, 2011, Extreme value-at-risk and expected shortfall during financial crisis. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1744091>.
- [51] B.M. Hill, 1975, A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, 3, 1163-1174.
- [52] S.N. Neftci, 2000, Value-at-risk calculations, extreme events, and tail estimation, *The Journal of Derivatives*, 7 (3), 23-38.
- [53] P. Blum, M. Dacorogna, 2003, Extreme forex moves, *RISK*, Februray, 63-67.
- [54] M. Dacorogna, R. Gencay, U. Muller, R. Olsen, O. Pictet, 2001, An introduction to high frequency finance, Academic Press, California.
- [55] A. Ferreira, L. de Haan, L. Peng, 2003, On optimising the estimation of high quantiles of a probability distribution, *Statistics*, 37, 401-434.
- [56] M. Loretan, P.C.B. Philips, 1994, Testing the covariance stationarity of heavy tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets, *Journal of Empirical Finance*, 1 (2), 211-248, 1994.

- [57] W.H. DuMouchel, 1983, Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: A critique, *The Annals of Statistics*, 11 (4), 1019–1031, 1983.
- [58] J. Gavin, 2000, Extreme value theory—an empirical analysis of equity risk, *Quantative Risk: Models & Statistics UBS Warburg*, August, 1-9.
- [59] T.G. Bali, S.N. Neftci, 2003, Disturbing extremal behavior of spot rate dynamics, *Journal of Empirical Finance*, 10, 455-477.
- [60] E.M. Iglesias, M.D.L. Varela, 2012, Extreme movements of the main stocks traded in the Eurozone: An analysis by sectors in the 2000's decade, *Applied Financial Economics*, 22:24, 2085-2100.
- [61] A. Ghorbel, S. Souilmi, 2014, Risk measurement in commodities markets using conditional extreme value theory, *International Journal of Econometrics and Financial Management*, 2(5), 188-205.
- [62] J. Daniessson, C.G. de Vries, 2000, Value-at-risk and extreme returns, *Annales d'Économie et de Statistique*, 60, 239-270.
- [63] S.P. Peterson, 2012, *Models of stock price Dynamics in investment theory and risk management*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.
- [64] J.B. Su, 2014, Empirical analysis of long memory, leverage, and distribution effects for stock market risk estimates, *North American Journal of Economics and Finance*, 30, 1-39.



Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 11, 2018, 2, 143-155

Geliş/Received:19.09.2018, Kabul/Accepted: 13.12.2018

www.istatistikciler.org

Araştırma Makalesi / Research Article

Weibull ve Pareto dağılımları için tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı ve grup kabul örnekleme planları

Canan Hamurkaroğlu

Karabük Üniversitesi

İşletme Fakültesi

Aktüerya ve Risk Yönetimi Bölümü

cananhamurkaroglu@karabuk.edu.tr

 0000-0002-8537-513X

Ayten Yiğiter

Hacettepe Üniversitesi

Fen Fakültesi

İstatistik Bölümü

yigiter@hacettepe.edu.tr

 0000-0001-8180-995X

Yasemin Gençtürk

Hacettepe Üniversitesi

Fen Fakültesi

Aktüerya Bilimleri Bölümü

yasemis@hacettepe.edu.tr

 0000-0002-8916-8509

Öz

Üretim sektöründe kullanılan önemli istatistiksel araçlardan biri kabul örnekleme planlarıdır. Çünkü üreticiler ürünlerin kalitesinin korunmasını ve ürünler arasındaki değişkenliğin minimum olmasını isterler. Kabul örnekleme planları üreticinin çıkarlarını koruduğu gibi tüketicinin de çıkarlarını gözetir. Bazı ürünler için kullanım ömrü önemli bir kalite karakteristiği olabilir. Bu durumda, ürünlerin kalite kontrol yeterliliği yaşam testine dayalı uygun bir kabul örnekleme planı ile test edilebilir. Endüstride ürün ömrünün yaşam testine dayalı kabul örnekleme planları güvenilirlik planları olarak da adlandırılır. Maliyet ve zamanın kısıtlı olması nedeniyle, tüm ürünlerin başarısızlık zamanı gözlenene kadar denemeye devam etmek mümkün olmayabilir. Bu nedenle bir sansürleme düzeni ile kesilmiş yaşam testine dayalı kabul örnekleme planı uygulanır.

Bu çalışmada, Weibull ve Pareto dağılımları için Tip-I sansürleme düzeni kullanılarak kesilmiş yaşam testlerine dayalı tek katlı ve grup kabul örnekleme planları incelenmiştir. Belirlenen plan parametreleri için optimal örneklem büyüklüğü ve kabul sayısı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kabul örnekleme planı, kesilmiş yaşam testi, üretici riski, tüketici riski, işlem karakteristik eğrisi, Weibull dağılımı, Pareto dağılımı.

Abstract

Single and group acceptance sampling plans for Weibull and Pareto distribution

One of the most important statistical tools in production sector is the acceptance sampling plans. Because the producers want the protection of the quality of the products and minimum variability between the products. Acceptance sampling plans are not only preserving the producers' benefit but also looking out for the consumers' interest. The expected lifetime may be an important quality characteristic for some products. Then, the quality control sufficiency of the products can be controlled using a suitable survival test based on the acceptance sampling plans. In the industry, the acceptance sampling plans based on the survival test of the products' lifetime are also called as reliability sampling plans. As the cost and time are limited, it might be impossible to continue the trial until the failure time of all products are observed. Therefore, the acceptance sampling plan based on survival test truncated with a censored scheme is used.

In this study, single and group acceptance sampling plans based on truncated survival test using Type-I censoring are investigated for Weibull and Pareto distributions. Optimal sampling size and acceptance number are determined for some parameter values.

Key Words: Acceptance sampling plan, truncated survival test, producer's risk, consumer's risk, operation characteristic curve, Weibull distribution, Pareto distribution.

1. Giriş

Kabul örneklem planları, bir üretim birimindeki ürünlerin kabul edilip edilmeyeceğine karar verme sürecini kapsar. Bir partiden rasgele seçilen örneklemin muayenesine dayalı olarak partinin kabulüne ya da reddine karar verilir. Kabul örnekleme planları tek katlı, çift katlı, çok katlı ya da ardışık planlar olabilir. Tek katlı kabul örnekleme planı, uygulanmasının basitliği nedeniyle tercih edilmektedir. Tek katlı örnekleme planında örneklemden elde edilen başarısızların sayısı önceden belirlenen c gibi bir kabul sayısına eşit ya da büyükse parti ret, aksi takdirde kabul edilir. Ürünlerin yaşam süresi bir kalite karakteristiği olduğunda kabul örnekleme planlarının temelindeki istatistiksel test bir ürünün gerçek ortalama ömrü μ olmak üzere, $H_0 = \mu \geq \mu_0$ sıfır hipotezinin $H_1 = \mu < \mu_0$ seçenek hipotezine karşı testidir. $H_0 = \mu \geq \mu_0$ hipotezi sağlanırsa, ürün iyi üründür ve diğer departmanlara ya da tüketicinin kullanımına sunulur. $H_1 = \mu < \mu_0$ hipotezi sağlanırsa sıfır hipotezi ret edilir ve ürün kötü üründür ve yeniden işleme gönderilir ya da iskartaya çıkarılır. Ürünlerin yaşam süresinin dağılımı genellikle çarpık bir dağılım olduğu dikkate alınır, hipotezde ortalama ömür μ yerine medyan da kullanılabilir. Kabul örneklem planlarında hipotez testindeki 1. Tip hata olasılığı α^* , iyi bir partinin reddedilme olasılığı yani üretici riski ve 2. Tip hata olasılığı β^* kötü bir partinin kabul edilme olasılığı yani tüketici riski olarak adlandırılır. Eğer tüketici güven seviyesi P^* ile gösterilirse, tüketici riski $\beta^* = 1 - P^*$ olur. Optimal kabul örnekleme planı her iki riski de en aza indiren plandır. Öte yandan bir partinin kabul ya da red edilmesi kararı verilirken zaman ve maliyet tasarrufu önemlidir. Bunun için farklı sansürleme düzenlerinin uygulanabildiği, kesilmiş yaşam testlerine dayalı kabul örnekleme planları kullanılır. Zaman sansürleme (Tip-I), ürün sansürleme (Tip-II) ve hibrid sansürleme yaşam testinde kullanılan sansür düzenlerinden bazılarıdır. Test süresinin sınırlı olduğu ve test için kaynakların az olduğu durumlarda, bu tip sansürleme düzenlerini dikkate alan kabul örnekleme planlarının kullanılması uygundur [8].

Tip-I sansürleme düzeninde, n birimle başlayan testte önceden belirlenen sabit bir sonlandırma süresi t_0 'a kadar başarısızlar gözlenir. Tip-II sansürleme düzeninde, önceden belirlenen sabit sayıda başarısızlık görülünceye kadar denemeye devam edilir. Ancak bu sansürleme düzeninde sonlandırma süresi t_0 büyük olduğunda zorluk ortaya çıkar. Hibrid sansürleme düzeninde ise, hem zaman hem de başarısızlık sayısı dikkate alınır. n birim için bir yaşam testi yapıldığında, test önceden belirlenen bir c başarısızlık sayısından sonra ya da önceden belirlenen bir t_0 sonlandırma süresinden önce sona erer. Tip-I ve Tip-II sansürleme düzenleri hibrid sansürleme düzeninin özel durumlarıdır. Hibrid sansürleme düzeni altında yaşam testi deneyi yapmak için, n , c ve t_0 değerlerinin önsel olarak bilinmesi ya da bazı optimizasyon kriterlerine göre seçilmesi gerekir. Kabul örnekleme planında, örnekleme alınan ürünler genellikle tek tek test edilir. Ancak tüm birimlerin başarısızlık zamanların gözleninceye kadar denemeye devam etmek zaman ve maliyet kısıtları nedeniyle mümkün olamayacağı için yukarıda tanımlanan Tip-I ve Tip-II sansürlemeye düzenlerine ihtiyaç duyulur. Bunun yanı sıra uygulamada, aynı anda birden fazla sayıda ürünün test edilebildiği durumlar da vardır. Bu durumda test edilecek toplam ürün sayısı n , mevcut test edicilerin sayısına göre eşit büyüklükteki gruplara bölünür. Bu şekilde gruplara dayanan kabul örnekleme planına grup kabul örnekleme planı denir.

Birçok yazar tarafından, yaşam süresinin farklı dağılımları için kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planları incelenmiştir. Kesilmiş yaşam testine ilişkin ilk çalışma Epstein [6] tarafından üstel dağılım için yapılmıştır. Baklizi [5] iki parametrelili Pareto dağılımı, Balakrishnan, Leiva ve Lopez [4] Birnbaum-Saunders dağılımı, Rosaiah ve Kantam [13] ters Rayleigh dağılımı, Srinivasa Rao [15] log-logistic dağılım, Singh ve Tripathi [16] ters Weibull dağılımı için kabul örnekleme planlarını incelemişlerdir. Amer Ibrahim ve Al-Omari [1] yaşam süresinin Sushila dağılımı varsayımı ile kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planı üzerinde çalışmışlardır. Aslam, Kundu ve Ahmad [2] genelleştirilmiş üstel dağılım için yaşam süresinin medyanına ilişkin kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı örnekleme planı düzeninde minimum örneklem büyüklüğünü elde etmişlerdir. Aslam ve Jun [3] hem

üretici hem de tüketicinin faydasını dikkate alacak biçimde Gamma, Weibull ve genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı için tek katlı kabul örnekleme planını incelemiştirlerdir. Gui ve Shangli Zhang [7] Gompertz dağılımı için ürünün ortalamasını, Malathi ve Muthulakshmi [9,10] Gompertz dağılımı için ürünün ömrünün medyanı ve yüzdeliklerini dikkate alarak kesilmiş yaşam testlerine dayalı kabul örnekleme planlarını çalışmışlardır. Malathi ve Muthulakshmi [11] Frechet dağılımı için medyanı kullanarak kabul örneklem planlarını incelemiştirlerdir. Loganathan ve Gunasekaran [8] tek katlı örnekleme planında hem üretici hem de tüketici riskini minimum yapan n ve c parametrelerini elde etmişlerdir. Mughal ve Ismail [12] kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planında genelleştirilmiş Pareto dağılımının farklı parametreleri için minimum test sonlandırma zamanını belirlemiştirlerdir. Rao, Kumar ve Rosaiah [14] tek katlı örnekleme planında yarı normal dağılımı dikkate almışlardır. Sudamani ve Anburajan [17] ters Rayleigh ve log-lojistik dağılımları için ağırlıklandırılmış binom dağılımını kullanarak kesilmiş yaşam testlerine dayalı grup kabul örnekleme planı üzerine çalışmışlardır.

Çalışmada, Weibull ve Pareto dağılımları için kabul örnekleme planı ele alınmış, önceki çalışmalardan farklı olarak kesilmiş yaşam testlerine dayalı hem tek katlı ve hem de grup kabul örnekleme planları için Tip-I sansürleme düzeni incelenmiştir. Çalışmanın İkinci Bölümü'nde Weibull ve Pareto dağılımların temel özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü Bölümde, kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planında optimal n ve c 'nin nasıl belirleneceği- anlatılmış, Dördüncü Bölümde kesilmiş yaşam testine dayalı grup kabul örnekleme planına ilişkin bilgi verilmiştir. Tek katlı ve grup kabul örnekleme planlarında optimal değerlerin nasıl hesaplandığına ilişkin sayısal örneklerin verildiği Beşinci Bölümün ardından, Altıncı Bölümde Weibull ve Pareto dağılımlarının farklı parametrelere için tek katlı kabul örnekleme planında optimal n ve c , grup kabul örnekleme planında ise optimal grup sayısı g ile c 'nin değerleri elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular Yedinci Bölümde özetlenmiştir.

2. Dağılımlar

Ürünün ömrü ile ilgili verilerin modellenmesinde uygun olan dağılımlardan ikisi Weibull ve Pareto dağılımıdır. Bu bölümde bu dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, tehlike hızı (hazard) fonksiyonu ile momentleri verilmiştir.

2.1 Weibull Dağılımı

T raslantı değişkeni ürünün ömrünü göstermek üzere $T \sim Weibull(\alpha, \beta)$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha}}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1)$$

biçimindedir. Burada α şekil ve β ölçek parametresidir. $\beta = 1$ için dağılım standart Weibull dağılımı adını alır.

Kümülatif dağılım, yaşam ve tehlike hızı fonksiyonları sırasıyla,

$$F_T(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha}}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2)$$

$$S_T(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha}}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3)$$

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha-1}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (4)$$

biçimindedir.

Sıfır noktasına göre 1. momenti,

$$\mu = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (5)$$

olarak elde edilir. Eş. (5)'te $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonu olup $\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$ biçimindedir.

2.2 Pareto Dağılımı

$T \sim \text{Pareto}(\alpha, \gamma)$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t; \alpha, \gamma) = \frac{\alpha \gamma^\alpha}{(t + \gamma)^{\alpha+1}}; \quad t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \quad (6)$$

biçimindedir. Burada α şekil parametresi ve γ ölçek parametresidir.

Kümülatif dağılım, yaşam ve tehlike hızı fonksiyonları sırasıyla;

$$F_T(t) = 1 - \left(\frac{t + \gamma}{\gamma}\right)^{-\alpha}, \quad t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \quad (7)$$

$$S_T(t) = \left(\frac{t + \gamma}{\gamma}\right)^{-\alpha}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (8)$$

$$h(t) = \frac{\alpha}{t + \gamma}, \quad t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0 \quad (9)$$

biçimindedir.

Sıfır noktasına göre 1. momenti,

$$\mu = \frac{\gamma}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \quad (10)$$

olarak elde edilir.

3. Kesilmiş Yaşam Testine Dayalı Tek Katlı Kabul Örnekleme Planı

Yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planında, ürünün ömrüne ilişkin $H_0: \mu \geq \mu_0$ hipotezine karşı $H_1: \mu < \mu_0$ hipotezinin testinde, sonsuz büyüklüğünde düşünülen bir partiden rasgele alınan n birimlik örneklemden ürünler test edilir. Tip-I sansürleme düzeninde yapılan test, önceden belirlenen bir t_0 sonlandırma zamanında sona erer. Planın diğer bir parametresi c kabul sayısıdır. t_0 'dan önce c 'den daha fazla başarısız ürün olması durumunda sıfır hipotezi reddedilir, t_0 'dan önce c ya da daha az başarısız ürün olması durumunda ise sıfır hipotezi kabul edilir. Özetle, bir partinin ret ya da kabulü kalite karakteristiğine ilişkin hipotezin ret ya da kabulüne eşittir. Maliyet ve zaman tasarrufu nedeniyle, kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planında minimum örneklem büyüklüğü ile kabul sayısının belirlenmesi önemlidir. Tip-I sansürleme düzeninde, kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planının parametreleri aşağıda verilmiştir:

1. N büyüklüğündeki bir partiden rasgele alınan örneklem büyüklüğü n ,
2. Kabul sayısı c ,
3. Testin sonlandırma süresi t_0 ,
4. Ürünün belirlenen ortalama ömrü μ_0 olmak üzere $\frac{t_0}{\mu_0}$ oranı.

Dolayısıyla tek katlı kabul örnekleme planının parametreleri $\left[n, c, \frac{t_0}{\mu_0} \right]$ ile verilir.

3.1 Kabul Örnekleme Planında Karakteristik İşlem Fonksiyonu

Bir örnekleme planın performansı, karakteristik işlem fonksiyonu (Operation Characteristic: OC) elde edilerek yorumlanır. X raslantı değişkeni örneklemdaki başarısızların sayısını gösterebilir. Ürünün başarısızlık olasılığı p olmak üzere OC fonksiyonu, partinin kabul olasılığı $P(p)$ ile verilir:

$$P(p) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^c P(X = x) \quad (11)$$

X raslantı değişkeninin olasılık dağılımı hipergeometrik dağılımdır. Ancak binom ya da Poisson dağılımı da kullanılabilir. Parti yeteri kadar büyükse $\left(\frac{n}{N} \leq 0.10 \right)$ partinin kabul olasılığını hesaplamak için binom dağılımı ya da n büyük ve p küçük olduğunda binom dağılımı yerine Poisson dağılımı da kullanılabilir [8]. Bu çalışmada binom dağılımından yararlanılmıştır. Bu durumda,

$$P(p) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad (12)$$

biçimindedir.

Eş.(12)'de $p = F(t; \mu)$, ürün kalite karakteristiği μ 'nin azalan bir fonksiyonudur. OC fonksiyonu sabit bir t süresi için p 'nin azalan bir fonksiyonudur. Minimum örneklem büyüklüğü n ve kabul sayısı c 'nin seçimi, OC fonksiyonunun temeline dayanır [1].

3.2. Minimum Örneklem Büyüklüğü

Tüketici, kötü bir partinin kabul olasılığının belirlenen tüketici riskinden daha düşük olmasını isterken, üretici iyi bir partinin reddedilme olasılığının belirlenen üretici riskinden daha küçük olmasını ister.

$p = F_T(t_0)$, t_0 sonlandırma zamanından önce bir ürünün başarısız olması olasılığını gösterebilir. Minimum örneklem büyüklüğü n , kötü bir partinin kabul edilme olasılığının belirlenen tüketici riski β^* 'i aşmayacak şekilde belirlenir:

$$\sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \leq \beta^*. \quad (13)$$

Kalite kontrol analizinde, incelenen dağılımın ölçek parametresi genellikle kalite parametresi olarak adlandırılır [5,12]. Eş. (5) ve Eş. (10)'dan görüleceği gibi, Weibull ve Pareto dağılımlarının ortalamaları

ölçek parametrelerinin bir fonksiyonudur ki, Weibull dağılımının ölçek parametresi $\beta = \frac{\mu}{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}$ ve

Pareto dağılımının ölçek parametresi $\gamma = \mu(\alpha - 1)$ olarak ifade edilebilir. Diğer yandan bir ürünün kalite düzeyi $\frac{\mu}{\mu_0}$ gerçek ortalama ömrün belirlenen ortalama ömre oranıdır. Ayrıca testin sonlandırma zamanı

t_0 , pozitif bir a sabiti ile μ_0 'ın çarpımı yani $t_0 = a\mu_0$ biçiminde düşünülebilir. Bu durumda Weibull

dağılımı için başarısızlık olasılığı Eş.(2)'de, $t_0 = a\mu_0$ ve $\beta = \frac{\mu}{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})}$ yerine yazılıp $\frac{\mu}{\mu_0}$ 'a göre

düzenlenirse,

$$p = F_T(t_0) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t_0}{\beta} \right)^\alpha \right] = 1 - \exp \left[- \left(\frac{a\mu_0}{\beta} \right)^\alpha \right] = 1 - \exp \left[- \frac{a^\alpha (\mu/\mu_0)^{-\alpha}}{\left[\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \right]^\alpha} \right] \quad (14)$$

benzer şekilde Pareto dağılımı için Eş.(7)'de $t_0 = a\mu_0$ ve $\gamma = \mu(\alpha - 1)$ yerine yazılıp; $\frac{\mu}{\mu_0}$ 'a göre düzenlenirse,

$$p = F_T(t_0) = 1 - \left(\frac{t_0 + \gamma}{\gamma} \right)^{-\alpha} = 1 - \left(\frac{a\mu_0 + \mu(\alpha - 1)}{\mu(\alpha - 1)} \right)^{-\alpha} = 1 - \left(1 + \frac{a}{\frac{\mu}{\mu_0}(\alpha - 1)} \right)^{-\alpha} \quad (15)$$

biçiminde elde edilir.

3.3. Örneklem Planında Optimal Örneklem Büyüklüğü ve Kabul Sayısının Belirlenmesi

Kabul örneklem planında üretici, kabul edilebilir bir kalite düzeyindeki partinin reddedilme olasılığının üretici riskinden küçük olmasını yani bu kalite düzeyindeki partinin kabul olasılığının $1 - \alpha^*$ 'dan büyük olmasını ister.

Tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örneklem planında hem üreticinin iyi partinin reddedilmesine, hem de tüketicinin kötü partinin kabul edilmesine karşı korunması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir:

$$P(p_1) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p_1^x (1 - p_1)^{n-x} \geq 1 - \alpha^* \quad (16)$$

$$P(p_2) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p_2^x (1 - p_2)^{n-x} \leq \beta^* \quad (17)$$

Eş. (16) ve Eş.(17)'yi aynı anda sağlayan n ve c değerleri optimal değerler olup, aşağıda verilen iteratif yöntem kullanılarak elde edilir [3,15]:

1. $\mu > \mu_0$ olacak biçimde t_0 sonlandırma süresine karşılık gelen $p_1 = F_T \left(\frac{t_0}{\mu_0}; \frac{\mu}{\mu_0} = k_1 \right)$ ve

$p_2 = F_T \left(\frac{t_0}{\mu_0}; \frac{\mu}{\mu_0} = k_2 \right)$ olasılıkları bulunur.

Burada $\frac{\mu}{\mu_0} = k_1$ üretici riski altındaki orandır. p_1 üretici riskine karşılık gelen başarısızlık olasılığıdır ve

kabul edilebilir kalite seviyesi (acceptable quality level -AQL) olarak adlandırılır. Belirli bir α^* 'da $\frac{\mu}{\mu_0}$

oranı küçüldükçe, üreticinin daha güçlü bir kalite gereksinimine ihtiyacı olduğunu açıklar.

$P(p_1) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p_1^x (1 - p_1)^{n-x} \geq 1 - \alpha^*$ eşitsizliğini sağlayan $p_1 = F \left(\frac{t_0}{\mu_0}; \frac{\mu_0}{\mu} \right)$ için $\frac{\mu}{\mu_0}$ oranı

minimumdur.

$\frac{\mu}{\mu_0} = k_2$ oranı ise tüketici riski altındaki orandır. Tüketici partinin kabul olasılığının belirlenen bir tüketici

riskinden daha düşük olmasını istediğinden genelde $k_2 = 1$ alınır. p_2 tüketici riskine karşılık gelen başarısızlık olasılığıdır ve partinin tolerans düzeyi (lot tolerance level-LTL)) olarak adlandırılır.

2. $c=0$ ile başlanır.

$$3. P(p_1) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p_1^x (1-p_1)^{n-x} \geq 1-\alpha^* \quad \text{sağlayan en büyük } n \text{ değeri } n_{enk} \text{ bulunur.}$$

$$4. P(p_2) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p_2^x (1-p_2)^{n-x} \leq \beta^* \quad \text{sağlayan en küçük } n \text{ değeri } n_{enk} \text{ bulunur,}$$

5. $n_{enk} \leq n_{enb}$ ise optimal plan parametreleri n_{enk}, c dir. Aksi durumda c bir artırılır.

6. 4.-5. adımlar n ve c 'nin optimal değerleri elde edilinceye kadar devam eder.

n ve c 'nin optimal değerleri bulunduktan sonra örneklem muayenesi yapılarak partinin kabul ya da reddine karar verilir. Partinin kabul edilmesi $H_0 = \mu \geq \mu_0$ hipotezinin kabul edilmesidir. Bu durumda üretici ve tüketici risklerinin her biri için güvenilir bir kalite seviyesi gerçekleşmiş olur.

4. Kesilmiş Yaşam Testine Dayalı Grup Kabul Örneklem Planı

Genelde örneklem planında, bir test cihazına sadece tek bir ürünün konulduğu varsayılır. Ancak uygulamada aynı anda birden fazla sayıda ürünü barındıran test cihazları da kullanılabilir. Bu durumda test edilecek toplam ürün sayısı (n), mevcut test edicilerin sayısına göre eşit büyüklükteki gruplara bölünür. Bir test cihazındaki ürünler bir grup olarak kabul edilir ve gruptaki ürünlerin sayısı grup büyüklüğü (her gruptaki örneklem büyüklüğü) olarak adlandırılır. Bu şekilde gruplara dayanan kabul örneklem planına grup kabul örneklem planı denir [2]. Grup sayısı g ile ifade edilirse her bir gruptaki ürün sayısı r olmak üzere toplam örneklem büyüklüğü $n=rg$ 'dir. Her bir gruptaki ürünler aynı çevresel koşullarda bağımsız olarak aynı anda test edilir. Kesilmiş yaşam testlerine dayalı grup kabul örneklem planının parametreleri aşağıda verilmiştir:

1. Grup sayısı g ,
2. Grup büyüklüğü r (plan düzeni $r=1$ olduğunda tek katlı kabul örneklem planına indirgenir).
3. Her bir grup için kabul sayısı c ,
4. Testin sonlandırma süresi t_0 ,
5. Ürünün belirlenen ortalama ömrü μ_0 olmak üzere $\frac{t_0}{\mu_0}$ oranı.

Dolayısıyla grup kabul örneklem planının parametreleri $\left[g, r, c, \frac{t_0}{\mu_0} \right]$ ile verilir.

Tüm gruplar aynı anda denemeye girer ve her gruptaki başarısızlar gözlenir. t_0 sonlandırma süresince grupların her birinde en fazla c başarısızlık ortaya çıkarsa parti kabul, herhangi bir grupta c 'den fazla başarısızlık ortaya çıktığında parti reddedilir [5,12,15,17].

Partinin kabul olasılığı binom dağılımından elde edilebilir:

$$P_{GKÖP}(p) = \left[\sum_{x=0}^c \binom{r}{x} p^x (1-p)^{r-x} \right]^g \quad (18)$$

Eş.(18)'deki başarısızlık olasılığı $p = F_T(t_0)$, $t = a\mu_0$ olarak alındığında Weibull dağılımı için Eş.(14), Pareto dağılımı için ise Eş.(15)'te verildiği gibidir. Optimal grup sayısı g , her gruptaki örneklem büyüklüğü r ve kabul sayısı c ,

$$P_{GKÖP}(p_1) = \left[\sum_{x=0}^c \binom{r}{x} p_1^x (1-p_1)^{r-x} \right]^g \geq 1-\alpha^*$$

$$P_{GKÖP}(p_2) = \left[\sum_{x=0}^c \binom{r}{x} p_2^x (1-p_2)^{r-x} \right]^g \leq \beta^*$$

eşitsizliklerini sağlayacak biçimde bulunur.

5. Kesilmiş Yaşam Testine Dayalı Kabul Örnekleme Planı İçin Bazı Sayısal Örnekler

Bu bölümde, Dördüncü Bölüm’de anlatılan Tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı ve grup kabul örnekleme planlarında tüketici, üretici ve hem tüketici hem de üretici riski dikkate alınarak plan parametrelerinin nasıl hesaplanacağına daha iyi anlaşılabilmesi için bazı örnekler yer almaktadır.

Örnek 1. Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresinin dağılımı $T \sim Weibull(\alpha = 2, \beta)$ olsun. Gerçek ortalama ömür 1000 saatten fazla olduğunda parti kabul edilsin ($H_0: \mu \geq 1000$). Tüketici riski $\beta^* = 1 - P^* = 0.10$, testin sonlandırma zamanı $t_0 = 500$ saat ve kabul sayısı $c = 0$ olsun. Eş.(13)’ten yararlanarak minimum örneklem büyüklüğü n aşağıdaki gibi bulunur:

$$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \leq 0.10 \text{ eşitsizliğinde,}$$

$$p = F_T(t_0) = 1 - \exp \left[- \frac{a^\alpha (\mu/\mu_0)^{-\alpha}}{[\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})]^\alpha} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{0.5^2}{[\Gamma(1 + \frac{1}{2})]^2} \right] = 0.2726 \text{ yerine konulursa,}$$

elde edilen $(1 - 0.2726)^n \leq 0.10$ eşitsizlikten $n = 8$ olarak elde edilir. Bu durumda tek katlı kabul örnekleme planının parametreleri $\left[n = 8, c = 0, \frac{t_0}{\mu_0} = 0.5 \right]$ olarak ifade edilir.

Örnek 2. Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresinin dağılımı $T \sim Weibull(\alpha = 2, \beta)$ olsun. $\mu_0 = 1000$ saat, tüketici riski $\beta^* = 1 - P^* = 0.10$, testin sonlandırma zamanı $t_0 = 1000$ saat ve gerçek ortalama ömür $\mu = 7000$ saat için üretici riski $\alpha^* = 0.05$ olsun. Bu durumda optimal n ve c değerleri bulunmak istensin.

$$\frac{t_0}{\mu_0} = 1 \text{ ve } \frac{\mu}{\mu_0} = 7$$

olduğundan,

$$p_1 = 1 - \exp \left[- \frac{a^\alpha (\mu/\mu_0)^{-\alpha}}{[\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})]^\alpha} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{1^2 (7)^{-2}}{[\Gamma(1 + \frac{1}{2})]^2} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{0.0004}{(0.8862)^2} \right] = 0.00051$$

elde edilir.

$$\frac{t_0}{\mu_0} = 1, \frac{\mu}{\mu_0} = 7 \text{ için,}$$

$$p_2 = 1 - \exp \left[- \frac{a^\alpha (\mu/\mu_0)^{-\alpha}}{[\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})]^\alpha} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{1}{[\Gamma(1 + \frac{1}{2})]^2} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{1}{(0.8862)^2} \right] = 0.7201$$

bulunur.

$\alpha^* = 0.05$, $\beta^* = 0.10$ ve $c=0$ için,

$$P(p_1) = \binom{n}{0} (0.00051)^0 (1-0.00051)^n \geq 0.95 \text{ olacak biçimde } n_{enb} = 100 \text{ elde edilir.}$$

$$P(p_2) = \binom{n}{0} (0.7201)^0 (1-0.7201)^n \leq 0.10 \text{ olacak biçimde } n_{enk} = 2 \text{ elde edilir.}$$

$n_{enk} \leq n_{enb}$ olduğundan optimal plan parametreleri $n_{enk} = 2, c = 0$ dır. Bu durumda tek katlı kabul örnekleme planının parametreleri $\left[n = 2, c = 0, \frac{t_0}{\mu_0} = 1 \right]$ olarak ifade edilir.

Örnek 3. Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresinin dağılımı $T \sim \text{Pareto}(\alpha = 2, \gamma)$ olsun. $\mu_0 = 7000$ saat, üretici riski $\alpha^* = 0.05$, örneklem büyüklüğü $n=12$ ve kabul sayısı $c=0$ olarak verilsin. Testin sonlandırılacağı minimum süre bulunmak istensin.

Testin sonlandırma zamanı $t_0 = a\mu_0$ olduğundan $t_0 = a7000$ saattir. Üretici riski $\alpha^* = 0.05$ olmak üzere partinin kabul olasılığı en az $1 - \alpha^* = 0.95$ olacak biçimde minimum t_0 'ın bulunması mümkündür.

Örneklem büyüklüğü $n=12$ ve kabul sayısı $c=0$ için başarısızlık olasılığı;

$$P(p) = \binom{12}{0} (1-p)^{12} \geq 0.95 \text{ eşitsizliğinden } p = 0.0043 \text{ olarak elde edilir.}$$

Eş.(14)'te verilen $F_T(t_0)$ 'da $p = 0.0043$ yerine konulursa, $\frac{\mu}{\mu_0} = 1$ için,

$$0.0043 = 1 - \left(1 + \frac{a}{(2-1)} \right)^{-2} \text{ eşitliğinden } a = 0.002 \text{ olarak elde edilir.}$$

Dolayısıyla minimum $t_0 = a\mu_0 = (0.002)(7000) = 14$ saattir.

Bu durumda $(n = 12, c = 0, \frac{t_0}{\mu_0} = \frac{14}{7000})$ parametrelili tek katlı kabul örnekleme planında $t_0 = 14$ saat içinde hiç başarısız ürün gözlenmez ise parti kabul edilir, aksi durumda ret edilir.

Örnek 4. Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresinin dağılımı $T \sim \text{Pareto}(\alpha = 4, \gamma)$ olsun. $\mu_0 = 1000$ saat,

$\frac{t_0}{\mu_0} = a = 0.10$, tüketici riski $\beta^* = 1 - P^* = 0.25$, her gruptaki örneklem büyüklüğü $r = 2$ olsun.

Minimum grup sayısı g bulunmak istensin.

$$\frac{t_0}{\mu_0} = 0.10 \text{ için, } \frac{\mu}{\mu_0} = 1 \text{ varsayımı ile } p_0 = 1 - \left(1 + \frac{0.10}{(4-1)} \right)^{-4} = 0.1229 \text{ olur.}$$

$\beta^* = 0.25$ ve $c=0$ için,

$$P_{GKÖP}(p_0) = \left[\binom{2}{0} (0.1229)^0 (1-0.1229)^2 \right]^g \leq 0.25 \text{ eşitsizliğinden } g = 6 \text{ olarak elde edilir.}$$

$c=1$ için,

$$P_{GKÖP}(p_0) = \left[\sum_{x=0}^1 \binom{2}{x} (0.1229)^x (1-0.1229)^{2-x} \right]^g \leq 0.25 \text{ için } g = 92$$

elde edilir.

Bu durumda, minimum grup sayısı $g=6$ olup, grup kabul örnekleme planının parametreleri $\left[g = 6, r = 2, c = 0, \frac{t_o}{\mu_0} = 0.10 \right]$ 'dir ve bu plan parametreleri için toplam örneklem büyüklüğü $n = rg = 12$ 'dir.

6. Weibull ve Pareto Dağılımları İçin Optimal Plan Parametreleri

Bu bölümde Kesim 3.3'te verilen iteratif yöntem kullanılarak Weibull ve Pareto dağılımları için optimal plan parametreleri hem üretici hem de tüketici riski dikkate alınarak elde edilmiştir. Üretici riski $\alpha^* = 0.01, 0.05, 0.10$ için sonuçlar elde edilmiş ancak burada sadece 0.05 için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Çizelge 1 ve 2'de, Weibull ve Pareto dağılımları için Tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planının optimal parametreleri verilmiştir.

Çizelge 1. Tüketici riski $\alpha^* = 0.05$ olduğunda şekil parametresi $\alpha = 1, 2, 3$ olan Weibull dağılımı için optimal (n, c) değerleri.

$\frac{\mu}{\mu_0}$	β^*	Weibull($\alpha = 1, \beta$)			Weibull($\alpha = 2, \beta$)			Weibull($\alpha = 3, \beta$)		
		$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$
5	0.10	(14, 3)	(12, 3)	(11, 3)	(12, 1)	(9, 1)	(6, 1)	(13, 0)	(7, 0)	(4, 0)
	0.15	(13, 3)	(11, 3)	(10, 3)	(11, 1)	(7, 1)	(5, 1)	(10, 0)	(6, 0)	(3, 0)
	0.20	(9, 2)	(10, 3)	(9, 3)	(9, 1)	(7, 1)	(2, 0)	(9, 0)	(5, 0)	(3, 0)
6	0.10	(14, 3)	(9, 2)	(8, 2)	(12, 1)	(9, 1)	(6, 1)	(13, 0)	(7, 0)	(4, 0)
	0.15	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(5, 0)	(4, 0)	(5, 1)	(10, 0)	(6, 0)	(3, 0)
	0.20	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(5, 0)	(3, 0)	(2, 0)	(9, 0)	(5, 0)	(3, 0)
7	0.10	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(7, 0)	(5, 0)	(3, 0)	(13, 0)	(7, 0)	(4, 0)
	0.15	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(5, 0)	(4, 0)	(3, 0)	(10, 0)	(6, 0)	(3, 0)
	0.20	(9, 2)	(8, 2)	(4, 1)	(5, 0)	(3, 0)	(2, 0)	(9, 0)	(5, 0)	(3, 0)
8	0.10	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(7, 0)	(5, 0)	(3, 0)	(13, 0)	(7, 0)	(4, 0)
	0.15	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(5, 0)	(4, 0)	(3, 0)	(10, 0)	(6, 0)	(3, 0)
	0.20	(6, 1)	(5, 1)	(4, 1)	(5, 0)	(3, 0)	(2, 0)	(9, 0)	(5, 0)	(3, 0)

Bu çizelgedeki değerlerin nasıl kullanılabileceğini bir örnekle açıklayalım: Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresinin dağılımı $T \sim Weibull(\alpha = 1, \beta)$, $\mu = 6000$ saat ve $\mu_0 = 1000$ saat olsun. Kalite denetçisi, yaşam testini sonlandırma süresini $t_0 = 600$ saat olarak öngörsün. Üretici riski $\alpha^* = 0.05$ ve tüketici riski $\beta^* = 0.20$ alındığında, optimal n ve c değerleri Çizelge 1'den sırasıyla 8 ve 2 olarak elde edilir. Bu örnekleme planına göre, bir yığından rasgele 8 ürün seçilir ve ürünlerin kullanım ömrü test edilir. Yaşam süresi 600 saatten küçük en çok 2 ürün (başarısızlık) ile karşılaşıldığında, yaşam testi sonlandırılır ve parti kabul edilir. Diğer yandan, eğer 2'den çok başarısızlık $t_0 = 600$ saatten önce gerçekleşirse, yaşam testi

sonlandırılır ve parti reddedilir. Bu örnek için, Eş.(12)'de verilen OC fonksiyonu kullanılarak partinin kabul olasılığı 0.967 olarak bulunur.

Çizelge 1'de Weibull dağılımının şekil parametresi α 'nın farklı değerleri için elde edilen n ve c değerleri incelendiğinde, α parametresi sabit tutulduğunda testin sonlandırma süresi $t_0 = a\mu_0$ artarken test edilecek ürün sayısının azaldığı görülmektedir.

Çizelge 2. Tüketici riski $\alpha^* = 0.05$ olduğunda şekil parametresi $\alpha = 10, 20, 30$ olan Pareto dağılımı için optimal (n, c) değerleri.

$\frac{\mu}{\mu_0}$	β^*	Pareto($\alpha = 10, \gamma$)			Pareto($\alpha = 20, \gamma$)			Pareto($\alpha = 30, \gamma$)		
		$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$
5	0.10	(13, 3)	(11, 3)	(10, 3)	(14, 3)	(12, 3)	(10, 3)	(14, 3)	(12, 3)	(10, 3)
	0.15	(12, 3)	(10, 3)	(9, 3)	(13, 3)	(11, 3)	(9, 3)	(13, 3)	(11, 3)	(10, 3)
	0.20	(11, 3)	(7, 2)	(6, 2)	(12, 3)	(7, 2)	(9, 3)	(12, 3)	(10, 3)	(9, 3)
6	0.10	(13, 3)	(11, 3)	(10, 3)	(14, 3)	(12, 3)	(10, 3)	(14, 3)	(12, 3)	(10, 3)
	0.15	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)
	0.20	(9, 2)	(7, 2)	(6, 2)	(9, 2)	(7, 2)	(7, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)
7	0.10	(10, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)
	0.15	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)
	0.20	(9, 2)	(7, 2)	(6, 2)	(9, 2)	(7, 2)	(7, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)
8	0.10	(10, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)	(11, 2)	(9, 2)	(8, 2)
	0.15	(9, 2)	(8, 2)	(7, 2)	(10, 2)	(5, 1)	(7, 2)	(10, 2)	(8, 2)	(7, 2)
	0.20	(9, 2)	(7, 2)	(4, 1)	(9, 2)	(5, 1)	(4, 1)	(6, 1)	(5, 1)	(4, 1)

Çizelge 2'den yaşam süresinin Pareto dağılımına uygun olması durumunda testin sonlandırma süresi artarken test edilecek ürün sayısının azaldığı söylenebilir. Diğer yandan Çizelge 1 ve Çizelge 2 karşılaştırıldığında ürün ömrü Pareto dağılımlı olduğu bir teste göre, ürün ömrünün Weibull dağılımlı olduğu testte daha büyük sayıda örneklemin muayene edilmesi gerektiği görülmektedir.

Çizelge 3 ve 4'te, Weibull ve Pareto dağılımları için grup kabul örnekleme planının optimal parametreleri verilmiştir.

Çizelge 3. Tüketici riski $\alpha^* = 0.05$ olduğunda şekil parametresi $\alpha = 1, 2$ olan Weibull dağılımı için optimal (g, r, c) değerleri.

$\frac{\mu}{\mu_0}$	β^*	Weibull($\alpha = 1, \beta$)			Weibull($\alpha = 2, \beta$)		
		$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$
5	0.10	(37, 3, 2)	(24, 3, 2)	(17, 3, 2)	(30, 2, 1)	(16, 2, 1)	(9, 2, 1)
	0.15	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(14, 3, 2)	(25, 2, 1)	(13, 2, 1)	(8, 2, 1)
	0.20	(26, 3, 2)	(17, 3, 2)	(12, 3, 2)	(21, 2, 1)	(11, 2, 1)	(7, 2, 1)
6	0.10	(37, 3, 2)	(24, 3, 2)	(17, 3, 2)	(30, 2, 1)	(16, 2, 1)	(9, 2, 1)
	0.15	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(14, 3, 2)	(25, 2, 1)	(13, 2, 1)	(8, 2, 1)
	0.20	(26, 3, 2)	(17, 3, 2)	(12, 3, 2)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(1, 2, 0)
7	0.10	(37, 3, 2)	(24, 3, 2)	(17, 3, 2)	(4, 2, 0)	(3, 2, 0)	(2, 2, 1)
	0.15	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(14, 3, 2)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)
	0.20	(10, 2, 1)	(7, 2, 1)	(6, 2, 1)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(1, 2, 0)
8	0.10	(14, 2, 1)	(24, 3, 2)	(17, 3, 2)	(4, 2, 0)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)
	0.15	(11, 2, 1)	(8, 2, 1)	(6, 2, 1)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)
	0.20	(10, 2, 1)	(7, 2, 1)	(6, 2, 1)	(3, 2, 0)	(2, 2, 0)	(1, 2, 0)

Çizelge 4. Tüketici riski $\alpha^* = 0.05$ olduğunda şekil parametresi $\alpha = 10, 20$ olan Pareto dağılımı için optimal (g, r, c) değerleri.

$\frac{\mu}{\mu_0}$	β^*	Pareto($\alpha = 10, \gamma$)			Pareto($\alpha = 20, \gamma$)		
		$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$	$a = 0.5$	$a = 0.6$	$a = 0.7$
5	0.10	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(15, 3, 2)	(33, 3, 2)	(22, 3, 2)	(16, 3, 2)
	0.15	(25, 3, 2)	(17, 3, 2)	(12, 3, 2)	(28, 2, 2)	(18, 3, 2)	(13, 3, 2)
	0.20	(21, 3, 2)	(14, 3, 2)	(10, 3, 2)	(23, 3, 2)	(15, 3, 2)	(11, 3, 2)
6	0.10	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(15, 3, 2)	(33, 3, 2)	(22, 3, 2)	(16, 3, 2)
	0.15	(25, 3, 2)	(17, 3, 2)	(12, 3, 2)	(28, 3, 2)	(18, 3, 2)	(13, 3, 2)
	0.20	(21, 3, 2)	(14, 3, 2)	(10, 3, 2)	(23, 3, 2)	(15, 3, 2)	(11, 3, 2)
7	0.10	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(15, 3, 2)	(33, 3, 2)	(22, 3, 2)	(16, 3, 2)
	0.15	(25, 3, 2)	(17, 3, 2)	(12, 3, 2)	(28, 3, 2)	(18, 3, 2)	(13, 3, 2)
	0.20	(8, 2, 1)	(14, 3, 2)	(10, 3, 2)	(9, 2, 1)	(7, 2, 1)	(11, 3, 2)
8	0.10	(30, 3, 2)	(20, 3, 2)	(15, 3, 2)	(33, 3, 2)	(22, 3, 2)	(16, 3, 2)
	0.15	(10, 2, 1)	(7, 2, 1)	(6, 3, 1)	(11, 2, 1)	(8, 2, 1)	(6, 2, 1)
	0.20	(8, 2, 1)	(6, 2, 1)	(5, 3, 1)	(9, 2, 1)	(7, 2, 1)	(5, 2, 1)

Bu çizelgedeki değerlerin nasıl kullanılabileceğini bir örnekle açıklayalım: Belirli bir ürüne ilişkin yaşam süresi verilerinin dağılımı $T \sim Pareto(\alpha = 10, \gamma)$ olsun. $\frac{\mu}{\mu_0} = 6$, $a = 0.6$, $\alpha^* = 0.05$ ve $\beta^* = 0.20$

için Çizelge 4'ten optimal g , r ve c değerleri sırasıyla 14, 3 ve 2 biçiminde elde edilir. Bu durumda, ürünlerin yaşam sürelerinin dağılımının Pareto dağılımlı olduğu varsayımında bir yığından 14 test cihazının her biri için rasgele 3'er ürün seçilir ve ürünlerin kullanım ömrü test edilir. Tüm test cihazları için başarısızlık sayısı 600 saatte 2 ya da daha az ise, yaşam testi sonlandırılır ve parti kabul edilir. Herhangi bir test cihazında başarısızlık sayısı 2'den çok olduğunda ise parti reddedilir. Bu örnek için Eş.(12)'de verilen OC fonksiyonu kullanılarak her bir grup için partinin kabul olasılığı 0.826 olarak bulunur.

Çizelge 3 ve 4 birlikte incelendiğinde, Tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı kabul örnekleme planında elde edilen sonuçlara paralel sonuçların elde edildiği görülebilir. Ürünlerin yaşam süresi Weibull dağılımlı olduğunda, α parametresinin sabit bir değeri için testin sonlandırma süresi artarken, grup örneklem büyüklüğünün değişmediği ancak grup sayısının yani test edilecek toplam ürün sayısının azaldığı görülmektedir. Benzer şekilde Pareto dağılımlı olduğunda ise, α parametresinin sabit bir değeri için testin sonlandırma süresi artarken test edilecek toplam örneklem büyüklüğü azalmaktadır. Her iki dağılımın grup örneklem planları karşılaştırıldığında, bazı parametre değerleri için, yaşam süresi Weibull dağılımına sahip ürünlerin yaşam testinde Pareto dağılımına göre daha büyük grup sayısına gereksinim olduğu söylenebilir.

7. Sonuç

İstatistiksel kalite kontrol sürecinde zaman ve maliyet nedeniyle tüm ürünlerin muayene edilemeyeceği ya da olası olmadığı durumlarda, kabul örnekleme planlarına göre partinin kabulüne ya da reddine karar verilir. Kalite karakteristiği ürünün yaşam süresi olduğunda, kesilmiş yaşam testine dayalı kabul örnekleme planlarının elde edilmesi önemlidir. Çalışmada, ürünün yaşam süresi Weibull ya da Pareto dağılımına uyduğunda, Tip-I sansürleme düzeninde kesilmiş yaşam testine dayalı tek katlı ve grup kabul örnekleme plan parametreleri, hem üretici hem de tüketici riski dikkate alınarak elde edildi. Bu örnekleme planlarının nasıl kullanılacağına ilişkin bazı örnekler verildi.

Kaynakça

- [1] Amer Ibrahim Al-Omari (2018), Acceptance sampling plans based on truncated life tests for Sushila distribution *J. Math. Fund. Sci.*, 50(1), 72-83.
- [2] Aslam, M., Kundu, D. and Ahmad, M. (2010) Time truncated acceptance sampling plans for generalized exponential distribution, *Journal of Applied Statistics*, 37(4), 555-566.
- [3] Aslam, M. and Jun, C.H. (2013) Designing of time truncated acceptance sampling plans by using two-point approach, *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 6(1), pp. 18-31.
- [4] Balakrishnan, N., Leiva, V. and Lopez, J. (2007) Acceptance sampling plans for truncated life tests based on the generalized Birnbaum-Saunders distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36, 643-656.
- [5] Baklizi, A (2003). Acceptance sampling based on truncated life tests in the Pareto distribution of the second kind, *Advances and Applications in Statistics*, 3(1), 33-48.
- [6] Epstein, B. (1954) Truncated life tests in the exponential case. *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 555-564.
- [7] Gui, W. and Shangli Zhang, S. (2014) Acceptance sampling plans based on truncated life tests for Gompertz Distribution, *Journal of Industrial Mathematics*, Vol. 2014, Article ID 391728, 7 pages. <https://doi.org/10.1155/2014/391728> .
- [8] Loganathan, A. and Gunasekaran, M. (2017) Determination of reliability single sampling plans based on exponentiated distribution, *Global and Stochastic Analysis*, 4(1), 111-118.
- [9] Malathi, D. and Muthulakshmi, S. (2015) Acceptance sampling plan for the truncated life tests based on Gompertz distribution using mean, *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 6(8), 1828-1841.
- [10] Malathi, D. and Muthulakshmi, S. (2016) Truncated life test acceptance sampling plans assuring percentile life under Gompertz distribution, *IOSR-Journal of Mathematics*, 12(2), 27-32.
- [11] Malathi, D. and Muthulakshmi, S. (2015) Acceptance sampling plan for truncated life tests based on Frechet distribution using median, *International Journal of Advancement in Research and Technology*, 4(8), 1-13.
- [12] Mughal, A.R. and Ismail, M. (2013) An Economic Reliability Efficient Group Acceptance Sampling Plans for Family Pareto Distributions, *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology* 6(24), 4646-4652.
- [13] Rosaiah, K. and Kantam, R.R.L. (2005) Acceptance sampling based on the inverse Rayleigh distribution, *Economic Quality Control*, 20(2), 277-286.
- [14] Rao, B.S., Kumar, S.C.H. and K. Rosaiah, S. (2013) Acceptance Sampling Plans from Life Tests Based on Percentiles of Half Normal Distribution, *Journal of Quality and Reliability Engineering*, Article ID 302469, 1-7.
- [15] Srinivasa Rao, G. (2011) A Hybrid Group Acceptance Sampling Plans For Lifetimes Based On Log-Logistic Distribution, *Journal of Reliability and Statistical Studies*; 4(1), 31- 40.
- [16] Singh, S. and Tripathi, Y.M. (2015) Acceptance sampling plan for inverse Weibull distribution based on truncated life tests, DOI:10.13140/RG.2.1.3984.0085.
- [17] Sudamani A.R. and Anburajan, P. (2012) Group Acceptance Sampling Plans using Weighted Binomial on Truncated Life Tests for Inverse Rayleigh and Log-Logistic Distributions, *Journal of Mathematics*, 2(3), 33-38.